Representação de sistemas por equações diferenciais e por equações de diferenças. Convolução. Propriedades da resposta ao impulso de um sistema LTI.

Departamento de Eletrônica e Computação

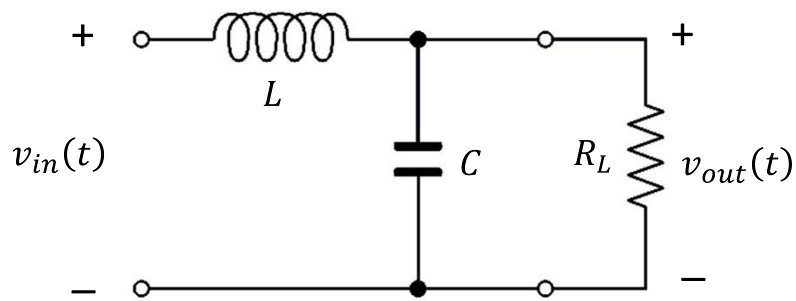
Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

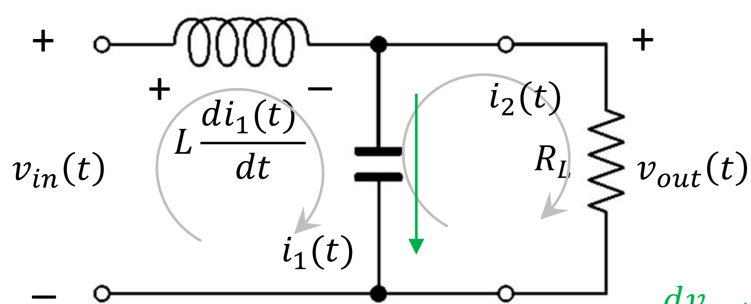
Todo sistema LTI analógico tem a sua transmitância definida por uma equação diferencial. Por exemplo, consideremos o circuito RLC abaixo.

Exemplo: O diagrama abaixo mostra um sistema LTI analógico construído com um indutor L, um capacitor C e um resistor de carga R_L que representa a resistência de entrada do bloco funcional que segue o sistema LTI. Pede-se: **(a)** Determine a equação diferencial que define a transmitância que inter-relaciona a entrada $v_{in}(t)$ com a saída $v_{out}(t)$. **(b)** Determine analiticamente a função de transferência $H(f) = V_{out}(f)/V_{in}(f)$ a partir da equação diferencial obtida em (a). **(c)** Plote na banda $fmin < f < fmax$ as curvas da magnitude e da fase da resposta em frequência $H(f)$ do sistema p/ $L = 1.0\ H, C = 1.0\ F$ e $R_L = 2\Omega$, sendo $fmin$ = 0.01Hz e $fmax$ = 1.0 Hz e compare com as curvas da função de transferência obtida no item (a) do exemplo no slide 2 do Cap II.2 das notas de aula.



Solução:

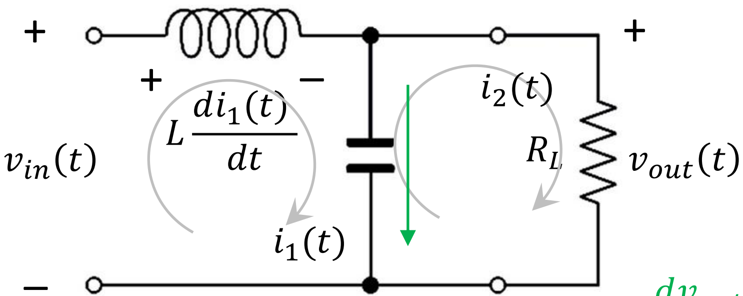
(a) Primeiramente é necessário indicar as relações diferenciais no tempo entre tensão e corrente, tanto para o capacitor C como para o indutor L:



$$i_1(t) - i_2(t) = C\frac{dv_{out}(t)}{dt}$$

Aplicando Kirchoff e análise de malhas, temos:

$$\begin{cases} -V_{in}(t) + L\dfrac{di_1(t)}{dt} + V_{out}(t) = 0 & (1) \\ i_1(t) - i_2(t) = C\dfrac{dv_{out}(t)}{dt} & (2) \\ R_L i_2(t) = V_{out}(t) & (3) \end{cases}$$



$$i_1(t) - i_2(t) = C\frac{dv_{out}(t)}{dt}$$

De (3), $i_2(t) = \frac{V_{out}(t)}{R_L}$. Substituindo em (2) temos:

$$i_1(t) - \frac{V_{out}(t)}{R_L} = C\frac{dv_{out}(t)}{dt} \qquad (4)$$

De (4):

$$i_1(t) = C\frac{dv_{out}(t)}{dt} + \frac{V_{out}(t)}{R_L} \qquad (5)$$

(5)→ (1):

$$-V_{in}(t) + L\frac{d\left\{C\dfrac{dv_{out}(t)}{dt} + \dfrac{V_{out}(t)}{R_L}\right\}}{dt} + V_{out}(t) = 0 \qquad (6)$$

$$-V_{in}(t) + \frac{d\left\{LC\dfrac{dv_{out}(t)}{dt} + \dfrac{L}{R_L}V_{out}(t)\right\}}{dt} + V_{out}(t) = 0 \qquad (7)$$

$$LC\frac{d^2v_{out}(t)}{dt^2} + \frac{L}{R_L}\frac{dV_{out}(t)}{dt} + V_{out}(t) = V_{in}(t) \qquad (8)$$

(b) Conforme Apêndice B do Cap II.2 das notas de aula, sejam:

$$V_{in}(t) = |\mathrm{V_{in}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{in}}}e^{j\omega t} \qquad V_{out}(t) = |\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}e^{j\omega t}$$

Substituindo em (8), temos:

$$LC\frac{d^2|\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}e^{j\omega t}}{dt^2} + \frac{L}{R_L}\frac{d|\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}e^{j\omega t}}{dt} + |\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}e^{j\omega t} = |\mathrm{V_{in}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{in}}}e^{j\omega t}$$

$$LC(j\omega)^2|\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}\cancel{e^{j\omega t}} + \frac{L}{R_L}j\omega|\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}\cancel{e^{j\omega t}} + |\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}\cancel{e^{j\omega t}} = |\mathrm{V_{in}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{in}}}\cancel{e^{j\omega t}}$$

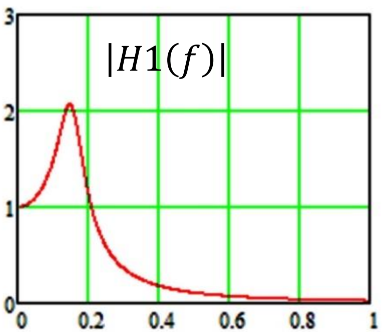
$$H(\omega) = \frac{|\mathrm{V_{out}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{out}}}}{|\mathrm{V_{in}}|e^{j\measuredangle \mathrm{V_{in}}}} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + j\dfrac{\omega L}{R_L}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

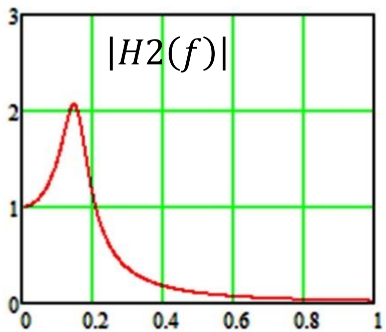
Exemplo – Função de transferência de um circuito elétrico

(c) Plotando as curvas de magnitude $|H1(\omega)|$ e de fase $\sphericalangle H1(\omega)$ da $H(\omega)$ obtida no slide anterior, $\omega = 2\pi f$, na banda 0.01Hz $< f <$ 1.0 Hz, para $L = 1.0\ H, C = 1.0\ F$ e $R_L = 2\Omega$, e comparando com as curvas de magnitude $|H2(\omega)|$ e de fase $\sphericalangle H2(\omega)$ obtidas no item (a) do exemplo no slide 2 do Cap II.2 das notas de aula.

$$H1(\omega) = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + j\,\frac{\omega L}{R_L}} \qquad H2(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{{R_L}^2 - L\left({R_L}^2 C\,\omega^2 + j\,\omega\,R_L\right)}{(R_L\,LC)^2\omega^4 + (L^2 - 2LCR_L)\omega^2 + {R_L}^2}$$

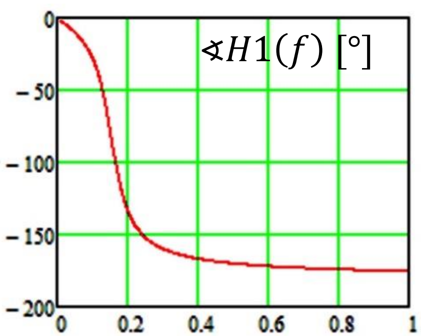


f [Hz]

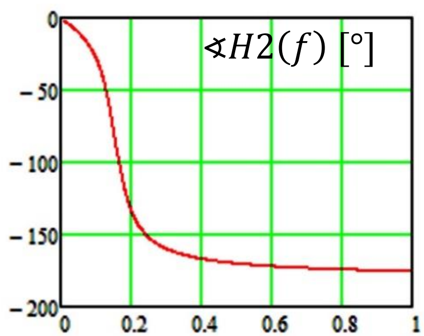


f [Hz]

Note que embora as expressões para $H1(\omega)$ e $H2(\omega)$ tenham formas algébricas distintas, ela são numericamente equivalentes (porque os gráficos de magnitude e fase são idênticos). Portanto $H1(\omega)$ e $H2(\omega)$ são algebricamente equivalentes. Ou seja, a resposta em frequência de um sistema LTI pode ser obtida tanto a partir de sua equação diferencial como também a partir das operações diferenciais de seus elementos (indutor e capacitor, no caso).

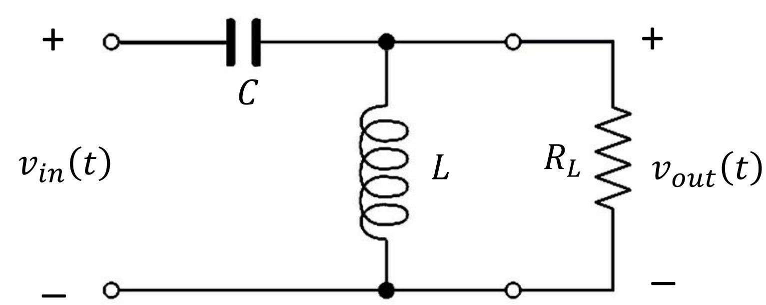


f [Hz]



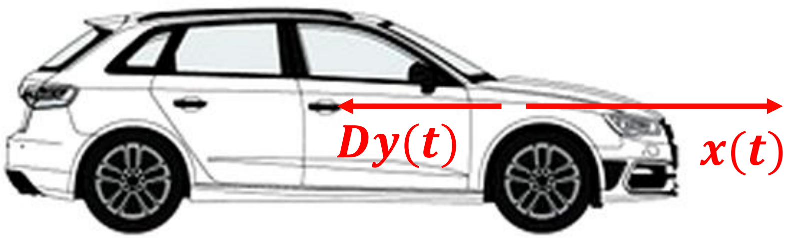
f [Hz]

Homework – Refazer este exemplo, trocando a posição do inductor L e do capacitor C:



Exemplo – Aceleração em sistema mecânico com arrasto aerodinâmico

Exemplo: A figura baixo mostra um sistema LTI mecânico que é regido pela equação $m\frac{dy(t)}{dt} = -Dy(t) + x(t)$.



A equação acima representa a evolução da velocidade $y(t)$ em [m/s] de um carro de massa $m = 1000$ Kg sujeito a uma força aerodinâmica de arrasto proporcional à sua velocidade (na prática a turbulência aerodinâmica que ocorre em alta velocidade é mais tipicamente modelada como sendo proporcional a uma potência p da velocidade do veículo). A relação de proporcionalidade entre a força aerodinâmica de arrasto e a velocidade do veículo é dada pelo termo $-Dy(t)$ na referida equação. A constante de proporcionalidade é D =300 [Ns/m]=[N/(m/s)], sendo $x(t)$ a força de tração em [N] aplicada no carro pelo seu motor através das rodas. De acordo com a lei de Newton, a força resultante da soma das forças $Dy(t)$ e $x(t)$ acelera o carro, com aceleração dada pelo termo $m\frac{dy(t)}{dt}$, o que define a seguinte equação diferencial para o sistema mecânico em questão:

$$1000\frac{dy(t)}{dt} + 300y(t) = x(t) \tag{1}$$

O sinal de entrada é $x(t) = 5000e^{-2t}u(t)$ [N] e representa a força de tração resultante da ação do motorista em que, com o carro inicialmente parado no instante $t = 0$, o motorista pisa no pedal do acelerador neste instante para o carro ganhar velocidade rapidamente e logo em seguida vai rapidamente tirando o pé do pedal porque o carro começa a alcançar a velocidade desejada.

Pede-se: **(a)** Determine a resposta $y(t)$ à excitação $x(t)$, i.e, determine a velocidade $y(t)$ do veículo como consequência da força de tração $x(t)$ dada. **(b)** Plote em um mesmo gráfico a excitação $x(t)$ e a resposta $y(t)$.

Exemplo – Aceleração em sistema mecânico com arrasto aerodinâmico

Solução: (a) Conforme visto na disciplina de equações diferenciais, a equação (1) é um caso particular da equação diferencial geral que estabelece a relação entre a saída $y(t)$ e a entrada $x(t)$ de um sistemas LTI de ordem *N*:

.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \tag{2}$$

e que pode ser expandida para a forma

$$a_N \frac{d^N y(t)}{dt^N} + \cdots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_M \frac{d^M x(t)}{dt^M} + \cdots + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_0 x(t) \tag{3}$$

Assume-se que os coeficientes $\{a_i\}_{i=1}^{i=N}$ e $\{a_j\}_{j=1}^{j=M}$ sejam constantes reais. A ordem N da equação diferencial é definida como a ordem da derivada de maior ordem da saída $y(t)$ presente na equação. Para encontrar uma solução para uma equação diferencial desta forma, é necessário mais informações do que a equação sozinha fornece. Especificamente, é necessário previamente conhecer N condições iniciais (= condições auxiliares) para a saída $y(t)$ e suas derivadas para que se possa determinar uma solução.

Conforme visto na disciplina de equações diferenciais, a solução completa da equação (2) é dada pela soma de duas soluções da equação diferencial:

1- Solução homogênea $\boldsymbol{y_h(t)}$: Solução obtida com o sinal de entrada $x(t)$ zerado. Usualmente denominada de resposta natural do sistema.

2- Solução particular $\boldsymbol{y_p(t)}$: Um sinal de saída que satisfaz a equação diferencial para um dado $x(t)$ aplicado na entrada. Usualmente denominada de resposta forçada do sistema.

A resposta forçada do sistema geralmente tem a mesma forma funcional que o sinal de entrada $x(t)$.

A resposta natural do sistema depende das condições iniciais e da resposta forçada.

Exemplo – Aceleração em sistema mecânico com arrasto aerodinâmico

Conforme discutido no slide anterior, a solução da equação diferencial (1) é uma combinação da resposta natural $y_h(t)$ superposta à resposta forçada $y_p(t)$ à excitação $x(t)$:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) \tag{4}$$

A resposta forçada $y_p(t)$ à excitação $x(t)$ é obtida da solução da equação

$$1000\frac{dy_p(t)}{dt} + 300y_p(t) = x(t) \tag{5a}$$

A resposta natural $y_h(t)$ é obtida da solução da equação homogênea

$$1000\frac{dy_h(t)}{dt} + 300y_h(t) = 0 \tag{5b}$$

Para determinação da resposta forçada $y_p(t)$ para $t \geq 0$ vamos considerar um sinal $y_p(t) = Ce^{-2t}$, que é de mesma forma funcional que $x(t) = 5000e^{-2t}$, notando que o coeficiente $C \in \mathbb{R}$ deve ser determinado. Substituindo $x(t)$ e $y_p(t)$ em (5a) obtemos

$$-2000C\cancel{e^{-2t}} + 300C\cancel{e^{-2t}} = 5000\cancel{e^{-2t}} \tag{6}$$

cuja solução é $C =$ -2.941 , e que, portanto, resulta na resposta forçada p/ $t \geq 0$:

$$y_p(t) = -2.941e^{-2t} \tag{7}$$

A resposta forçada dada por (7) aparentemente indica uma velocidade negativa, isto é, o carro se move para trás – o que não faria sentido. No entanto, para fazer sentido, a resposta completa $y(t) = y_h(t)+ y_p(t)$ precisa ser considerada, e não apenas a resposta forçada $y_p(t)$.

Exemplo – Aceleração em sistema mecânico com arrasto aerodinâmico

Para obtermos a resposta completa $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ precisamos agora determinar a resposta natural $y_h(t)$ do sistema. Uma possível solução para a equação diferencial (5b) é a resposta natural $y_h(t) = Ae^{st}$, porque $\frac{d}{dt} Ae^{st} = sAe^{st}$, o que cancela o termo e^{st} na equação diferencial e a solução passa a ser a solução de uma equação algébrica. Substituindo $y_h(t) = Ae^{st}$ em (5b), temos:

$$0 = 1000Ase^{st} + 300Ae^{st} = A(1000s + 300)e^{st} \qquad (8)$$

que simplifica para a equação algébrica $s + 3 = 0$, cuja solução é $s = -3$. Note que para $s = -3$ a resposta natural $y_h(t) = Ae^{st}$ (ou seja, $y_h(t) = Ae^{-3t}$) é uma solução para a equação homogênea (5b) para qualquer valor de A. A resposta completa $y(t) = y_h(t) + y_p(t)$ p/ $t \geq 0$ é, portanto, dada por:

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = Ae^{-0.3t} - 2.941e^{-2t} \qquad (9)$$

Importante notar que, como ainda não especificamos uma condição inicial para a solução completa $y(t)$ dada por (9), essa resposta não é completamente determinada. Para que $y(t)$ seja completamente determinada é necessário definir o valor de A a partir de uma condição inicial. No presente exemplo, como o carro está inicialmente parado no instante $t = 0$, a velocidade inicial $y(t = 0)$ é nula e, portanto, a condição inicial a ser aplicada em (9) é $y(t = 0) = 0$, de modo que

$$\boldsymbol{y(0) = A - 2.941 = 0} \qquad (10)$$

resultando $A = 2.941$. Substituindo $A = 2.941$ em (9) obtemos a resposta completa para $t \geq 0$:

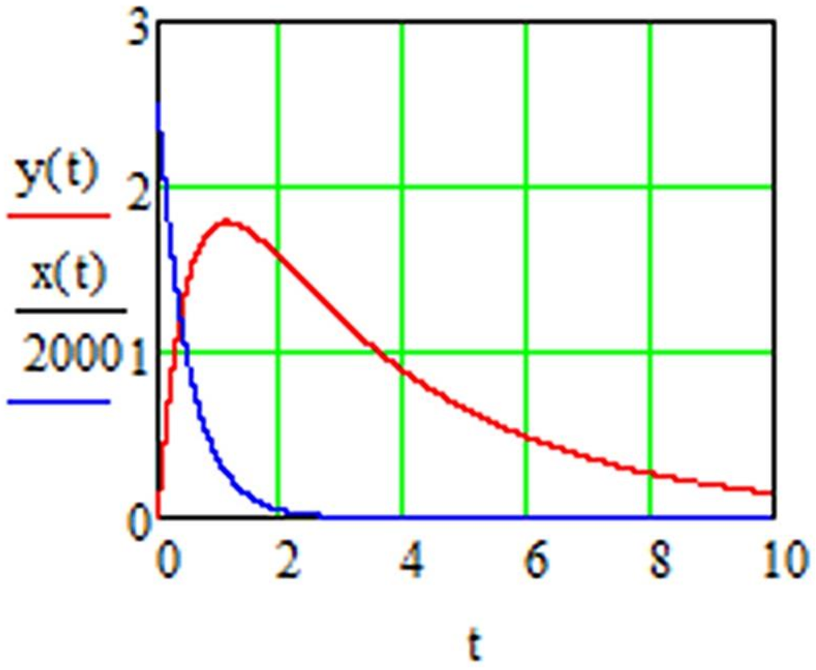
$$y(t) = 2.941(e^{-0.3t} - e^{-2t}) \qquad (11)$$

A resposta completa para $t < 0$ pode ser inferida a partir da condição inicial de repouso em que a velocidade $y(t = 0)$ é nula. Como qualquer sistema fisicamente realizável é causal, isto é, a resposta não pode antecipar a excitação, e como o sistema está inicialmente em repouso, então $y(t < 0) = 0$. Portanto, a resposta completa p/ $-\infty < t < \infty$ é dada por

$$\boldsymbol{y(t) = 2.941\left(e^{-0.3t} - e^{-2t}\right)u(t)} \qquad (12)$$

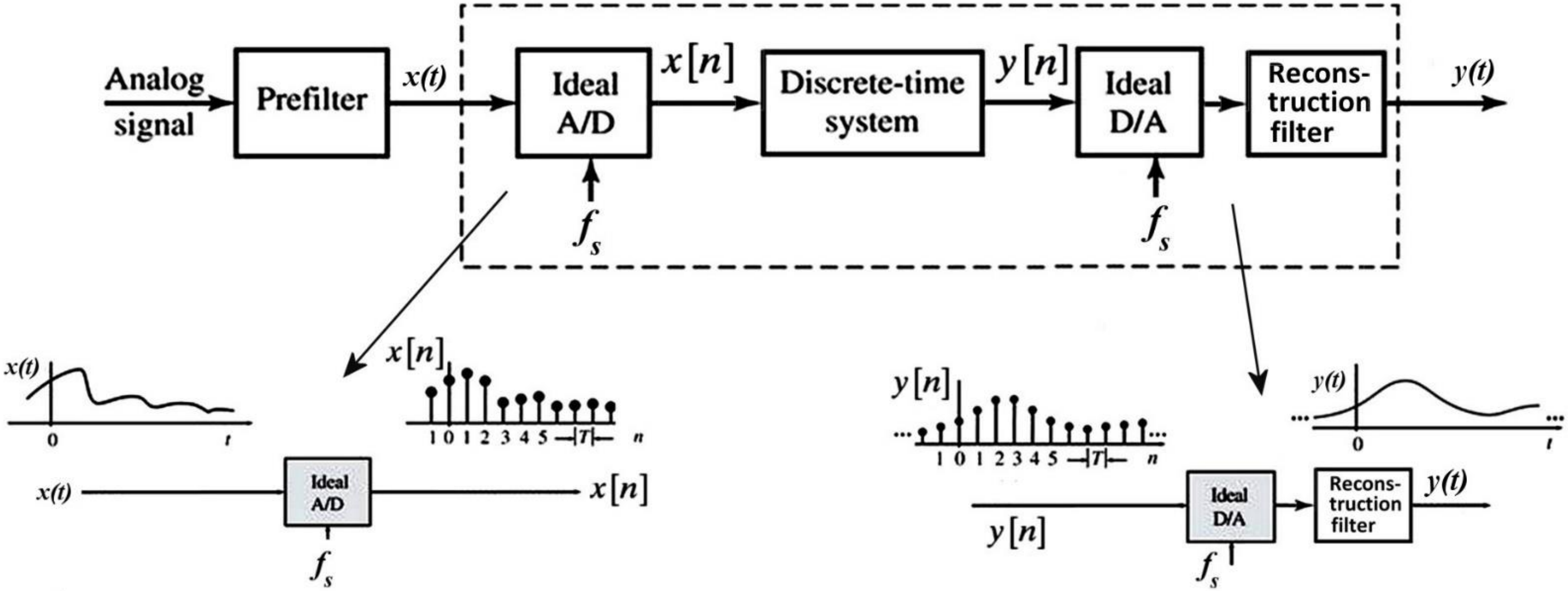
Exemplo – Aceleração em sistema mecânico com arrasto aerodinâmico

(b) Plotando $x(t) = 5000e^{-2t}u(t)$ e $y(t) = 2.941(e^{-0.3t} - e^{-2t})u(t)$ para $0 < t < 10s$



Homework – Refazer este exemplo p/ $x(t) = 2000e^{-1.3t}u(t)$ [N] e D =100 [Ns/m].

Representação de sistemas LTI digitais por equação de diferença



Conforme discutido nos slides anteriores, um sistema LTI analógico (= contínuo no tempo) tem a resposta $y(t)$ relacionada com a excitação $x(t)$ através de uma **equação diferencial**, na qual o valor presente da excitação $x(t)$ e o seu valor futuro $x(t+dt)$, ambos contíguos no tempo, ocorrem separados de um intervalo de tempo infinitesimal $\boldsymbol{dt}$. De mesma forma, o valor presente da resposta $y(t)$ e o seu valor futuro $y(t+dt)$, ambos contíguos no tempo, ocorrem separados de um intervalo de tempo infinitesimal $\boldsymbol{dt}$.

De maneira semelhante, um sistema LTI digital (= discreto no tempo) é um sistema cuja resposta $y[n]$ relaciona-se com a excitação $x[n]$ através de uma **equação de diferença**, na qual o valor presente da excitação $x[n]$ e o seu valor futuro $x[n+1]$, ambos contíguos no tempo, ocorrem separados de um intervalo de tempo $\boldsymbol{T_s = 1/f_s}$, sendo f_s a frequência de amostragem do sistema. De mesma forma, o valor presente da resposta $y[n]$ e o seu valor futuro $y[n+1]$, ambos contíguos no tempo, ocorrem separados de um intervalo de tempo $\boldsymbol{T_s = 1/f_s}$.

Evidentemente o intervalo de tempo infinitesimal $\boldsymbol{dt}$ é muitíssimo menor que o intervalo de tempo $\boldsymbol{T_s = 1/f_s}$.

Representação de sistemas LTI digitais por equação de diferença

A equação de diferença que estabelece a relação entre a saída $y[n]$ e a entrada $x[n]$ de um sistema digital LTI de ordem N é da seguinte forma geral:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \tag{13}$$

que pode ser expandida para a forma:

$$a_N y[n-N] + \cdots + a_1 y[n-1] + a_0 y[n] = b_M x[n-M] + \cdots + b_1 x[n-1] + b_0 x[n] \tag{14}$$

Assume-se que os coeficientes $\{a_i\}_{i=1}^{i=N}$ e $\{a_j\}_{j=1}^{j=M}$ sejam constantes reais. A ordem N da equação de diferença é definida como o maior atraso de tempo da saída $y[n]$ presente na equação. Para encontrar uma solução para uma equação de diferença desta forma, é necessário mais informações do que a equação sozinha fornece. Especificamente, para que se possa determinar uma solução, é necessário previamente conhecer N condições iniciais (= condições auxiliares) para a saída $y[n]$, i.e., é necessário conhecer os N valores passados de $y[n]$.

Uma solução geral para a equação (13) pode ser expressa como a superposição de uma solução $y_h[n]$ homogênea (=resposta natural) da equação $\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = 0$ somada com uma solução $y_p[n]$ particular (=resposta forçada), de maneira semelhante à solução de uma equação diferencial, conforme discutido nos slides anteriores para sistemas analógicos:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \tag{15}$$

Como qualquer sistema fisicamente realizável é causal, e como a resposta $y[n]$ de um sistema causal não pode antecipar a excitação $x[n]$, então se $x[n] = 0 \;\; \forall n < n_0$ implica que $y[n] = 0 \;\; \forall n < n_0$.

Solução da equação de diferença de sistemas LTI - exemplo

Exemplo: A transmitância de um determinado sistema digital é dada pela equação de diferença de primeira ordem mostrada abaixo. Determine a solução para esta equação de diferença sabendo que todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$.

$$y[n] + 0.5y[n-1] = (-0.8)^n u[n] \tag{16}$$

Solução:

A solução é composta por uma solução $y_h[n]$ homogênea (resposta natural) superposta a uma solução $y_p[n]$ particular (resposta forçada), seguindo o mesmo procedimento adotado nos slides anteriores para sistemas analógicos:

$$y[n] = y_h[n] + y_p[n] \tag{17}$$

onde a solução particular $y_p[n]$ satisfaz (16) para $n \geq 0$ e a solução homogênea $y_h[n]$ satisfaz

$$y_h[n] + 0.5y_h[n-1] = 0 \tag{18}$$

A solução particular $y_p[n]$ para $n \geq 0$ tem a mesma forma funcional que a excitação $x[n]$, i.e., $y_p[n] = Y(-0.8)^n$, com a constante Y a ser determinada. Então temos:

$$\begin{aligned} & Y\cancel{(-0.8)^n} + 0.5Y\cancel{(-0.8)^{n-1}} = \cancel{(-0.8)^n} \\ & \Leftrightarrow \\ & Y\left[1 + 0.5(-0.8)^{-1}\right] = 1 \\ & Y = \frac{8}{3} \end{aligned} \tag{19}$$

Portanto, $y_p[n]$ resulta em

$$y_p[n] = \frac{8}{3}(-0.8)^n \tag{20}$$

Solução da equação de diferença de sistemas LTI - exemplo

Para obtermos a resposta completa $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ precisamos agora determinar a resposta natural $y_h[n]$ do sistema. Uma possível solução para a equação de diferença homogênea (18) é a resposta natural $y_h[n] = Az^n$, porque um deslocamento de d amostras no tempo discreto em $y_h[n]$ resulta $y_h[n-d] = Az^{n-d} = Az^{-d}z^n$, o que cancela o termo z^n na equação de diferença e a solução passa a ser a solução de uma equação algébrica. Substituindo $y_h[n] = Az^n$ em (18), temos:

$$
\begin{aligned}
&A\cancel{z^n} + 0.5A\cancel{z^{n-1}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \\
&1 + 0.5z^{-1} = 0 \\
&z = -0.5
\end{aligned}
\qquad (21)
$$

Note que para $z = -0.5$ a resposta natural $y_h[n] = Az^n$ (ou seja, $y_h[n] = A(-0.5)^n$) é uma solução para a equação homogênea (18) para qualquer valor de A. A resposta completa $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ é, portanto, dada por:

$$
y[n] = y_h[n] + y_p[n] = A(-0.5)^n + \frac{8}{3}(-0.8)^n \qquad (22)
$$

A condição inicial dada no enunciado estabelece que todos os sinais deste sistema são zerados para $n < 0$. Esta condição inicial implica que $y[n] = 0$ p/ $n < 0$, e que, consequentemente, $y[-1] = 0$. Mas, para determinar a constante A em (22) precisamos usar uma condição inicial válida no momento em que exista a resposta forçada, isto é, para $n \geq 0$, e portanto a condição inicial $y[-1] = 0$ não se aplica diretamente. Especificamente, precisamos da condição inicial $y[0]$ que pode ser obtida da condição inicial $y[-1] = 0$ aplicando-se um processo de recursão à equação de diferença (16). Primeiramente isola-se $y[n]$ em (16) e efetua-se a recursão partindo de $n = 0$:

$$
\begin{aligned}
&y[n] = -0.5y[n-1] + (-0.8)^n u[n] \\
&n = 0: \quad y[0] = -0.5y[-1] + (-0.8)^0 = 0 + 1 = 1
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

Note que este processo recursivo vale para sistemas de ordem superior. Por exemplo, a resposta de um sistema de segunda ordem inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$) satisfaz as condições $y[-2] = y[-1] = 0$, mas $y[0]$ e $y[1]$ devem ser computados recursivamente e usados como novas condições iniciais para obtermos os coeficientes corretos na resposta homogênea.

Solução da equação de diferença de sistemas LTI - exemplo

De posse da condição inicial $y[0] = 1$ obtida em (23), a constante A de (22) é determinada substituindo em (22) a condição $y[0] = 1$ para o instante $n = 0$:

$$y[0] = 1 = A(-0.5)^0 + \frac{8}{3}(-0.8)^0 = A + \frac{8}{3} \qquad (24)$$

$$\Rightarrow A = -\frac{5}{3}$$

Portanto, a solução completa é obtida substituindo em (22) a constante A obtida em (24):

$$y[n] = -\frac{5}{3}(-0.5)^n u[n] + \frac{8}{3}(-0.8)^n u[n] \qquad (25)$$

Homework – Substitua (25) em (16) e verifique se (25) é solução de (16).

Para sistema LTI digitais, em que o domínio tempo é discreto, é possível alternativamente determinar a solução completa $y[n]$ através de um processo recursivo aplicado à equação (13). Para tanto, a equação (13) é rearranjada de modo que que todos os termos sejam trazidos para o lado direito, exceto $y[n]$:

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right) \tag{26}$$

Suponha que o sistema esteja inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$) e que $x[n]$ seja uma sequência de valores não nulos começando em $n = 0$. Neste contexto, a condição de repouso inicial implica que $y\,[-1] = y\,[-2] = \cdots = y\,[-N] = 0$, e pode-se utilizar (26) para determinar $y[n]$ recursivamente. Esta é uma das possíveis maneiras de implementar filtros digitais em um processador.

Solução recursiva da equação de diferença de sistemas LTI - exemplo

Exemplo: A transmitância de um determinado sistema digital é dada pela equação de diferença de segunda ordem mostrada abaixo. Determine a resposta $y[n]$ à excitação $x[n] = \delta[n]$ (resposta ao impulso) deste sistema através da **solução recursiva** da equação de diferença. Sabe-se que o sistema está inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$).

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=3x[n]-2x[n-1] \tag{27}$$

Solução: Passando o segundo e o terceiro termos no lado esquerdo de (27) para o lado direito obtemos a forma recursiva da equação da diferença:

$$y[n]=\frac{5}{6}y[n-1]-\frac{1}{6}y[n-2]+3x[n]-2x[n-1] \tag{28}$$

Conforme dado no enunciado, o sistema está inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$), então $y\,[-2] = y\,[-1] = 0$. Dado que a entrada $x[n]$ é um impulso $\delta[n]$ o processo recursivo aplicado à (28) resulta em:

$$\begin{aligned}
y[0] &= \frac{5}{6}y[-1]-\frac{1}{6}y[-2]+3x[0]-2x[-1] \\
&= \frac{5}{6}(0)-\frac{1}{6}(0)+3(1)-2(0)=3 \\
y[1] &= \frac{5}{6}y[0]-\frac{1}{6}y[-1]+3x[1]-2x[0] \\
&= \frac{5}{6}(3)-\frac{1}{6}(0)+3(0)-2(1)=\frac{1}{2} \\
y[2] &= \frac{5}{6}y[1]-\frac{1}{6}y[0]+3x[2]-2x[1] \\
&= \frac{5}{6}(\frac{1}{2})-\frac{1}{6}(3)+3(0)-2(0)=-\frac{1}{12} \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{29}$$

Solução recursiva da equação de diferença de sistemas LTI - pseudocódigo

O pseudocódigo abaixo determina recursivamente a resposta $y[n]$ da equação de diferença de 2ª ordem $a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]$ para $x[n] = \delta[n]$ e para a condição inicial em que todos os sinais são zerados para $n < 0$. Ns é o número de amostras a serem geradas na resposta $y[n]$.

```
SecOrdDiffEqImpResp(a0,a1,a2,b0,b1,Ns) := | yn_1 ← 0
                                          | yn_2 ← 0          condição inicial
                                          | xn_1 ← 0
                                          | xn ← 0
                                          | for k ∈ 0..Ns − 1
                                          |    | x_k ← 0      - inicializa sequencia de entrada (no caso, um
                                          |    | y_k ← 0        impulso em n = 0, mas pode ser qualquer excitação)
                                          | x_0 ← 1          -Inicializa sequencia de saída (zerada ∀n )
                                          | for k ∈ 0..Ns − 1
                                          |    | xn ← x_k
                                          |    | yn ← (1/a0)·(−a1·yn_1 − a2·yn_2 + b0·xn + b1·xn_1)
                                          |    | y_k ← yn      recursão
                                          |    | yn_2 ← yn_1
                                          |    | yn_1 ← yn
                                          |    | xn_1 ← xn
                                          | return y
```

Solução recursiva da equação de diferença de sistemas LTI - pseudocódigo

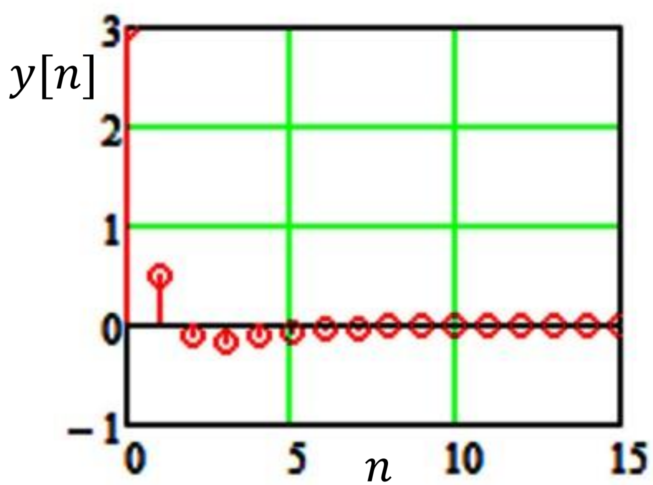
Exemplo: A transmitância de um determinado sistema digital é dada pela equação de diferença de segunda ordem mostrada abaixo (mesma do exemplo do slide 16). Utilizando o pseudocódigo SecOrdDiffEqImpResp(a0,a1,a2,b0,b1,Ns) apresentado no slide anterior determine e plote as Ns=16 primeiras amostras da resposta $y[n]$ à excitação $x[n] = \delta[n]$ (resposta ao impulso). Sabe-se que o sistema está inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$).

$$y[n]-\frac{5}{6}y[n-1]+\frac{1}{6}y[n-2]=3x[n]-2x[n-1]$$

Solução: $$\boldsymbol{a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]}$$

$$\mathbf{a0 := 1 \quad a1 := \frac{-5}{6} \quad a2 := \frac{1}{6} \quad b0 := 3 \quad b1 := -2 \quad Ns := 16}$$

$$y = \mathrm{SecOrdDiffEqImpResp(a0, a1, a2, b0, b1, Ns)}$$



Solução recursiva da equação de diferença de sistemas LTI - pseudocódigo

Exemplo: A transmitância de um determinado sistema digital é dada pela equação de diferença de segunda ordem mostrada abaixo. Utilizando o pseudocódigo SecOrdDiffEqImpResp(a0,a1,a2,b0,b1,Ns) determine e plote as primeiras Ns=50 amostras da resposta $y[n]$ à excitação $x[n] = \delta[n]$ (resposta ao impulso). Sabe-se que o sistema está inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$).

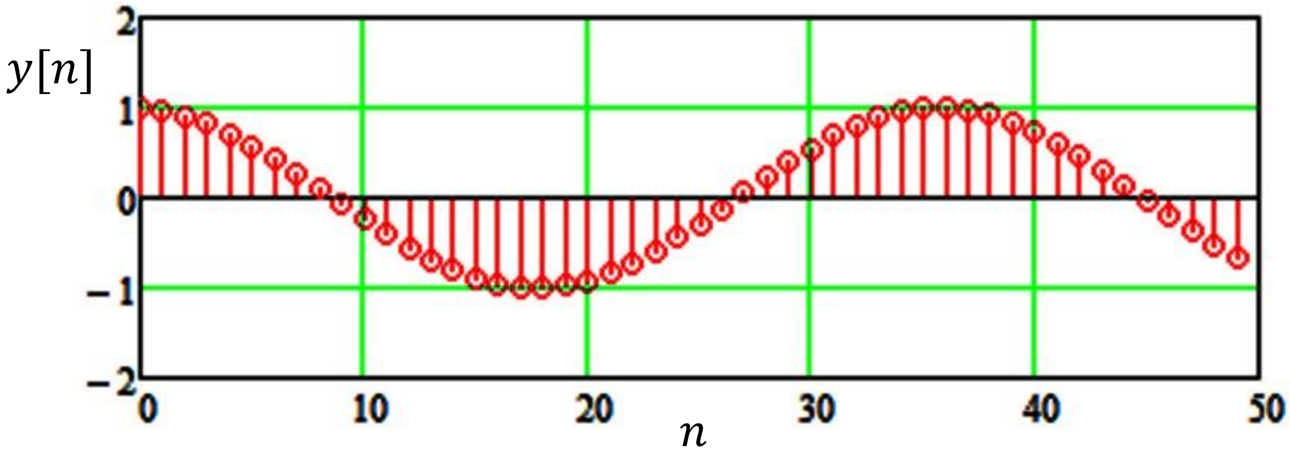
$$\boldsymbol{y[n] - 1.97y[n-1] + y[n-2] = x[n] - x[n-1]}$$

Solução:

$$\boldsymbol{a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]}$$

a0 := 1   a1 := −1.97   a2 := 1   b0 := 1   b1 := −1   Ns := 50

y = SecOrdDiffEqImpResp(a0, a1, a2, b0, b1, Ns)



Solução recursiva da equação de diferença de sistemas LTI - pseudocódigo

Exemplo: A transmitância de um determinado sistema digital é dada pela equação de diferença de segunda ordem mostrada abaixo. Utilizando o pseudocódigo SecOrdDiffEqImpResp(a0,a1,a2,b0,b1,Ns) determine e plote as primeiras Ns=50 amostras da resposta $y[n]$ à excitação $x[n] = \delta[n]$ (resposta ao impulso). Sabe-se que o sistema está inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$).

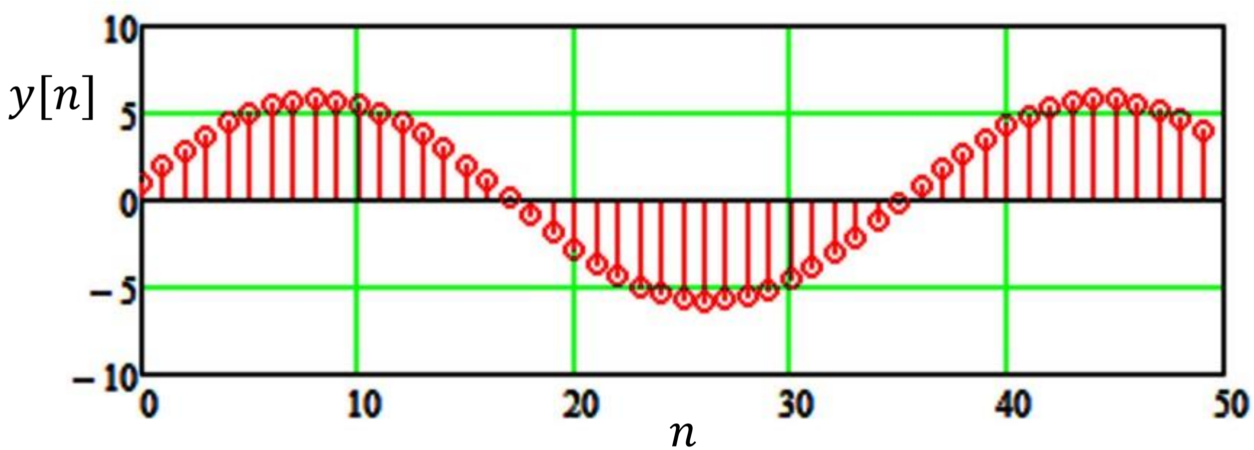
$$\boldsymbol{y[n] - 1.97y[n-1] + y[n-2] = x[n]}$$

Solução:

$$\boldsymbol{a_0 y[n] + a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1]}$$

a0 := 1 a1 := −1.97 a2 := 1.0 b0 := 1 b1 := 0 Ns := 50

y = SecOrdDiffEqImpResp(a0, a1, a2, b0, b1, Ns)



Observe que todo sistema é LTI é completamente determinado por sua resposta ao impulso. Assim, a resposta ao impulso unitário que obtivemos numericamente por recursão nos exemplos anteriores é na verdade a resposta ao impulso do sistema. Note também que o processo recursivo é válido pata qualquer excitação $x[n]$, e não apenas para uma excitação impulsiva $\delta[n]$.

Homework

```
%%  diffsysr.m - response of a difference system by recursion
% time samples
n=0:1:15;
% input signal
x=[1 zeros(1,length(n)-1)];
y=zeros(1,length(n));
% initial condition
yn_1=0;
yn_2=0;
xn_1=0;
xn=0;
% recursion
for k=1:length(n)
xn=x(k);
yn=(5/6)*yn_1-(1/6)*yn_2+3*xn-2*xn_1;
y(k)=yn;
yn_2=yn_1;
yn_1=yn;
xn_1=xn;
end
% plot output y
stem(n,y)
```

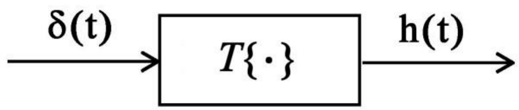
O script diffsysr.m para Matlab ao lado especificamente implementa o processo recursivo para a solução da equação de diferença do exemplo do slide 16. Adapte este script para a solução da equação de diferença

$$\boldsymbol{y[n] - 1.97y[n-1] + y[n-2] = x[n] - 0.7\,x[n-1]}$$

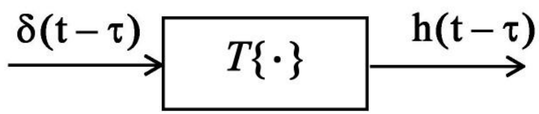
Plote as primeiras 50 amostras da resposta $y[n]$ à excitação $x[n] = \delta[n]$ (resposta ao impulso). Sabe-se que o sistema está inicialmente em repouso (= todos os sinais do sistema são zerados para $n < 0$).

Convolução

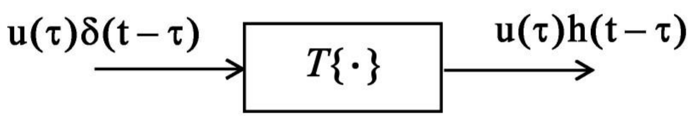
Consideremos um sistema LTI com transmitância $T[\cdot]$ conforme mostra a figura abaixo, cuja excitação aplicada à sua entrada é o impulso unitário $\delta(\mathrm{t})$ e cuja resposta $\mathrm{h(t)}$ resultante em sua saída é a resposta ao impulso do sistema.



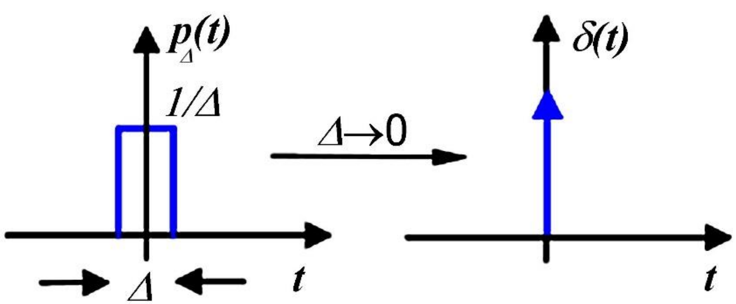
Como o sistema é LTI, a um atraso temporal τ na excitação corresponde um atraso temporal τ na resposta:



A seguir, consideremos qualquer excitação genérica $\mathrm{u(t)}$ cuja amplitude no instante $\mathrm{t} = \tau$ seja $\mathrm{u}(\tau)$, e vamos fazer com que o valor $\mathrm{u}(\tau)$ multiplique a amplitude do impulso $\delta(\mathrm{t} - \tau)$ aplicado na entrada do sistema, conforme mostra a figura abaixo. Como o sistema é LTI, a amplitude da resposta $\mathrm{h}(\mathrm{t} - \tau)$ será multiplicada pelo mesmo fator $\mathrm{u}(\tau)$ que multiplica a entrada $\delta(\mathrm{t} - \tau)$, conforme indica a figura:



Antes de prosseguir na definição da operação de convolução, é necessário recordar do Cap I das notas de aula que a função impulso unitário é definida pelo limite da função pulso retangular normalizado, i.e., $\delta(t) = \lim\limits_{\Delta \to 0} P_\Delta(t)$:



Note que a área sob a função $P_\Delta(t)$ é unitária, e, portanto, a área sob a função $\delta(t)$ também é unitária.

Note ainda que a função $P_\Delta(t)$ é uma função par, i.e., $P_\Delta(t) = P_\Delta(-t)$. Portanto a função $\delta(t)$ também será par, i.e., $\delta(t) = \delta(-t)$.

Convolucão

$$u(\tau)\delta(t-\tau) \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow u(\tau)h(t-\tau)$$

Prosseguindo na definição da operação de convolução, vamos agora multiplicar os sinais na entrada e na saída do sistema na figura acima pelo diferencial $d\tau$ e vamos integrar os sinais (=superpor inúmeros sinais no tempo) na entrada e na saída no intervalo $-\infty < \tau < \infty$, conforme mostra a figura abaixo. Como o sistema é LTI, é válido superpor (integrar) inúmeros sinais na entrada, o que resulta numa superposição de inúmeras respectivas respostas na saída. Usando o fato de que a função impulso é par e, portanto, $\delta(t-\tau) = \delta(\tau - t)$, obtemos duas possíveis integrais equivalentes na entrada do sistema conforme indica a figura:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(\tau-t)d\tau \end{array}\right\} \longrightarrow \boxed{T\{\cdot\}} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau \\[2ex] \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau \end{array}\right.$$

A entrada $\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ resulta na saída $\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau$ que pode ser colocada na forma $\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$ porque é indiferente no integrando da integral "espelhar" $h(\cdot)$ no eixo τ e "deslizar" a imagem espelhada de $h(\cdot)$ e deslocada de t sobre $u(\cdot)$ ou equivalentemente "espelhar" $u(\cdot)$ no eixo τ e "deslizar" a imagem espelhada de $u(\cdot)$ e deslocada de t sobre $h(\cdot)$.

Note em $\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)d\tau$ que em um único instante $\tau = t$ o impulso $\delta(t-\tau)$ assume valor não nulo, e neste único instante a integral calcula a área sob a função $\delta(t-\tau)$, área que resulta unitária pela definição da função impulso. Mas a área unitária calculada pela integral no instante $\tau = t$ é multiplicada por $u(\tau = t)$ no integrando da integral neste instante, de onde se infere que o resultado da integral é $u(\tau)$.

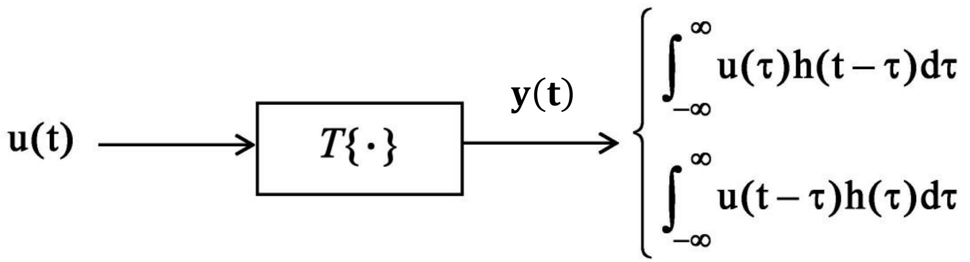
Mesma análise pode ser feita para $\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(\tau-t)d\tau$ de onde se infere que o resultado desta integral também é $u(\tau)$.

Convolução

Ambas as integrais são calculadas no único instante $\tau = t$ e resultam em $\mathrm{u}(\tau)$, portanto $\mathrm{u}(\tau) = \mathrm{u}(t)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\tau)\delta(\mathrm{t}-\tau)d\tau = \mathrm{u}(\tau) = \mathrm{u}(\mathrm{t}) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\tau)\delta(\tau-\mathrm{t})d\tau = \mathrm{u}(\tau) = \mathrm{u}(\mathrm{t})$$

Desta maneira, a representação do sistema LTI com transmitância $T[\cdot]$ simplifica-se para:



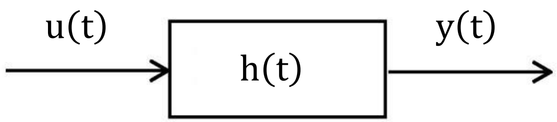
Note que a resposta $\mathrm{y}(t)$ à excitação $\mathrm{u}(t)$ é tanto dada pela integral $\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\tau)\mathrm{h}(\mathrm{t}-\tau)d\tau$ como pela integral

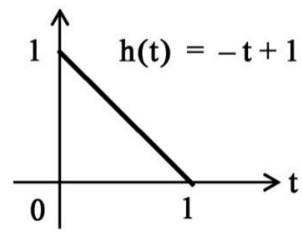
$\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{h}(\tau)d\tau$. Cada uma destas integrais é denominada de **integral de convolução**. (30)

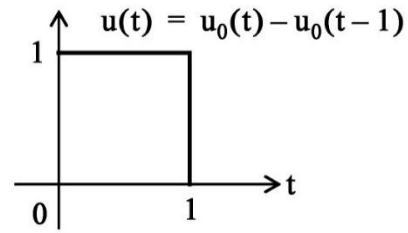
A integral de convolução estabelece que, **se conhecermos a resposta ao impulso $\mathrm{h}(t)$ de um sistema LTI, podemos determinar a resposta $\mathrm{y}(t)$ do sistema a qualquer entrada $\mathrm{u}(t)$ usando qualquer uma das integrais acima especificadas.** A integral de convolução é representada como $\mathrm{y}(t) = \mathrm{u}(t) * \mathrm{h}(t) = \mathrm{h}(t) * \mathrm{u}(t)$, onde o operador "$*$" denota a operação de convolução.

Convolução - Exemplo

Exemplo: Um sistema LTI possui resposta ao impulso $h(t)$ conforme figura abaixo. É aplicado em sua entrada um pulso de excitação $u(t)$, conforme figura, sendo $u_0(t)$ a função degrau unitário. Determine e plote a resposta $y(t)$ à excitação $u(t)$.



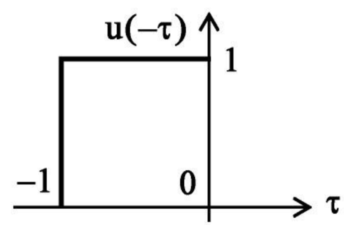




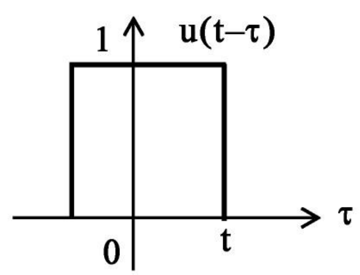
Solução:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau \qquad (31)$$

onde τ é uma variável factícia representativa do tempo t de modo que $u(\tau)$ e $h(\tau)$ podem ser considerados equivalentes à $u(t)$ e $h(t)$. Para executar a integral (31) é necessário formar $u(t-\tau)$. Para tanto, primeiramente construímos graficamente a imagem de $u(\tau)$ espelhada com referência à origem, i.e. primeiramente representamos graficamente a função $u(-\tau)$ conforme mostra a figura abaixo:

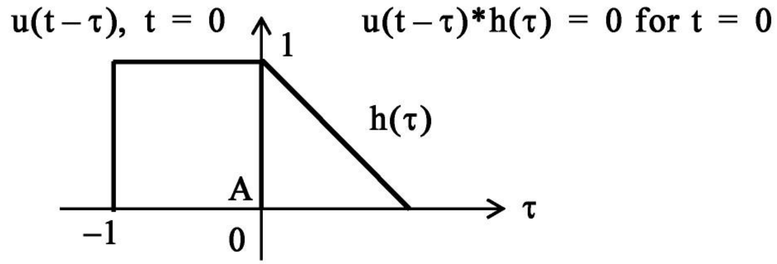


A seguir formamos $u(t-\tau)$ deslocando $u(-\tau)$ ao longo do eixo τ de um deslocamento t à direita conforme mostra a figura abaixo:

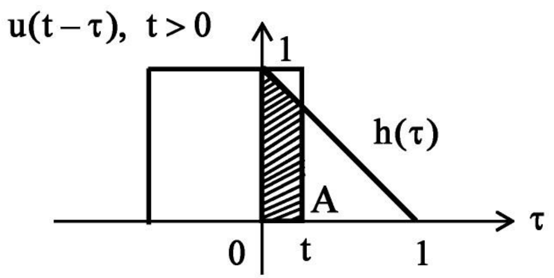


Convolução - Exemplo

A execução da integral de convolução (31) $y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau$ implica na multiplicação de $u(t-\tau)$ por $h(\tau)$ para cada valor do deslocamento t. Para cada valor de t a integral calcula a área sob a curva que resulta do produto de $u(t-\tau)$ por $h(\tau)$ sendo a área calculada ao longo de todo o eixo τ, i.e., para $-\infty < \tau < \infty$. A figura abaixo mostra o resultado do produto de $u(t-\tau)$ por $h(\tau)$ para um deslocamento $t = 0$. Note que $u(t-\tau)$ e $h(\tau)$ não se superpõem (= são disjuntos no tempo) para um deslocamento $t = 0$, porque à borda de descida de $u(t-\tau)$ no ponto A não coincide com a borda de subida de $h(\tau)$ neste ponto. Então o resultado do produto é nulo, a área é nula e o resultado da integral é nulo.

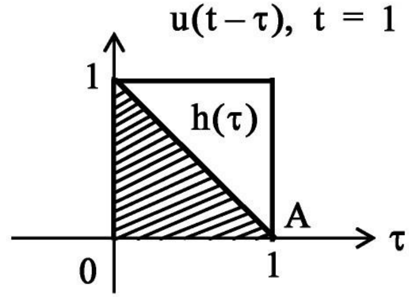


No entanto, à medida que o deslocamento $t > 0$ aumenta, a borda de descida de $u(t-\tau)$ no ponto A se desloca para a direita e a área sob a curva que resulta do produto de $u(t-\tau)$ por $h(\tau)$ não resulta mais nula, conforme mostra a área hachurada na figura abaixo. Note que a área aumenta à medida que o ponto A se desloca para a direita, como consequência do aumento da superposição entre $u(t-\tau)$ e $h(\tau)$.



Convolução - Exemplo

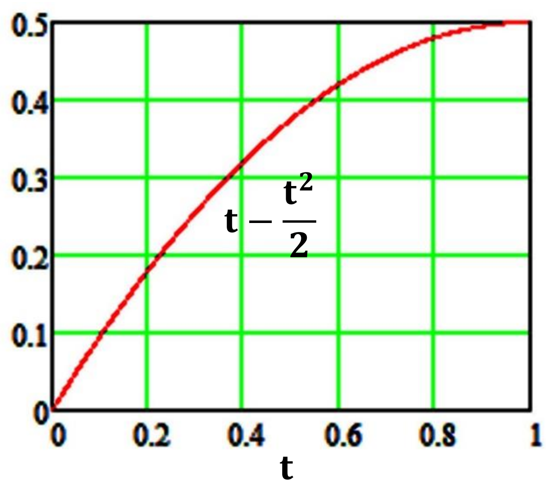
O máximo da área ocorre para $t = 1$, quando $\mathrm{u}(\mathrm{t} - \tau)$ e $\mathrm{h}(\tau)$ estão totalmente superpostos, conforme mostra a figura abaixo:



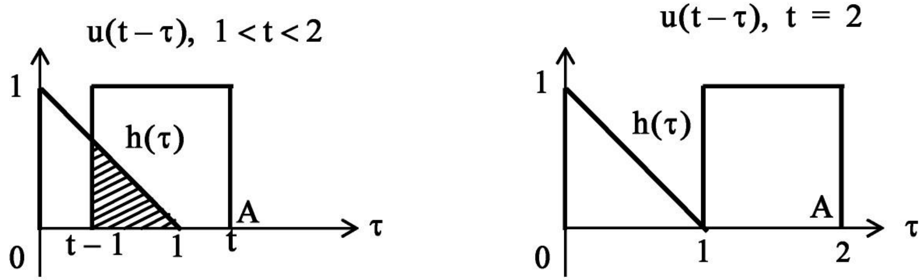
Usando a integral de convolução (31) $\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{h}(\mathrm{t}) * \mathrm{u}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\mathrm{t} - \tau)\mathrm{h}(\tau)\mathrm{d}\tau$, podemos especificamente determinar a área resultante (i.e., o resultado de $\mathrm{h}(\mathrm{t}) * \mathrm{u}(\mathrm{t})$) em função do deslocamento t no intervalo $0 < \mathrm{t} < 1$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} (1)(-\tau+1)d\tau = \tau - \frac{\tau^2}{2}\bigg|_{0}^{t} = t - \frac{t^2}{2} \qquad (32)$$

$\mathbf{y}(\mathbf{t}) = \mathbf{h}(\mathbf{t}) * \mathbf{u}(\mathbf{t})$



A medida que se continua deslocando $\mathrm{u}(\mathrm{t}-\tau)$ à direita, para além de $t=1$, a área resultante começa a decrescer caindo para zero para $t \geq 2$ conforme indica a figura:

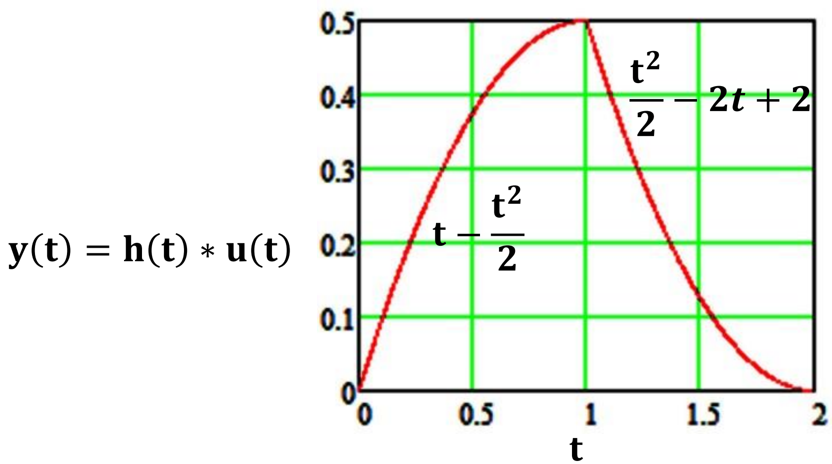


(33)

Usando a integral de convolução (31) $\mathrm{y}(\mathrm{t}) = \mathrm{h}(\mathrm{t}) * \mathrm{u}(\mathrm{t}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{u}(\mathrm{t}-\tau)\mathrm{h}(\tau)\mathrm{d}\tau$, podemos especificamente determinar a área resultante (i.e., o resultado de $\mathrm{h}(\mathrm{t}) * \mathrm{u}(\mathrm{t})$) em função do deslocamento t no intervalo $1 < \mathrm{t} < 2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t-1}^{1} u(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t-1}^{1} (1)(-\tau+1)d\tau = \tau - \frac{\tau^2}{2}\bigg|_{t-1}^{1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - (t-1) + \frac{t^2 - 2t + 1}{2} = \frac{t^2}{2} - 2t + 2$$

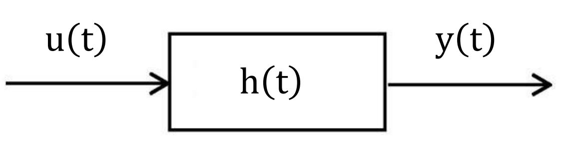


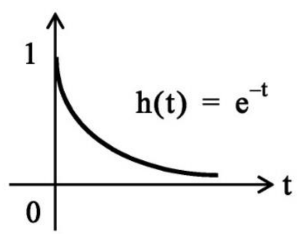
Propriedades da integral de convolução

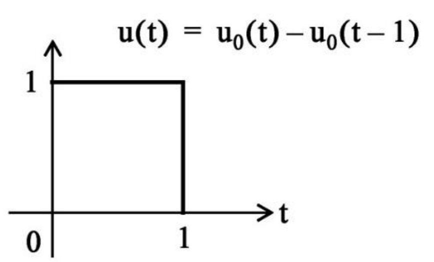
Commutativity	$x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$
Associativity	$(x(t) * y(t)) * z(t) = x(t) * (y(t) * z(t))$
Distributivity	$(x(t) + y(t)) * z(t) = x(t) * z(t) + y(t) * z(t)$
If $y(t) = x(t) * h(t)$, then	
Differentiation Property	$y'(t) = x'(t) * h(t) = x(t) * h'(t)$
Area Property	Area of y $=$ (Area of x) $\times$ (Area of h)
Scaling Property	$y(at) = \|a\| \; x(at) * h(at)$

Homework

Um sistema LTI possui resposta ao impulso $h(t)$ conforme figura abaixo. É aplicado em sua entrada um pulso de excitação $u(t)$, conforme figura, sendo $u_0(t)$ a função degrau unitário. Determine e plote a resposta $y(t)$ à excitação $u(t)$.







Convolução discreta

Para o caso de um sistema digital a integral de convolução torna-se um somatório discreto no tempo:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

- Na operação de convolução $y[n] = x[n] * h[n]$, o n-ésimo valor da sequência de saída $y[n]$ é obtido multiplicando a sequência de entrada $x[k]$, expressa em função de k, pela sequência $h[n-k]$, que é a sequência $h[k]$ espelhada no eixo k com relação à origem e deslocada de n, com k variando no intervalo $-\infty < k < \infty$.

- O primeiro passo é obter a sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, para todos os valores de n de interesse.

- A sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, é obtida "espelhando" $h[k]$ com referência a origem, para obter $h[-k]$, e deslocando de n amostras ao longo do eixo k a sequência espelhada $h[-k]$ até que a borda de descida de $h[-k]$ se superponha à borda de subida de $x[k]$.

- A seguir, as sequências $x[k]$ e $h[n-k]$ são multiplicadas para $-\infty < k < \infty$, e os produtos são somados para computar a amostra $y[n]$ da sequência de saída válida para o deslocamento n.

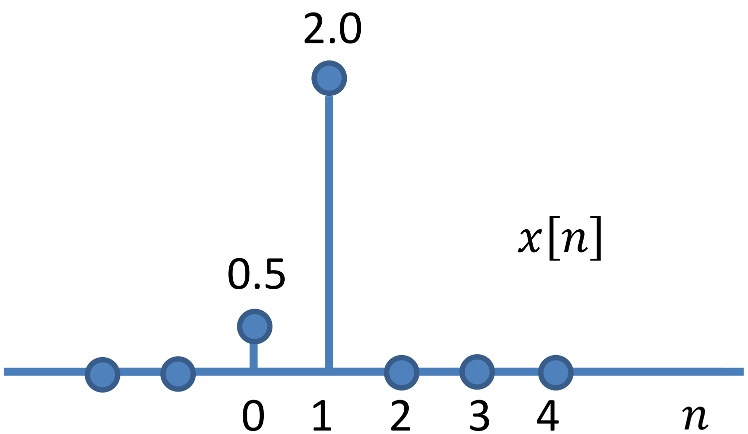
- Para obter a próxima amostra $y[n+1]$ da sequência de saída, desloca-se de $n+1$ (à direita, portanto) amostras a sequência espelhada $h[-k]$ e o processo é repetido até que $x[k]$ e $h[n-k]$ sejam disjuntos (= sem superposição) no tempo.

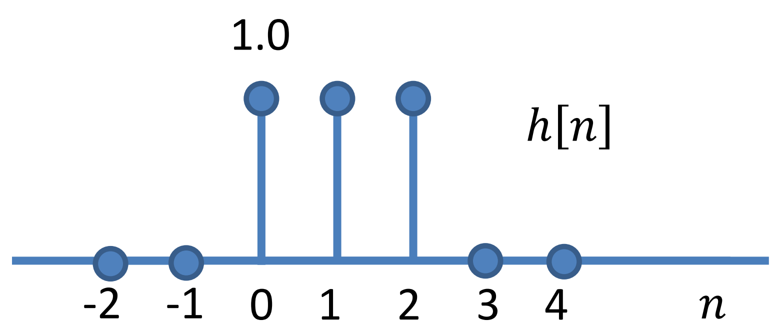
Convolução discreta - exemplo

Exemplo: Execute a convolução entre as sequências $x[n]$ e $y[n]$ a seguir descritas.

$$x[n] = \begin{cases} 0.5, & n = 0 \\ 2.0, & n = 1 \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$

$$h[n] = \begin{cases} 1, & n = 0, 1\ e\ 2 \\ 0, caso\ contrário. \end{cases}$$



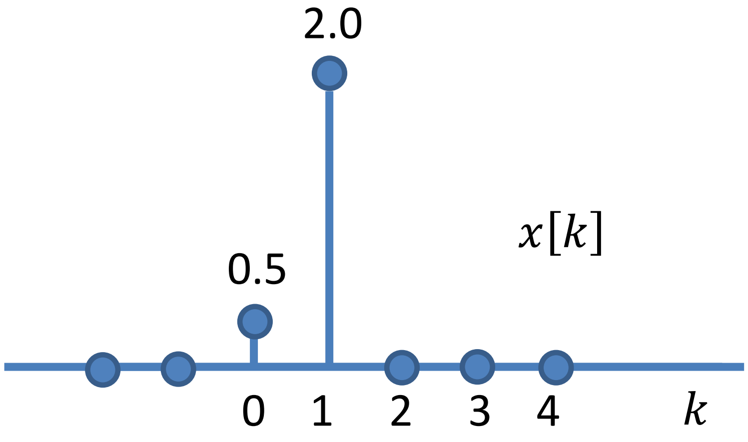


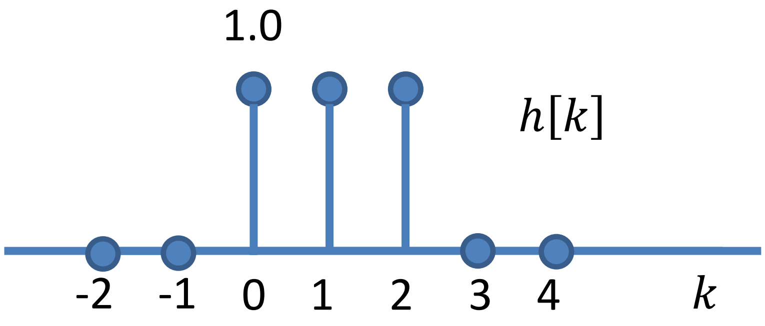
Convolução discreta - exemplo

Solução:

Na operação de convolução $y[n] = x[n] * h[n]$, o n-ésimo valor da sequência de saída $y[n]$ é obtido multiplicando a sequência de entrada $x[k]$, expressa em função de k, pela sequência $h[n-k]$ que é a sequência $h[k]$ espelhada no eixo k com relação à origem e deslocada de n amostras, com k variando no intervalo $-\infty < k < \infty$.

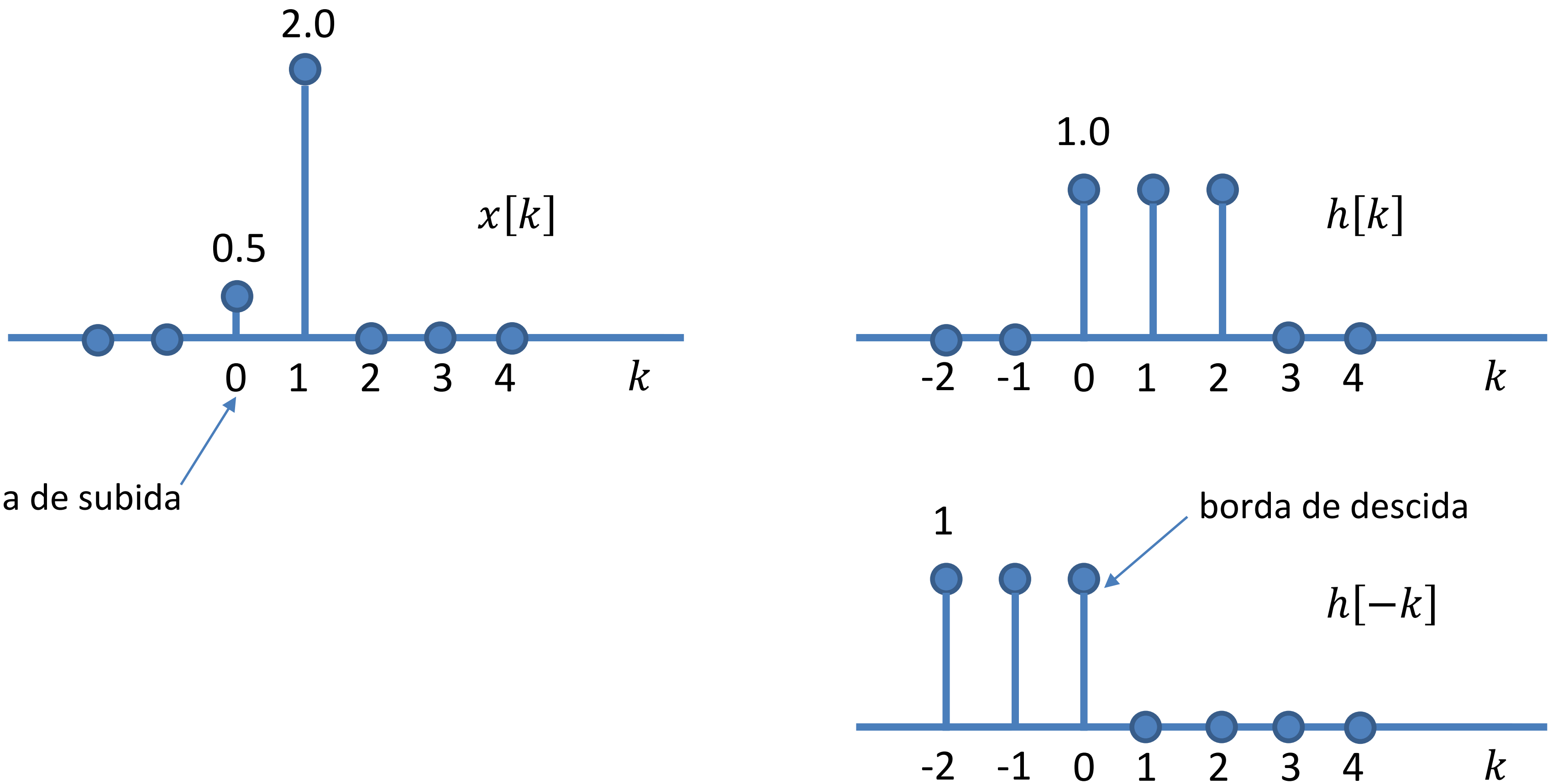
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$





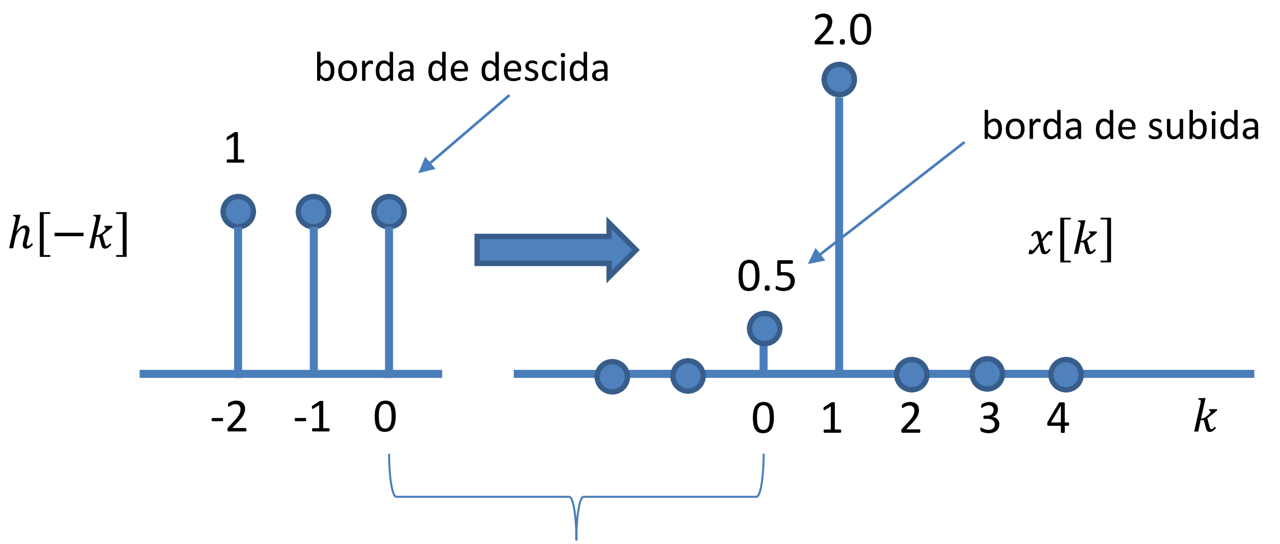
Convolução discreta - exemplo

A sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, é obtida “espelhando” $h[k]$ com referência a origem, para obter $h[-k]$, e deslocando de n amostras ao longo do eixo k a sequência espelhada $h[-k]$ até que a borda de descida de $h[-k]$ se superponha à borda de subida de $x[k]$.



Convolução discreta - exemplo

A sequência $h[n-k]$, $-\infty < k < \infty$, é obtida "espelhando" $h[k]$ com referência a origem, para obter $h[-k]$, e deslocando de n amostras ao longo do eixo k a sequência espelhada $h[-k]$ até que a borda de descida de $h[-k]$ se superponha à borda de subida de $x[k]$.



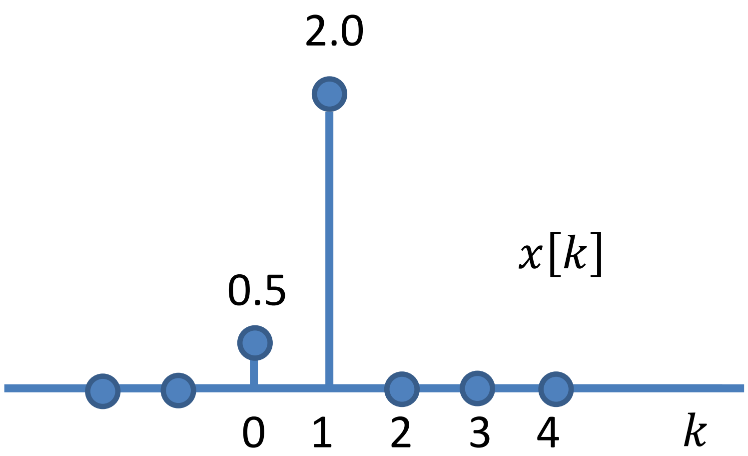
O primeiro produto não nulo ocorre quando a borda de descida de $h[-k]$ se superpõe à borda de subida de $x[k]$. Neste exemplo, o deslocamento necessário para que as bordas se superponham é $n = 0$, portanto o que está sendo calculado é a amostra $y[n=0]$.

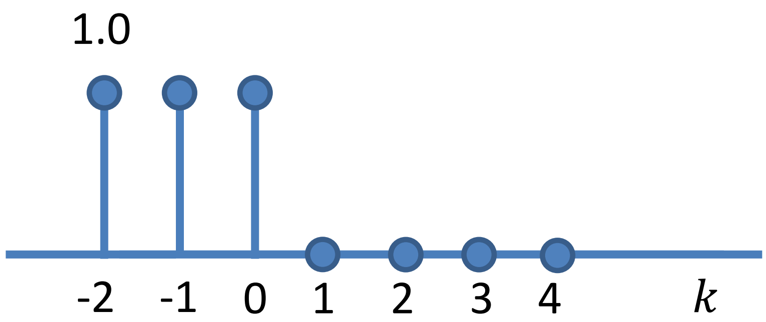
Convolução discreta - exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n-k], n = 0$

$h[0-k]$





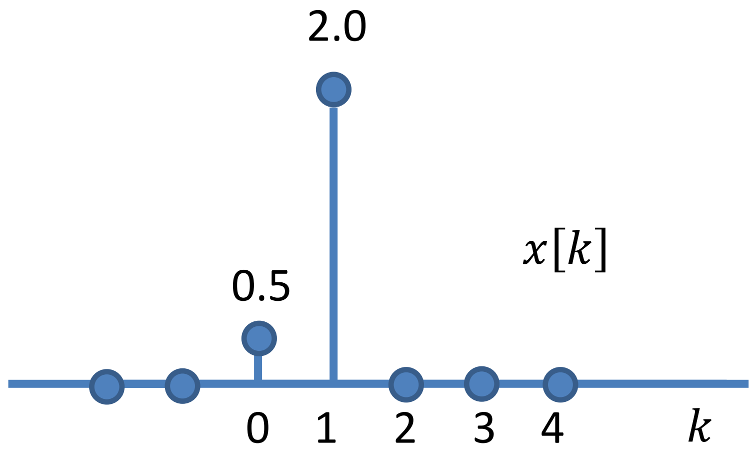
$$y[0] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[0-k] = (0.5)(1.0) = 0.5$$

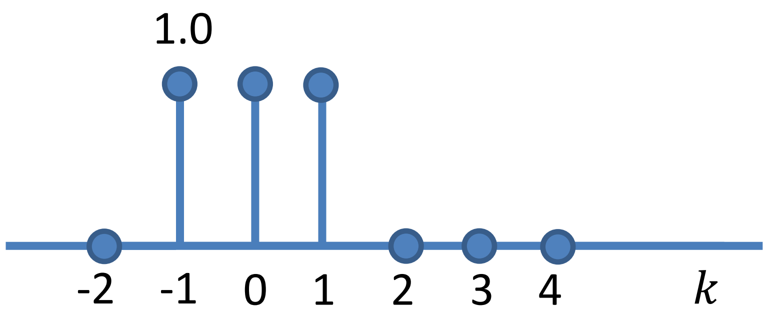
Convolução discreta - exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n-k], n = 1$

$h[1-k]$





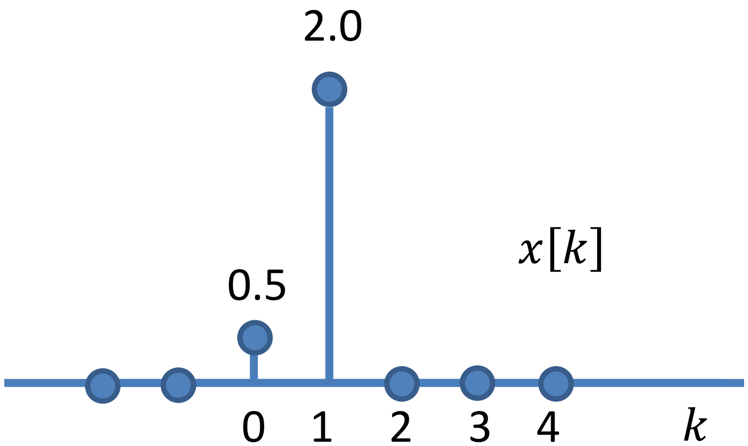
$$y[1] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[1-k] = (0.5)(1.0) + (2.0)(1.0) = 2.5$$

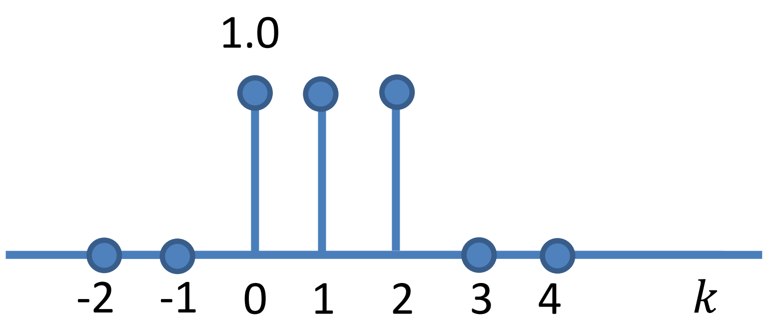
Convolução discreta - exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n-k], n = 2$

$h[2-k]$





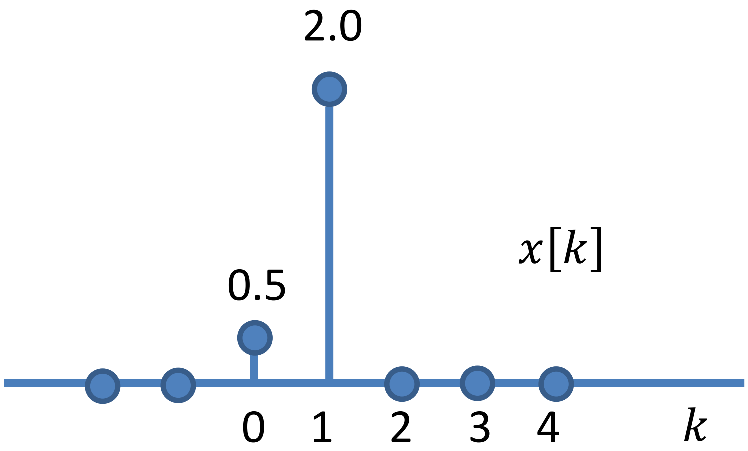
$$y[2] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[2-k] = (0.5)(1.0) + (2.0)(1.0) = 2.5$$

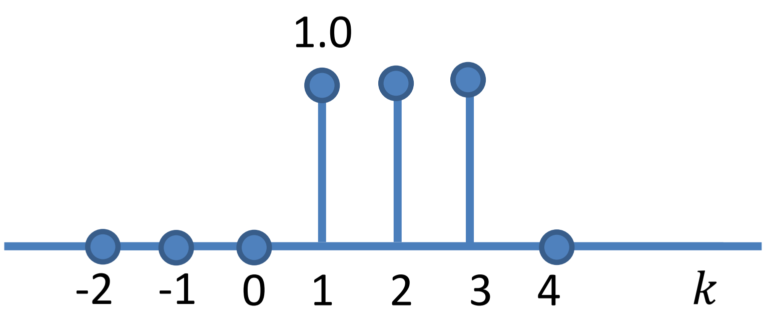
Convolução discreta - exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$h[n-k], n = 3$

$h[3-k]$





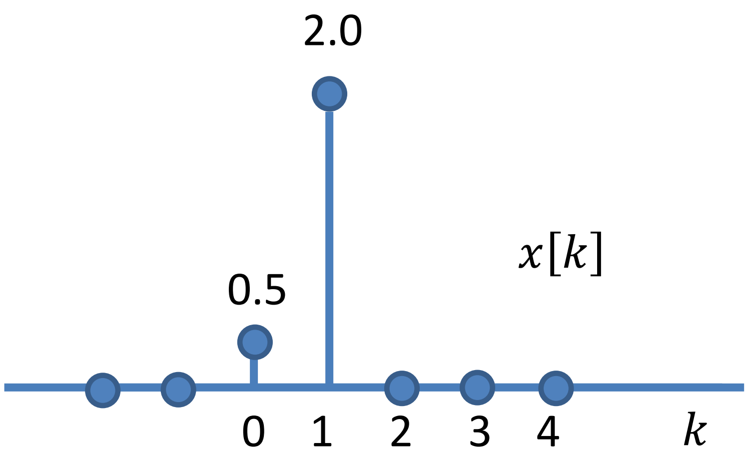
$$y[3] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[3-k] = (2.0)(1.0) = 2.0$$

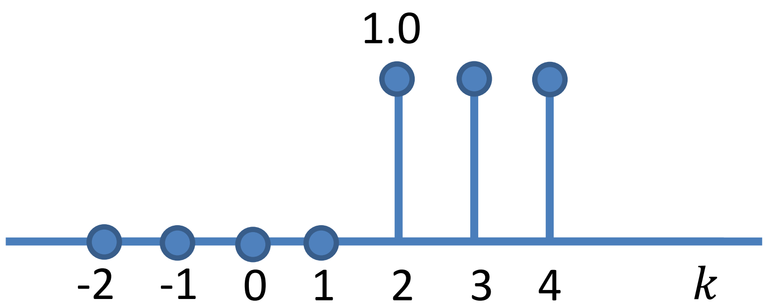
Convolução discreta - exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$

$$h[n-k], n = 4$$

$$h[4-k]$$

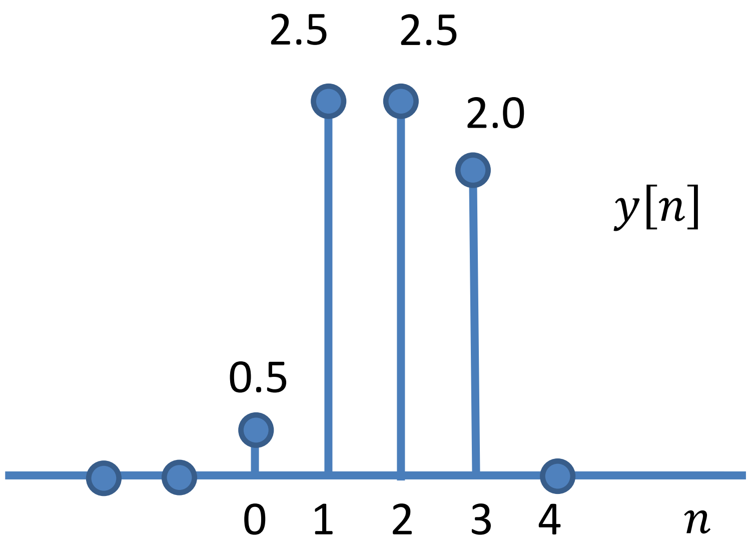




$$y[4] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[4-k] = 0$$

Convolução discreta - exemplo

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k]$$



$$y[0] = 0.5\ ; \quad y[1] = 2.5\ ; \quad y[2] = 2.5\ ; \quad y[3] = 2.0\ ; \quad y[4] = 0$$

Convolução discreta - pseudocódigo

O pseudocódigo abaixo determina a convolução discreta $y[n] = x_1[n] * x_2[n]$ entre as sequências $x_1[n]$ e $x_2[n]$.

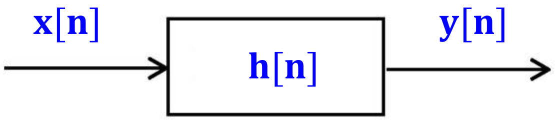
```
Conv(X1,X2) := | N1 ← length(X1) − 1
               | N2 ← length(X2) − 1
               | for n ∈ 0..(N1 + N2)
               |   | Y_n ← 0.0
               |   | if N1 ≥ N2
               |   |   | for m ∈ 0..n                  if n ≤ N2
               |   |   |    Y_n ← Y_n + X1_m·X2_(n−m)
               |   |   | for m ∈ (n − N2)..n           if (n > N2)·(n ≤ N1)
               |   |   |    Y_n ← Y_n + X1_m·X2_(n−m)
               |   |   | for m ∈ (n − N2)..N1          if (n > N1)·[n ≤ (N1 + N2)]
               |   |   |    Y_n ← Y_n + X1_m·X2_(n−m)
               |   | otherwise
               |   |   | for m ∈ 0..n                  if n ≤ N1
               |   |   |    Y_n ← Y_n + X1_m·X2_(n−m)
               |   |   | for m ∈ 0..N1                 if (n > N1)·(n ≤ N2)
               |   |   |    Y_n ← Y_n + X1_m·X2_(n−m)
               |   |   | for m ∈ (n − N2)..N1          if (n > N2)·[n ≤ (N1 + N2)]
               |   |   |    Y_n ← Y_n + X1_m·X2_(n−m)
               | Y
```

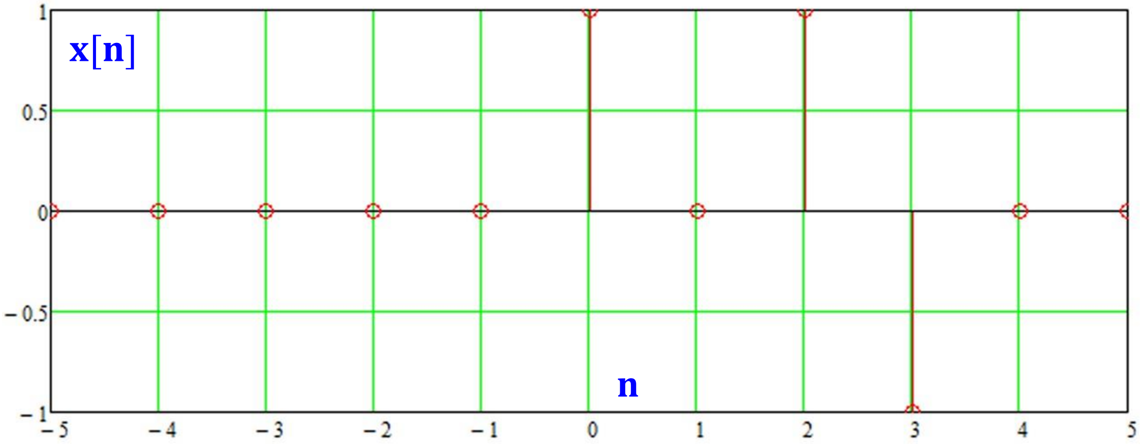
Se a sequência $x_1[n]$ tem N1 amostras e a sequência $x_2[n]$ tem N2 amostras o pseudocódigo retorna a sequência $y[n] = x_1[n] * x_2[n] = x_2[n] * x_1[n]$ com N1+N2–1 amostras. O pseudocódigo $\mathrm{Conv}(\mathrm{X1}, \mathrm{X2})$ implementa a função conv() do Matlab:

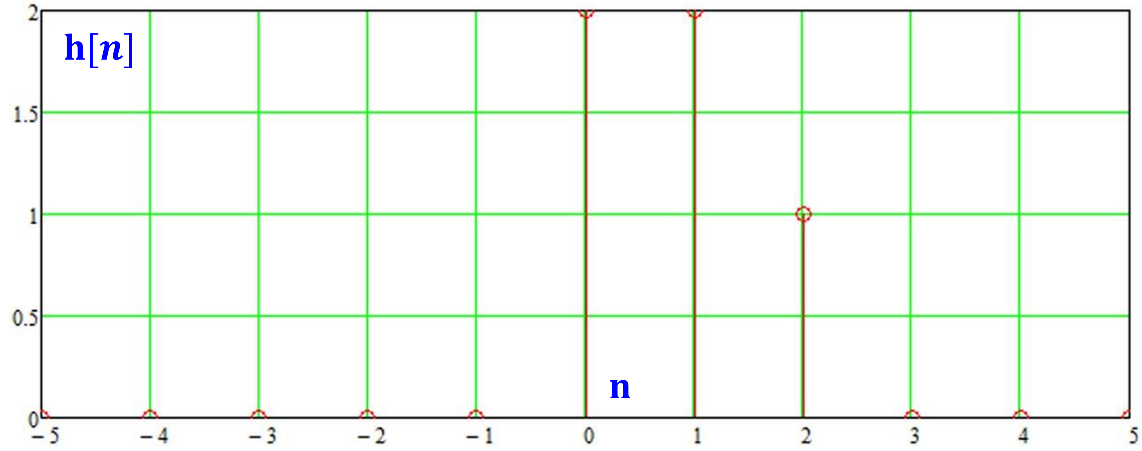
> conv Convolution and polynomial multiplication.
> C = conv(A, B) convolves vectors A and B. The resulting vector is length MAX([LENGTH(A)+LENGTH(B)-1, LENGTH(A),LENGTH(B)]).
> Class support for inputs A,B:
> float: double, single

Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

Exemplo: Um sistema LTI digital possui resposta ao impulso $\mathrm{h[n]}$ conforme figura abaixo. É aplicado em sua entrada a excitação $\mathrm{x}[n]$, conforme figura. Utilizando o pseudocódigo $\mathrm{Conv(X1, X2)}$ do slide anterior determine e plote a resposta $\mathrm{y[n]}$ à excitação $\mathrm{x[n]}$.







Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

Solução: O pseudocódigo $\mathrm{Conv}(\mathrm{X1}, \mathrm{X2})$ pode ser implementado em um *script* do software MathCad. A solução que segue é o próprio *script* MathCad que utiliza a função $\mathrm{Conv}(\mathrm{X1}, \mathrm{X2})$ para obter a convolução entre as sequencias $\mathrm{x}[\mathrm{n}]$ e $\mathrm{h}[\mathrm{n}]$. Um versão “free” do MathCad 14 pode ser obtida p/ *download* em https://www.dropbox.com/sh/3wtjenppcic9c5c/AABvk3Rlf_xDxjfOIH6Hphgza?dl=0MathCad14.rar&preview=MathCad14.rar .

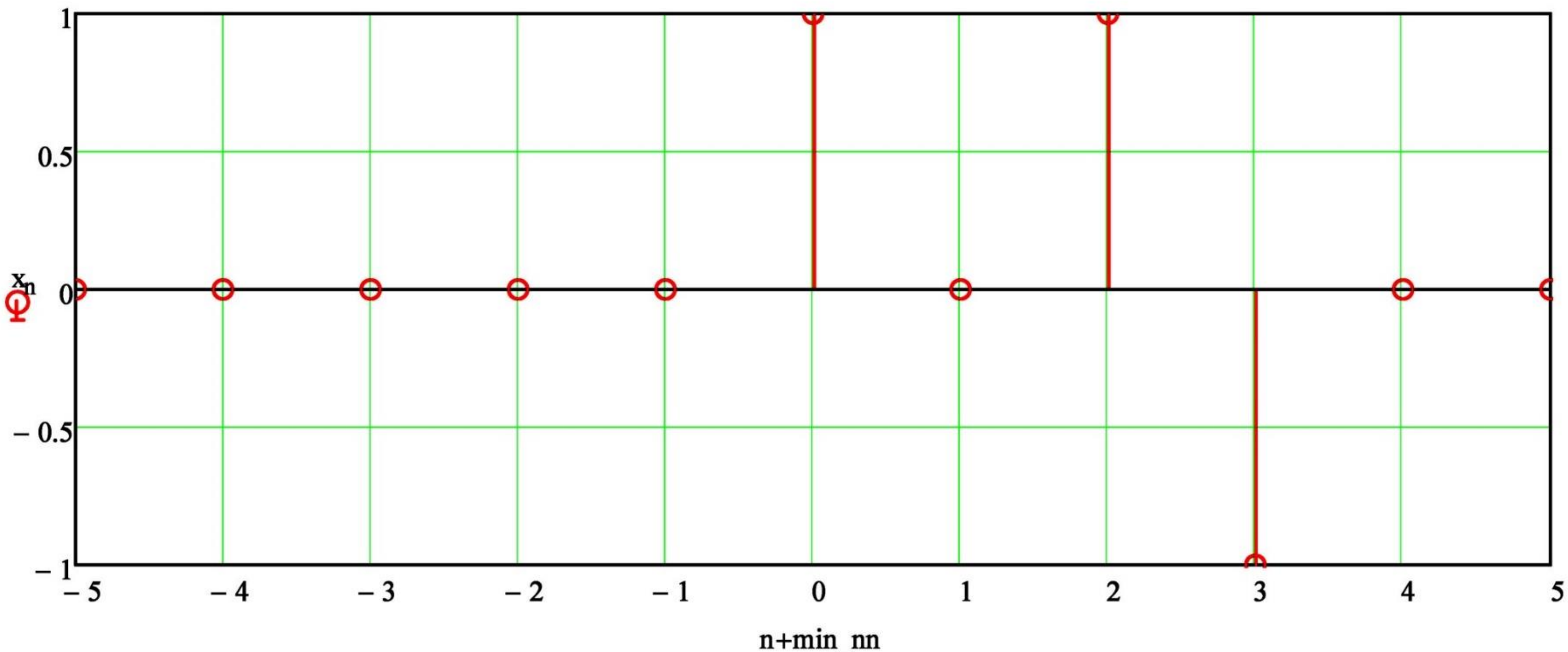
$\mathrm{min\_nn} := -5 \qquad \mathrm{max\_nn} := 5$

$\mathrm{nn} := \mathrm{min\_nn}, \mathrm{min\_nn} + 1 .. \mathrm{max\_nn}$

$\mathrm{n} := 0, 1 .. \mathrm{max\_nn} - \mathrm{min\_nn} \qquad x_n := 0.0$

$x_{0-\mathrm{min\_nn}} := 1.0 \qquad x_{2-\mathrm{min\_nn}} := 1.0 \qquad x_{3-\mathrm{min\_nn}} := -1.0$

$x^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0)$



Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

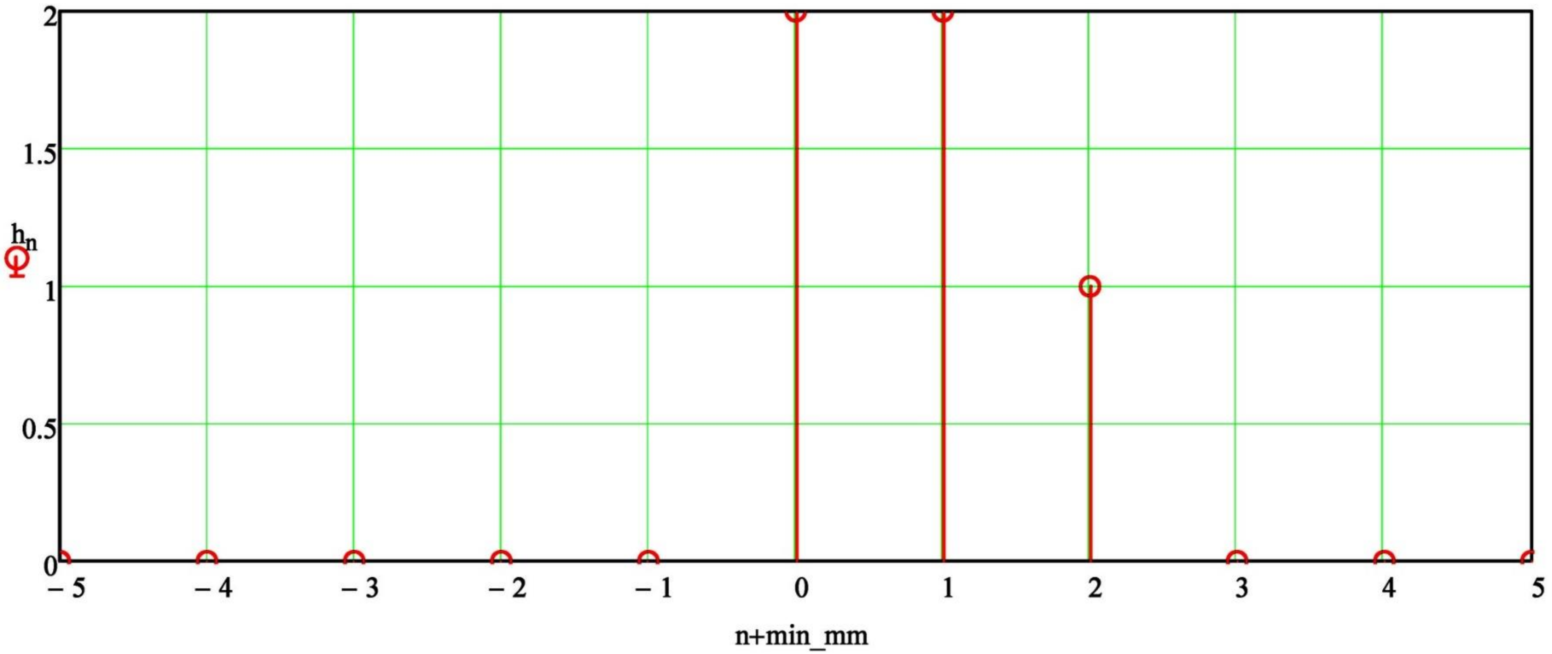
$min\_mm := -5 \qquad max\_mm := 5$

$mm := min\_mm, min\_mm + 1 .. max\_mm$

$n := 0, 1 .. max\_mm - min\_mm \qquad h_n := 0.0$

$h_{0-min\_mm} := 2.0 \qquad h_{1-min\_mm} := 2.0 \qquad h_{2-min\_mm} := 1.0$

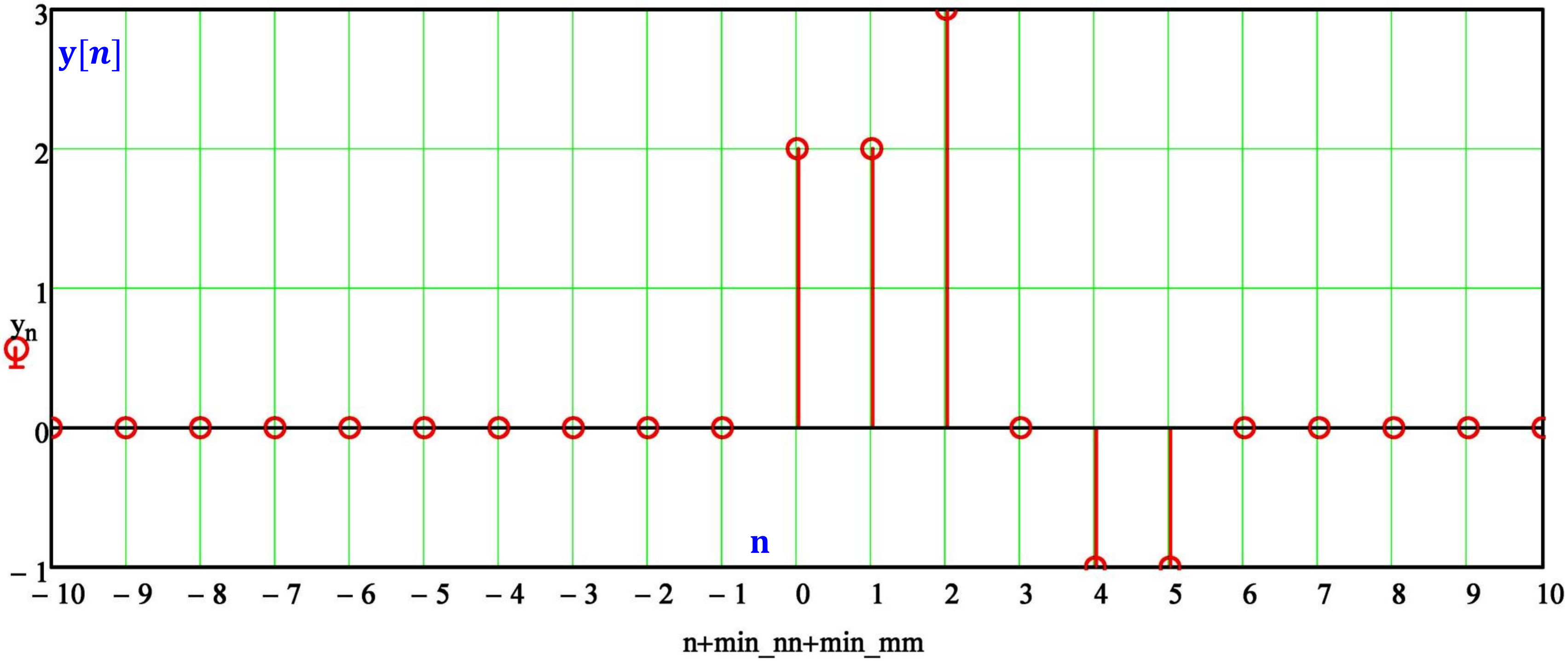
$h^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$



Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

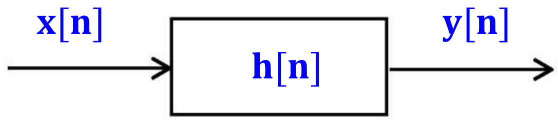
$y := \mathrm{Conv}(h, x)$ $\qquad$ $n := 0, 1 \,..\, \mathrm{length}(y) - 1$

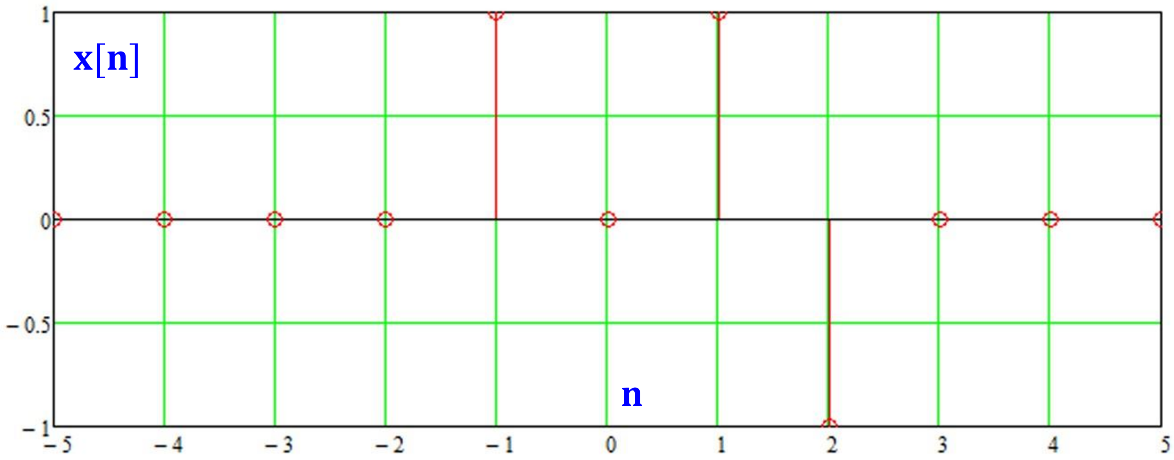
$y^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ -1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$

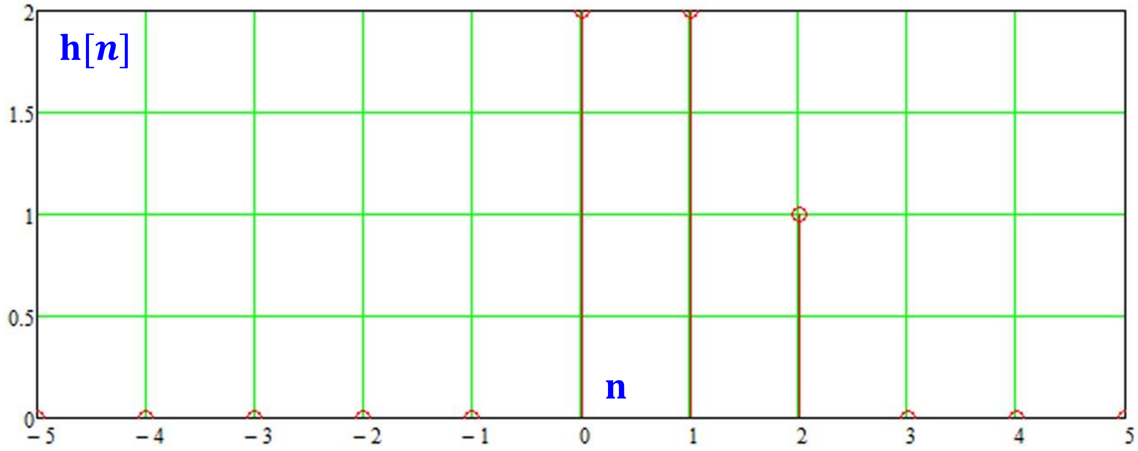


Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

Exemplo: Um sistema LTI digital possui resposta ao impulso $\mathrm{h[n]}$ conforme figura abaixo. É aplicado em sua entrada a excitação $\mathrm{x}[n]$, conforme figura. Utilizando o pseudocódigo $\mathrm{Conv(X1, X2)}$ determine e plote a resposta $\mathrm{y[n]}$ à excitação $\mathrm{x[n]}$.







Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

Solução: A solução que segue é o próprio *script* MathCad que utiliza a função $\mathrm{Conv}(X1, X2)$ para obter a convolução entre as sequencias $x[n]$ e $h[n]$.

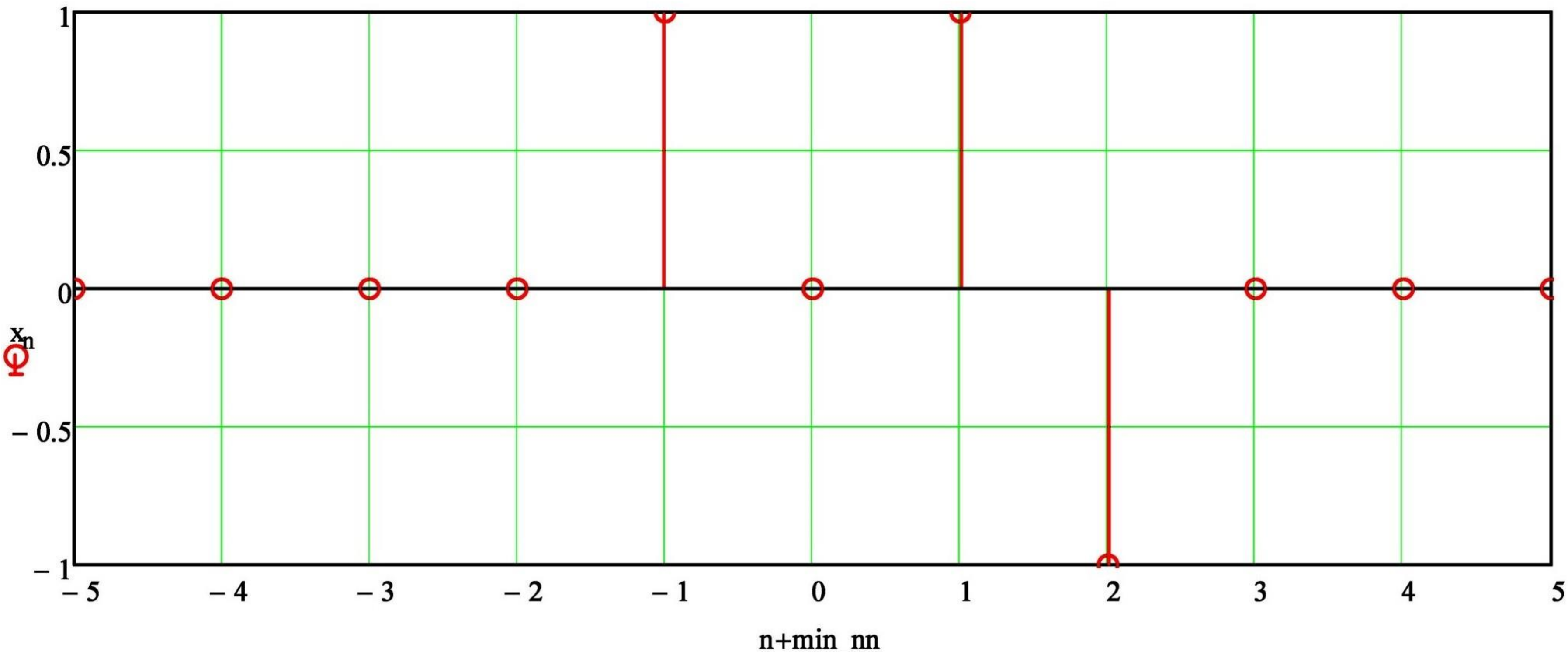
$\text{min\_nn} := -5 \qquad \text{max\_nn} := 5$

$\text{nn} := \text{min\_nn}, \text{min\_nn} + 1 .. \text{max\_nn}$

$n := 0, 1 .. \text{max\_nn} - \text{min\_nn} \qquad x_n := 0.0$

$x_{-1-\text{min\_nn}} := 1.0 \qquad x_{1-\text{min\_nn}} := 1.0 \qquad x_{2-\text{min\_nn}} := -1.0$

$x^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$



Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

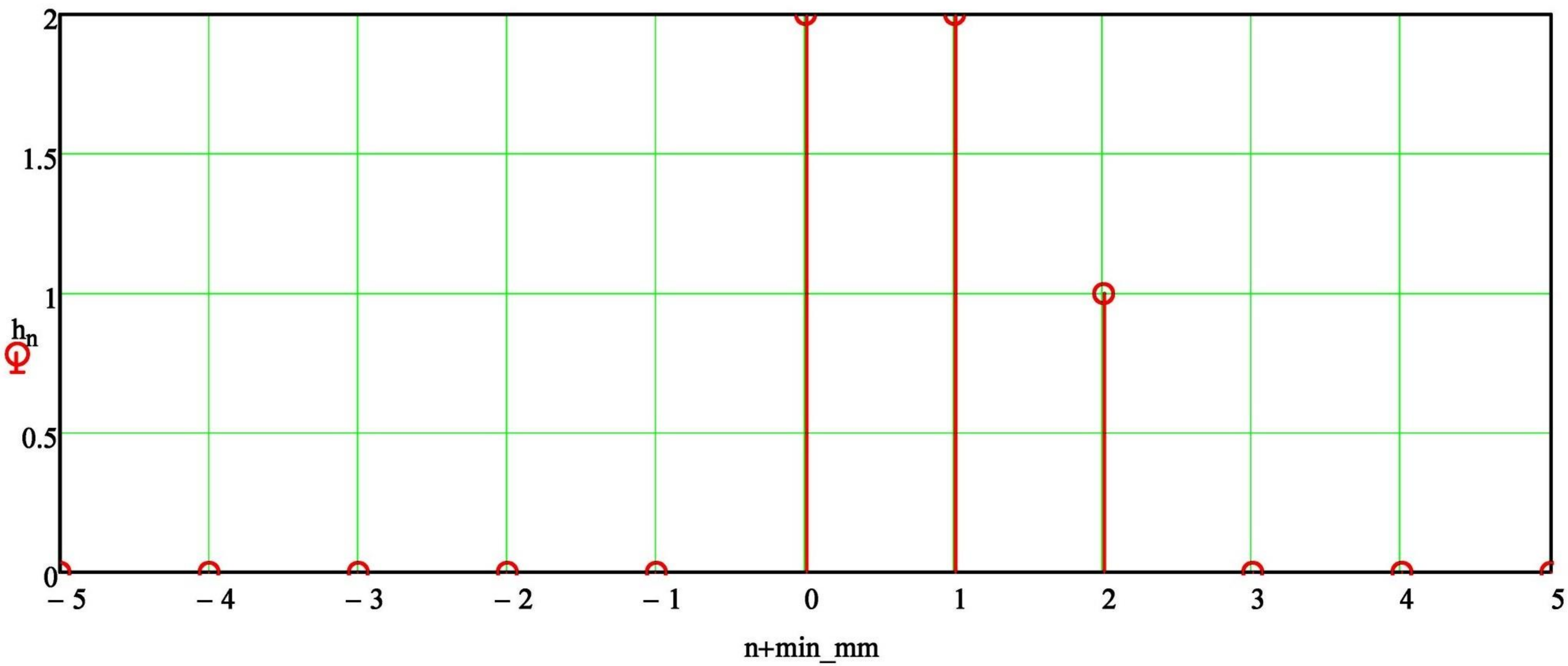
$min\_mm := -5 \qquad max\_mm := 5$

$mm := min\_mm, min\_mm + 1 .. max\_mm$

$n := 0, 1 .. max\_mm - min\_mm \qquad h_n := 0.0$

$h_{0-min\_mm} := 2.0 \qquad h_{1-min\_mm} := 2.0 \qquad h_{2-min\_mm} := 1.0$

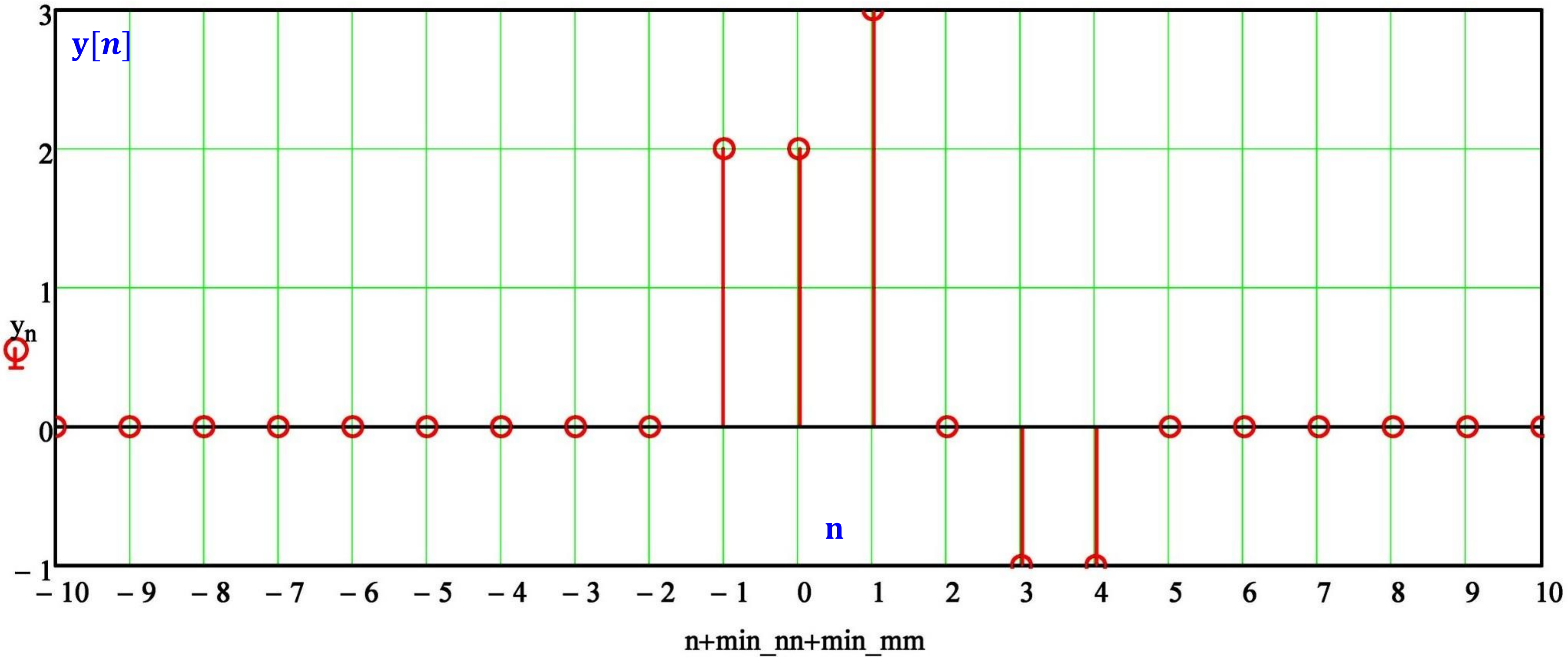
$h^T = (0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 0 \; 2 \; 2 \; 1 \; 0 \; 0 \; 0)$



Convolução discreta – pseudocódigo - exemplo

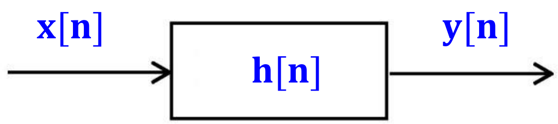
$y := \text{Conv}(h, x)$ $\qquad n := 0, 1 .. \text{length}(y) - 1$

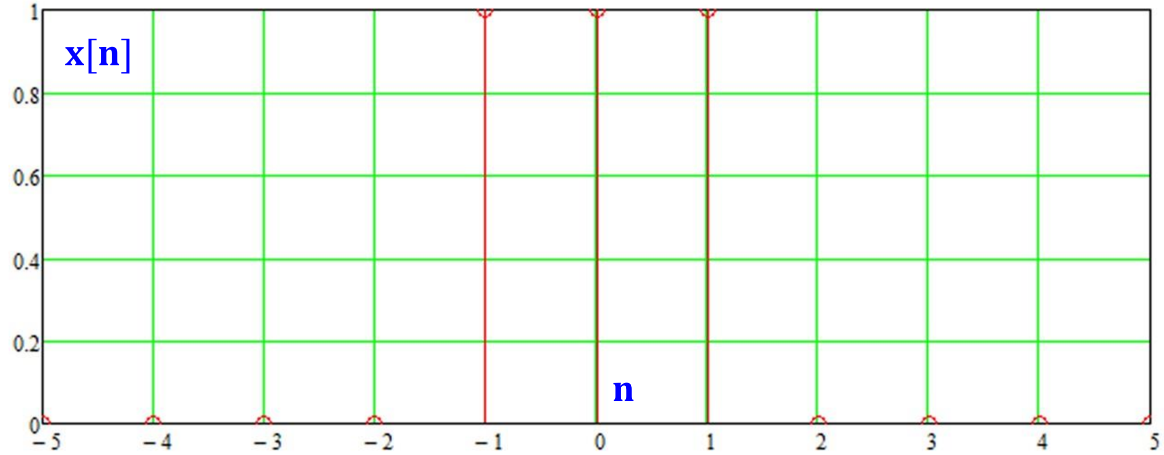
$y^T = (0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 2\ \ 2\ \ 3\ \ 0\ \ -1\ \ -1\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0)$

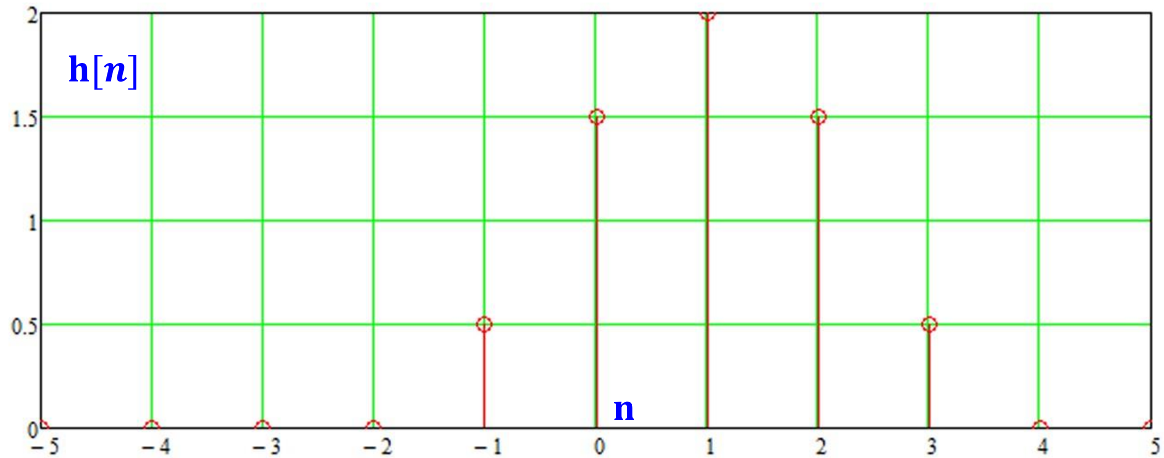


Homework

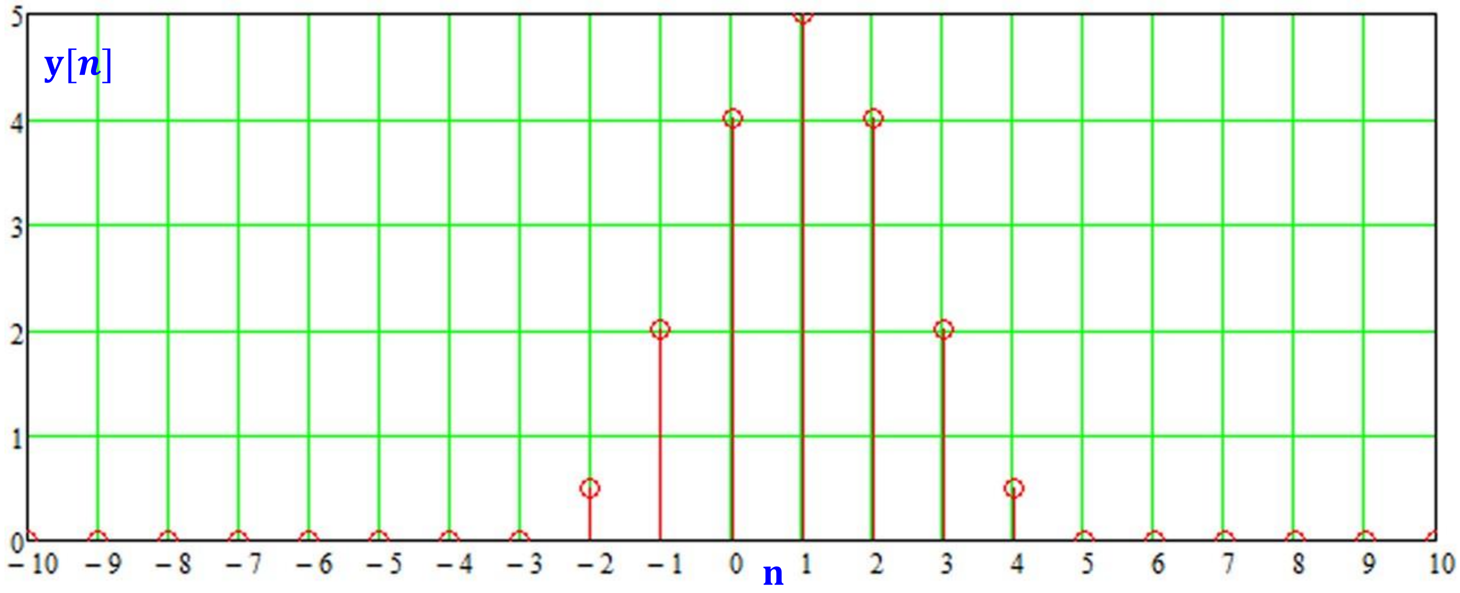
Um sistema LTI digital possui resposta ao impulso $\mathrm{h}[\mathrm{n}]$ conforme figura abaixo. É aplicado em sua entrada a excitação $\mathrm{x}[n]$, conforme figura. Utilizando o pseudocódigo $\mathrm{Conv}(\mathrm{X1}, \mathrm{X2})$ determine e plote a resposta $\mathrm{y}[\mathrm{n}]$ à excitação $\mathrm{x}[\mathrm{n}]$.



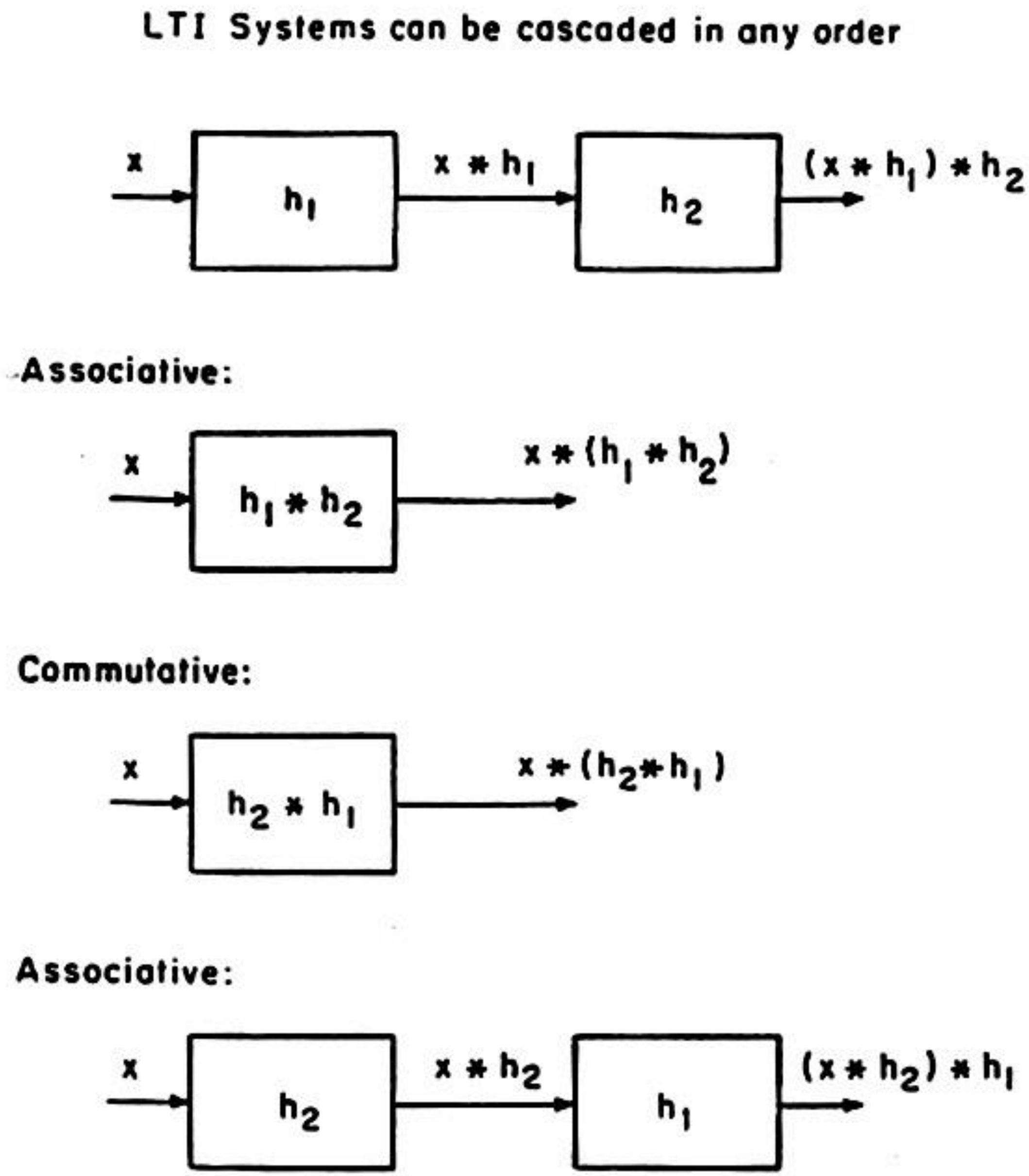




Homework - resposta



Propriedades da resposta ao impulso de um sistema LTI



Propriedades da resposta ao impulso de um sistema LTI