



Exemplos e exercícios sobre sistemas LTI e conversão A/D e D/A.



Departamento de Eletrônica e Computação

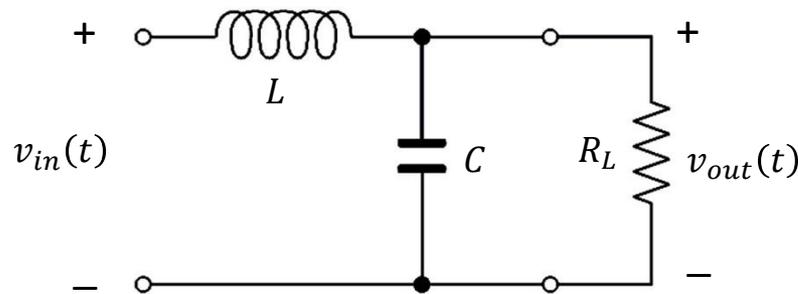
Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

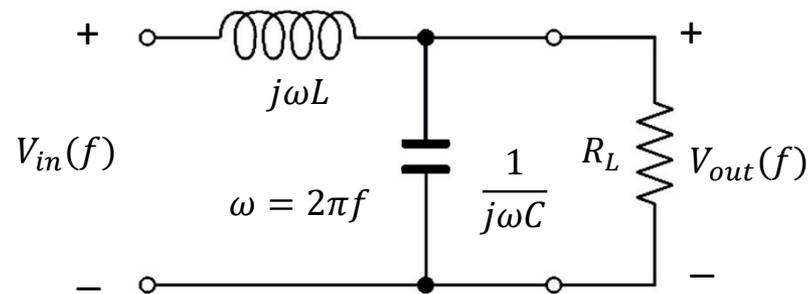
Exemplo – Função de transferência de um circuito elétrico

Exemplo: O diagrama abaixo mostra um sistema LTI analógico construído com um indutor L , um capacitor C e um resistor de carga R_L que representa a resistência de entrada do bloco funcional que segue o sistema LTI. Pede-se: **(a)** Determine analiticamente a função de transferência $H(f)$ para o sistema LTI abaixo. **(b)** Plote na banda $f_{min} < f < f_{max}$ as curvas da magnitude e da fase da resposta em frequência do sistema $p/L = 1.0 H, C = 1.0 F$ e $R_L = 2\Omega$, sendo $f_{min} = 0.01\text{Hz}$ e $f_{max} = 1.0\text{ Hz}$. **(c)** A partir do resultado obtido em (b) infira se este sistema LTI é um LPF (low pass filter) ou se é um HPF (high pass filter). **(d)** Determine a resposta $v_{out}(t)$ para $v_{in}(t) = 10 \cos(2\pi 0.15t + 30^\circ)$. **(e)** Para um intervalo de tempo correspondente a 2 períodos de $v_{in}(t)$ plote em um mesmo gráfico $v_{in}(t)$ e $v_{out}(t)$ obtido em como resultado de (d).



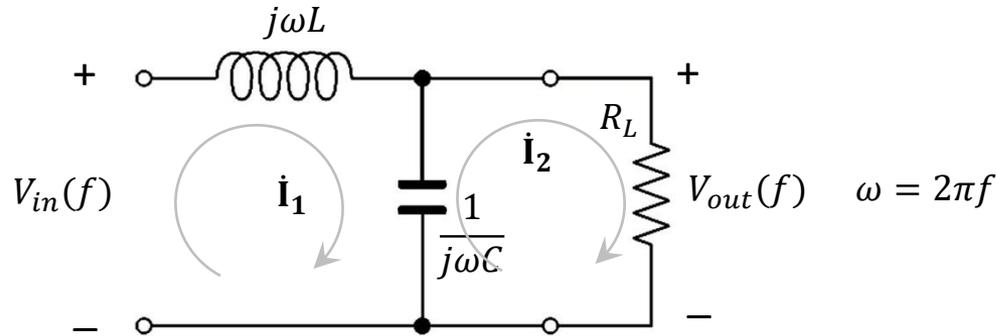
Solução:

(a) Para determinar analiticamente a função de transferência $H(f) = V_{out}(f)/V_{in}(f)$ do circuito elétrico acima é necessário representar a razão entre tensão e corrente nos terminais de cada elemento do circuito em função da frequência f . Conforme Apêndice B, o circuito assim representado resulta em:



Exemplo – Função de transferência de um circuito elétrico

Aplicando Kirchoff e análise de malhas, temos:



$$\begin{cases} -V_{in} + j\omega L \dot{\mathbf{I}}_1 + \left(\frac{1}{j\omega C}\right) (\dot{\mathbf{I}}_1 - \dot{\mathbf{I}}_2) = 0 & (1) \\ \left(\frac{1}{j\omega C}\right) (\dot{\mathbf{I}}_2 - \dot{\mathbf{I}}_1) + R_L \dot{\mathbf{I}}_2 = 0 & (2) \\ R_L \dot{\mathbf{I}}_2 = V_{out} & (3) \end{cases}$$

De (3), $\dot{\mathbf{I}}_2 = \frac{V_{out}}{R_L}$. Substituindo em (1) e (2) temos:

$$\begin{cases} -V_{in} + j\omega L \dot{\mathbf{I}}_1 + \left(\frac{1}{j\omega C}\right) \left(\dot{\mathbf{I}}_1 - \frac{V_{out}}{R_L}\right) = 0 & (4) \\ \left(\frac{1}{j\omega C}\right) \left(\frac{V_{out}}{R_L} - \dot{\mathbf{I}}_1\right) + V_{out} = 0 & (5) \end{cases}$$

De (4),

$$\dot{\mathbf{I}}_1 = \frac{V_{out} + j\omega V_{in} R_L C}{R_L - \omega^2 R_L L C} \quad (6)$$

Substituindo (6) em (5) temos:

$$\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \left(\frac{V_{out}}{R_L} - \left(\frac{V_{out} + j\omega V_{in} R_L C}{R_L - \omega^2 R_L L C}\right)\right) + V_{out} = 0 \quad (7)$$

Como o sistema é LTI, podemos fazer $V_{in} = 1$ em (7) e isolar V_{out} , de forma que V_{out} resultante representa $H = V_{out}/V_{in}$:

$$\left(\frac{1}{j\omega C}\right) \left(\frac{V_{out}}{R_L} - \left(\frac{V_{out} + j\omega R_L C}{R_L - \omega^2 R_L L C}\right)\right) + V_{out} = 0 \quad (8)$$

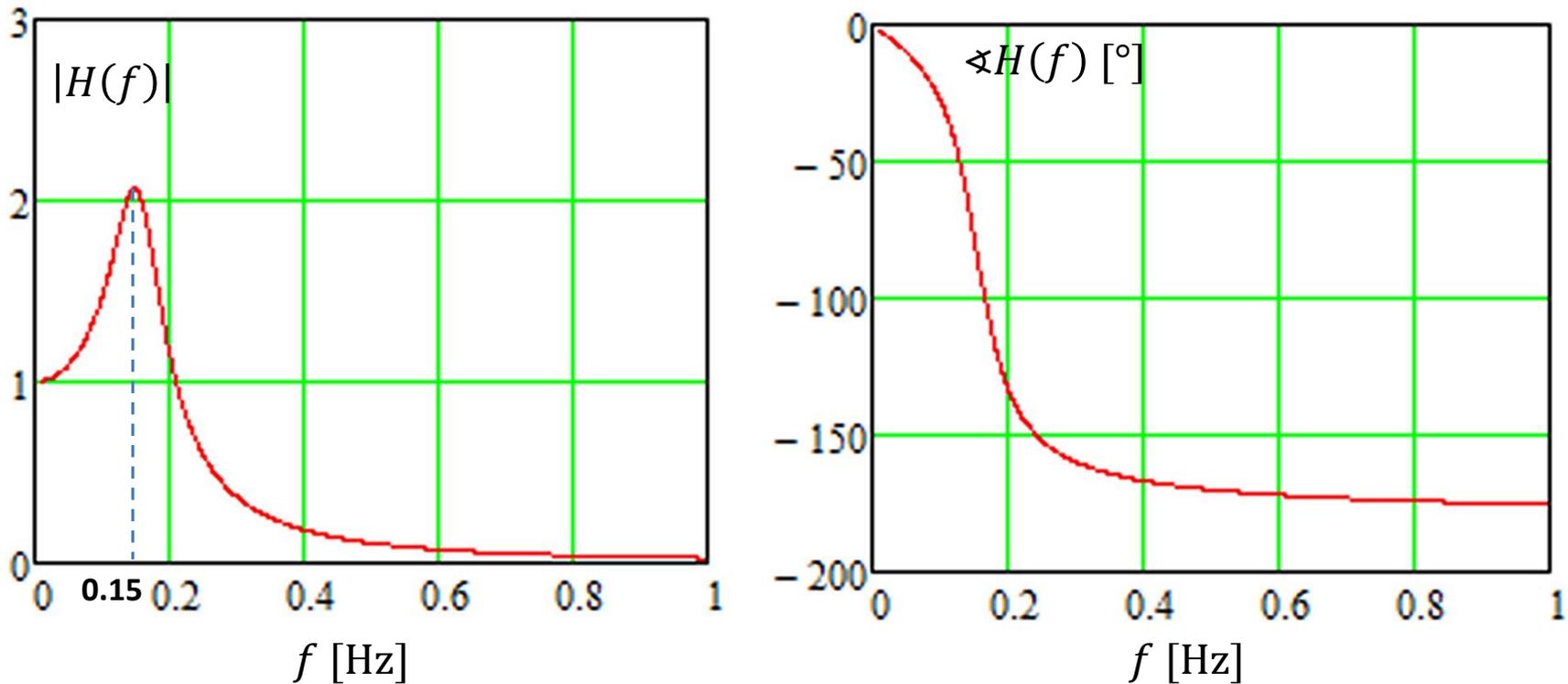
Isolando V_{out} em (8), temos:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R_L^2 - L(R_L^2 C \omega^2 + j \omega R_L)}{(R_L L C)^2 \omega^4 + (L^2 - 2LCR_L) \omega^2 + R_L^2} \quad (9)$$

$$\omega = 2\pi f$$

Exemplo – Função de transferência de um circuito elétrico

(b) Para plotar as curvas de magnitude $|H(\omega)|$ e de fase $\angle H(\omega)$ de $H(\omega)$, $\omega = 2\pi f$, na banda $0.01\text{Hz} < f < 1.0\text{ Hz}$, para $L = 1.0\text{ H}$, $C = 1.0\text{ F}$ e $R_L = 2\Omega$, lembre que $H(\omega)$ é uma função complexa da forma $H(\omega) = \text{Re}\{H(\omega)\} + j\text{Im}\{H(\omega)\}$. Daí, do Apêndice A, $|H(\omega)| = \sqrt{(\text{Re}\{H(\omega)\})^2 + (\text{Im}\{H(\omega)\})^2}$ e $\angle H(\omega) = \text{atan}\left(\frac{\text{Im}\{H(\omega)\}}{\text{Re}\{H(\omega)\}}\right)$. Em particular, quanto à curva de fase $\angle H(\omega)$, ao invés de usar a função $\text{atan}()$ é usual utilizar a função $\text{atan2}()$, dado que $\text{atan2}()$ delimita a faixa de variação angular da fase no intervalo $[-180^\circ, +180^\circ]$ (ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2>). Portanto, da equação (9) do slide anterior, e usando a função $\text{atan2}()$ p/ a curva $\angle H(f)$, temos:



(c) O sistema LTI em questão é um filtro passa baixa com um pico de ressonância em $f=0.15\text{Hz}$ na curva de magnitude da resposta em frequência. Note da curva de fase que o sistema atrasa o sinal de entrada, chegando a -180° p/ $f > 1\text{Hz}$.

Exemplo – Função de transferência de um circuito elétrico

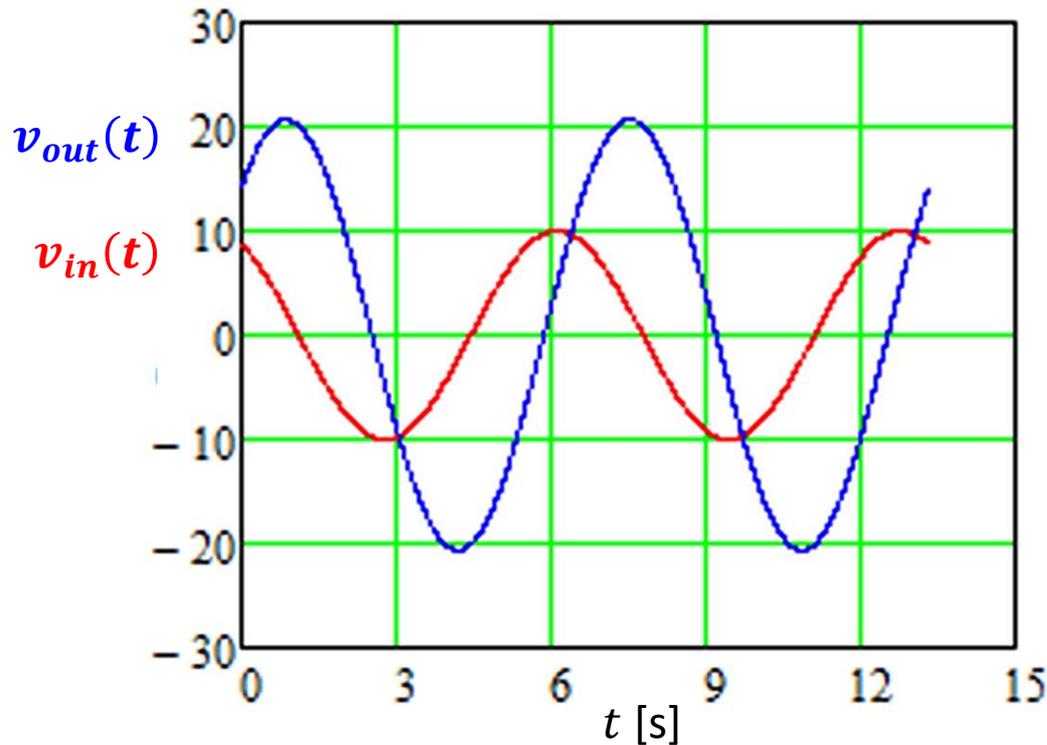
(d) Para determinar a resposta $v_{out}(t)$ à excitação $v_{in}(t) = 10 \cos(2\pi 0.15t + 30^\circ)$, primeiramente precisamos determinar $|H(f)|$ e $\angle H(f)$ na frequência f_{in} da excitação, que é $f_{in} = 0.15$ Hz.

Daí, da equação (9), temos que $|H(f_{in})| = 2.065$ e $\angle H(f_{in}) = -76.7^\circ$.

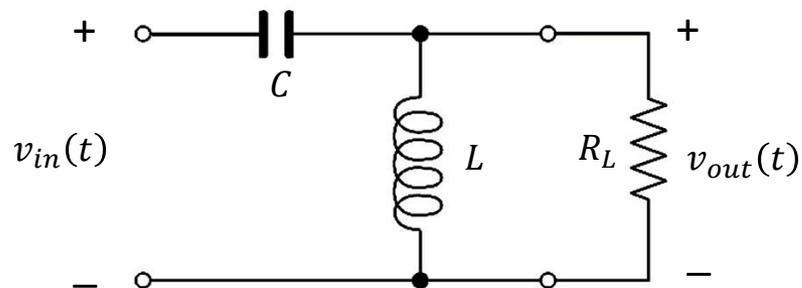
E, portanto, $v_{out}(t) = 10|H(f_{in})| \cos(2\pi 0.15t + 30^\circ + \angle H(f_{in})) = 10 \times 2.065 \cos(2\pi 0.15t + 30^\circ - 76.7^\circ)$

Que resulta em $v_{out}(t) = 20.65 \cos(2\pi 0.15t - 46.7^\circ)$.

(e) Plotando $v_{in}(t)$ e $v_{out}(t)$ em um mesmo gráfico para $0 < t < 2T$, com $T = 1/f_{in} = 6.7$ s:



Homework – Refazer o exemplo anterior, trocando a posição do indutor L e do capacitor C , conforme abaixo:



Exemplo – Tempo de transferência de dados digitalizados

Exemplo: Um concerto de um famoso pianista, com duração T de 1 hora, foi digitalizado e armazenado em um site de músicas clássicas. A faixa de áudio considerada para digitalização foi de 0 a 10 kHz, utilizando como taxa de amostragem 5 vezes a frequência de Nyquist e amplitude quantizada em $M = 512$ níveis. Para realizar transferências de dados deste site, o computador utilizado consegue manter uma taxa constante de $\tau = 4$ Mbits/s. Com base nas informações acima, determine o tempo estimado Δt , em segundos, para a completa transferência do arquivo para esse computador.

Solução: A frequência de Nyquist f_{Nyq} é a mínima frequência de amostragem $p/$ que não seja gerado *aliasing* no processo de digitalização, dada por $f_{Nyq} = 2 f_M$, onde f_M é a máxima frequência no espectro do sinal a ser digitalizado. Do enunciado é dado que $f_M = 10\text{kHz}$, de modo que $f_{Nyq} = 2 f_M = 20\text{kHz}$.

Da asserção no enunciado “utilizando como taxa de amostragem 5 vezes a frequência de Nyquist”, temos que a frequência de amostragem é $f_s = 5f_{Nyq} = 100\text{Kamostras/s}$.

Ainda do enunciado é dado que a taxa de transmissão é $\tau = 4$ Mbps, que o número de níveis de quantização é $M = 512$ e que o tempo de duração da informação que foi digitalizada é $T = 3600$ s (1 hora).

O número de bits por amostra é $N = \text{ceil}(\log_2(M)) = \text{ceil}(\ln(M)/\ln(2)) = 9$ bits/amostra.

O número total de bits a serem transferidos é $N_{tot} = N f_s T = 9 \frac{\text{bits}}{\text{amostra}} \times 100000 \frac{\text{amostra}}{\text{s}} \times 3600 \text{ s} = 3240000000$ bits (3.24×10^9 bits).

Daí, o tempo Δt estimado para transferência de $N_{tot} = 3.24 \times 10^9$ bits a uma taxa de transmissão $\tau = 4$ Mbps é

$$\Delta t = \frac{N_{tot}}{\tau} = \frac{3.24 \times 10^9 \text{ bits}}{4 \times 10^6 \frac{\text{bits}}{\text{s}}} = 810 \text{ s}$$

Homework – refazer este exemplo agora considerando a taxa de transmissão de uma rede Fast Ethernet ($\tau = 100$ Mbps) e faixa de áudio 0 a 22 kHz.

Exemplo – Quantização e Nyquist

Exemplo: A análise de vibrações mecânicas na estrutura de aeronaves, causadas pelas condições aerodinâmicas operacionais, é crucial para a integridade física das mesmas. Um sistema de aquisição de dados monitora estas vibrações através de transdutores elétricos, tendo o sinal analógico na saída dos transdutores as seguintes características:

- faixa de frequência do espectro do sinal: 1Hz a 100 Hz
- excursão em amplitude do sinal: -5 V a $+5\text{ V}$

O sinal analógico é digitalizado com uma resolução de 50 mV e transmitido para uma central de processamento, onde é analisado. Determine a mínima taxa de transmissão τ destes dados digitalizados em bits/s.

Solução: Do enunciado é dado que o passo de quantização é $S = 50\text{mV}$ e que os limites da excursão do sinal analógico são $V_H = +5\text{V}$ e $V_L = -5\text{V}$. Portanto, o número de níveis de quantização é $M = (V_H - V_L)/S = 200$.

O número de bits por amostra é $N = \text{ceil}(\log_2(M)) = \text{ceil}(\ln(M)/\ln(2)) = 8$ bits/amostra.

Do enunciado, a máxima frequência no espectro do sinal analógico é $f_M = 100$ Hz. E daí, a frequência de amostragem f_s mínima de acordo com o critério de Nyquist é $f_s = 2 f_M = 200$ amostras/s.

Portanto a mínima taxa de transmissão τ é

$$\tau = N f_s = 8 \frac{\text{bits}}{\text{amostra}} \times 200 \frac{\text{amostras}}{\text{s}} = 1600 \text{ bps}$$

Homework – refazer este exemplo agora considerando a faixa de frequência do espectro do sinal 10Hz a 1KHz e resolução de 10mV.

Apêndice A:

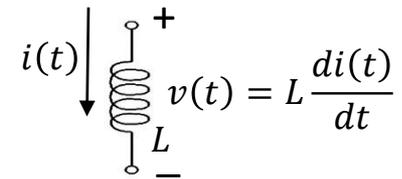
Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

Sob excitação senoidal, uma solução para as tensões e/ou correntes na equação diferencial que rege um sistema LTI analógico é a função complexa $F_c(t) = Ae^{j\psi} e^{j\omega t} = Ae^{j(\omega t + \psi)} = A\cos(\omega t + \psi) + jA\sin(\omega t + \psi)$, com $\text{Re}\{F_c(t)\} = A\cos(\omega t + \psi)$ e $\text{Im}\{F_c(t)\} = A\sin(\omega t + \psi)$ respectivamente representando uma cossenóide e uma senóide, ambas de frequência $\omega = 2\pi f$, amplitude A e fase ψ (ver Apêndice A). **O sistema LTI processa de modo independente $\text{Re}\{F_c(t)\}$ e $\text{Im}\{F_c(t)\}$, e daí podemos desprezar $\text{Im}\{F_c(t)\}$ e considerar $\text{Re}\{F_c(t)\}$ como a resposta à $A\cos(\omega t + \psi)$.**

Independente de $F_c(t)$ representar uma tensão ou uma corrente, $\frac{\partial}{\partial t}\{F_c(t)\}$ resulta na mesma forma funcional de $F_c(t)$, o que caracteriza $F_c(t)$ como uma função que é solução da equação diferencial que rege a transmitância do sistema LTI analógico (i.e., após a execução da(s) derivada(s) $e^{j\omega t}$ é cancelada no lado esquerdo e direito da equação diferencial).

$$\frac{\partial}{\partial t}\{F_c(t)\} = \frac{\partial}{\partial t}\{Ae^{j\psi} e^{j\omega t}\} = Ae^{j\psi} \frac{\partial}{\partial t}\{e^{j\omega t}\} = Ae^{j\psi} j\omega e^{j\omega t} = j\omega Ae^{j\psi} e^{j\omega t} = j\omega F_c(t)$$



Exemplo: Determine a resposta $v(t)$ à excitação $i(t) = I\cos(\omega t + \psi)$ do sistema LTI formado por um indutor de valor L .

Solução: Vamos excitar o sistema com a excitação complexa $i_c(t) = Ie^{j\psi} e^{j\omega t} = I\cos(\omega t + \psi) + jI\sin(\omega t + \psi)$ ao invés de excitar com a excitação real $i(t) = I\cos(\omega t + \psi)$, notando que $i(t) = \text{Re}\{i_c(t)\}$. Daí temos que a resposta complexa $v_c(t) = Ve^{j\theta} e^{j\omega t} = V\cos(\omega t + \theta) + jV\sin(\omega t + \theta)$ à excitação $i_c(t)$ é obtida da seguinte maneira

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow v_c(t) = L \frac{di_c(t)}{dt} \Rightarrow Ve^{j\theta} e^{j\omega t} = L \frac{d\{Ie^{j\psi} e^{j\omega t}\}}{dt} \Rightarrow Ve^{j\theta} e^{j\omega t} = Ie^{j\psi} L \frac{d\{e^{j\omega t}\}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{Ve^{j\theta}}_{\dot{V}} e^{j\omega t} = \underbrace{Ie^{j\psi}}_{\dot{I}} L j\omega e^{j\omega t} \Rightarrow \dot{V} = j\omega L \dot{I} \rightarrow \text{resposta fasorial}$$

Obtendo a resposta no tempo $v(t)$ a partir da resposta fasorial \dot{V} :

Fasor de $v(t)$
Fasor de $i(t)$

$$v(t) = \text{Re}\{\dot{V} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{j\omega L I e^{j\psi} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{e^{j90^\circ} \omega L I e^{j\psi} e^{j\omega t}\} = \text{Re}\{\omega L I e^{j(\omega t + \psi + 90^\circ)}\} =$$

Apêndice B:

Exemplo: Determine a resposta $v(t)$ à excitação $i(t) = I\cos(\omega t + \psi)$ do sistema LTI formado por um capacitor de valor C .

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad \downarrow \quad \begin{array}{c} + \\ | \\ \text{---} \\ | \\ C \\ | \\ - \end{array} v(t)$$

Solução: Vamos excitar o sistema com a excitação complexa $i_c(t) = Ie^{j\psi}e^{j\omega t} = I\cos(\omega t + \psi) + jI\sin(\omega t + \psi)$ ao invés de excitar com a excitação real $i(t) = I\cos(\omega t + \psi)$, notando que $i(t) = \text{Re}\{i_c(t)\}$. Daí temos que a resposta complexa $v_c(t) = Ve^{j\theta}e^{j\omega t} = V\cos(\omega t + \theta) + jV\sin(\omega t + \theta)$ à excitação $i_c(t)$ é obtida da seguinte maneira

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \Rightarrow i_c(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \Rightarrow Ie^{j\psi}e^{j\omega t} = C \frac{d\{Ve^{j\theta}e^{j\omega t}\}}{dt} \Rightarrow Ie^{j\psi}e^{j\omega t} = Ve^{j\theta}C \frac{d\{e^{j\omega t}\}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{Ie^{j\psi}e^{j\omega t}}_{\mathbf{\dot{I}}} = \underbrace{Ve^{j\theta}Cj\omega e^{j\omega t}}_{\mathbf{\dot{V}}} \Rightarrow Ie^{j\psi} = j\omega CVe^{j\theta} \Rightarrow \mathbf{\dot{I}} = j\omega C\mathbf{\dot{V}} \Rightarrow \mathbf{\dot{V}} = \left(\frac{1}{j\omega C}\right)\mathbf{\dot{I}} \rightarrow \text{resposta fasorial}$$

Obtendo a resposta no tempo $v(t)$ a partir da resposta fasorial $\mathbf{\dot{V}}$:

$$\boxed{v(t) = \text{Re}\{\mathbf{\dot{V}}e^{j\omega t}\}} = \text{Re}\left\{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)Ie^{j\psi}e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{e^{-j90^\circ} \frac{I}{\omega C} e^{j\psi}e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\left\{\frac{I}{\omega C} e^{j(\omega t + \psi - 90^\circ)}\right\} =$$

$$= \text{Re}\left\{\frac{I}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - 90^\circ) + j\frac{I}{\omega C} \sin(\omega t + \psi - 90^\circ)\right\} = \frac{I}{\omega C} \cos(\omega t + \psi - 90^\circ)$$

$\mathbf{\dot{I}}$
 Fasor de $i(t)$
 $\mathbf{\dot{V}}$
 Fasor de $v(t)$