



Série de Fourier – análise espectral no domínio frequência angular de sinais periódicos no tempo contínuo. Interação com a função de transferência $H(j\omega)$ de sistemas analógicos.



Departamento de Eletrônica e Computação

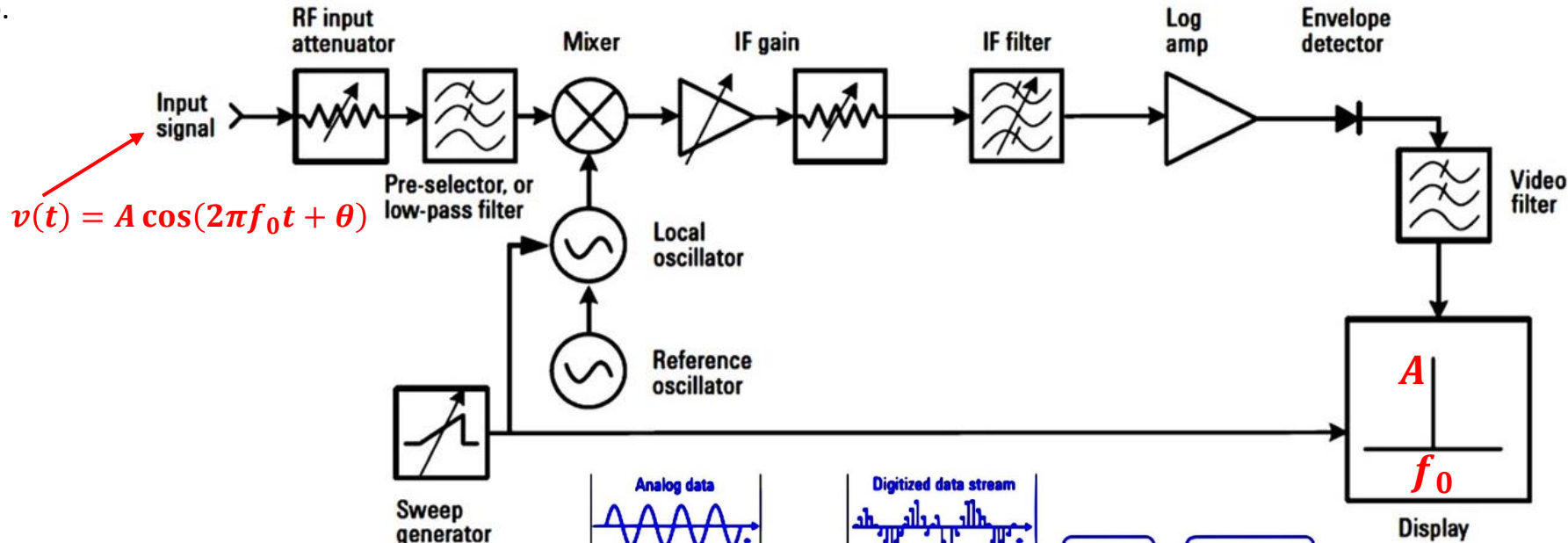
Centro de Tecnologia

ELC1115 – Sinais e Sistemas

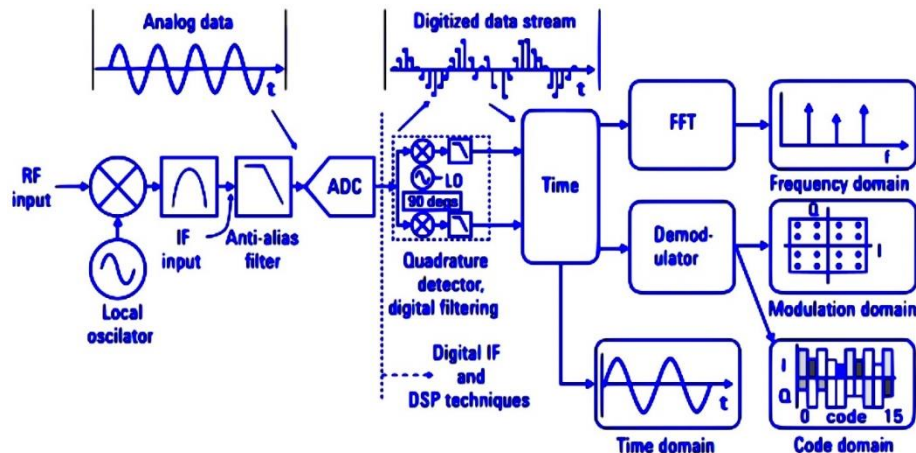
Prof. Fernando DeCastro

Séries de Fourier

Conforme discutimos no Cap I das notas de aula, se aplicarmos $v(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$ à entrada de um analisador de espectro de varredura, a sua tela mostrará a magnitude do espectro de $v(t)$ no domínio frequência como uma única barra espectral de amplitude A centrada em f_0 , conforme mostra a figura abaixo. Isto ocorre porque, conforme discutimos no Cap I, funções seno e cosseno de frequência f_0 são funções periódicas de período $T = 1/f_0$ cujo espectro apresenta uma única componente espectral centrada em f_0 e de magnitude proporcional à amplitude da função seno/cosseno no domínio tempo.



Nota: Se estivéssemos usando um analisador de espectro *real time* (diagrama de blocos ao lado) ao invés de um analisador de espectro de varredura, a sua tela mostraria centrada em f_0 não somente a barra espectral de magnitude A como também mostraria a fase θ do espectro de $v(t) = A \cos(2\pi f_0 t + \theta)$.



P/ detalhes ver <https://signalhound.com/news/capturing-digital-signals-with-rtas-and-vector-signal-analysis-tools/>

Séries de Fourier

Portanto, de acordo com o discutido no slide anterior, se houver um algoritmo que represente uma função periódica $x(t)$ como um somatório (superposição) de funções senoidais $A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k)$, $k = 0, 1, \dots, \infty$ então cada elemento do conjunto $\{A_k\}_{k=0}^{\infty}$ e do conjunto $\{\theta_k\}_{k=0}^{\infty}$ respectivamente expressa a magnitude A_k e a fase θ_k da k -ésima componente espectral do espectro de barras do sinal periódico $x(t)$.

Note que neste hipotético algoritmo de superposição de funções $A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k)$, cujo objetivo é determinar as componentes espectrais em f_k do sinal $x(t)$ de período T , cada um dos inúmeros cossenos da superposição possui uma frequência f_k distinta das demais. Portanto o algoritmo de superposição contempla um processo de varredura no domínio frequência similar ao que faz um analisador de espectro de varredura, conforme vimos no Cap I das notas de aula.

O referido hipotético algoritmo existe e é denominado representação de funções em Série de Fourier (SF). A SF de $x(t)$ de período T representa $x(t)$ como um somatório de funções senoidais $A_k \cos(2\pi f_k t + \theta_k)$, com $f_k = k/T$. A representação pode ser colocada em uma forma algébrica mais conveniente (ver relação trigonométrica no Apêndice A), denominada de **Série de Fourier Trigonométrica**:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(2\pi k t / T + \theta_k) \quad (1)$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\underbrace{A_k \cos \theta_k}_{a_x[k]} \cos(2\pi k t / T) - \underbrace{A_k \sin \theta_k}_{b_x[k]} \sin(2\pi k t / T) \right] \quad (2)$$

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_x[k] \cos(2\pi k t / T) + b_x[k] \sin(2\pi k t / T)\} \quad (3)$$

onde os coeficientes $a_x[0]$, $a_x[k]$ e $b_x[k]$ são determinados conforme segue

SF trigonométrica:

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_x[k] \cos(2\pi kt/T) + b_x[k] \sin(2\pi kt/T)\} \quad (3)$$

onde

$$a_x[0] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (4)$$

$$a_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi kt/T) dt \quad (5)$$

$$b_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi kt/T) dt \quad (6)$$

SF trigonométrica compacta (também conhecida por SF magnitude & fase - útil na representação do espectro de barras unilateral):

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} m_x[k] \cos(2\pi kt/T + \theta_x[k]) \quad (7)$$

onde

$$m_x[k] = \sqrt{(a_x[k])^2 + (b_x[k])^2}, \quad k > 0 \quad (8)$$

$$\theta_x[k] = -\operatorname{atan}\left(\frac{b_x[k]}{a_x[k]}\right), \quad k > 0 \quad (9)$$

SF Exponencial (também contempla magnitude & fase - útil na representação do espectro de barras bilateral):

Do Apêndice A, fazendo em (3) $\cos(2\pi kt/T) = \frac{e^{j2\pi kt/T} + e^{-j2\pi kt/T}}{2}$ e $\sin(2\pi kt/T) = \frac{e^{j2\pi kt/T} - e^{-j2\pi kt/T}}{2j}$

e fazendo simplificações algébricas obtemos

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \quad (10)$$

onde

$$c_x[0] = a_x[0] \quad (11)$$

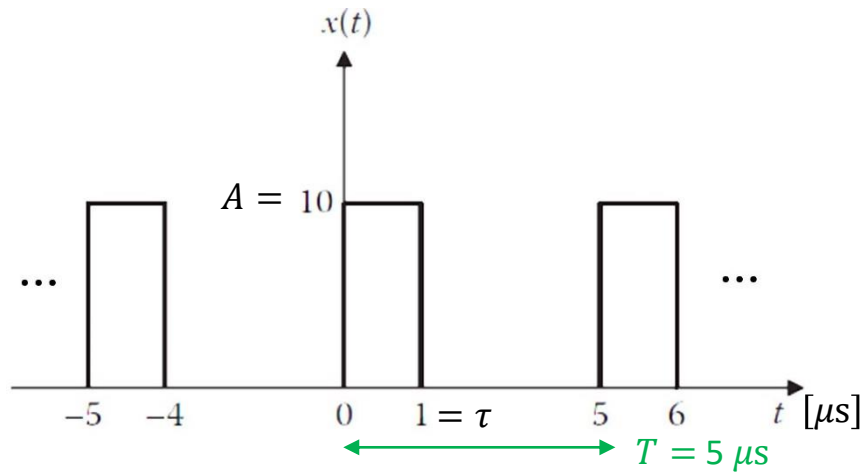
$$c_x[k] = \frac{a_x[k] - jb_x[k]}{2} \quad (12)$$

$$c_x[-k] = c_x^*[k] \quad (13)$$

sendo $\{\cdot\}^*$ o operador que retorna o complexo conjugado de seu argumento.

Séries de Fourier - Exemplo

Exemplo : Considere o trem de pulsos periódico $x(t)$ de período T , conforme mostra a figura abaixo.



Pede-se: **(a)** Suponha que o sinal $x(t)$ seja aplicado à entrada de um analisador de espectro. Determine e plote qual seria a tela mostrada pelo analisador de espectro para a magnitude e a fase das $M = 50$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$. **(b)** Utilizando a SF trigonométrica compacta, reconstrua e plote $x(t)$ para $0 < t < 2T$ utilizando as $M = 50$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$. **(c)** Utilizando a SF trigonométrica compacta, reconstrua e plote $x(t)$ para $0 < t < 2T$ utilizando as $M = 200$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$. **(d)** Determine e plote o espectro bilateral de $x(t)$ para as $M = 50$ primeiras componentes espectrais. **(e)** Utilizando a SF exponencial, reconstrua e plote $x(t)$ para $0 < t < 2T$ utilizando as $M = 50$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$.

Solução:

(a) A tela do analisador de espectro mostra a magnitude e a fase do espectro unilateral do sinal $x(t)$ aplicado ao seu conector de entrada. Para obter o espectro unilateral de $x(t)$ é necessário representar $x(t)$ através de sua SF trigonométrica compacta, definida por (7), cujos coeficientes são dados por (8) e (9) com referência a (4), (5) e (6).

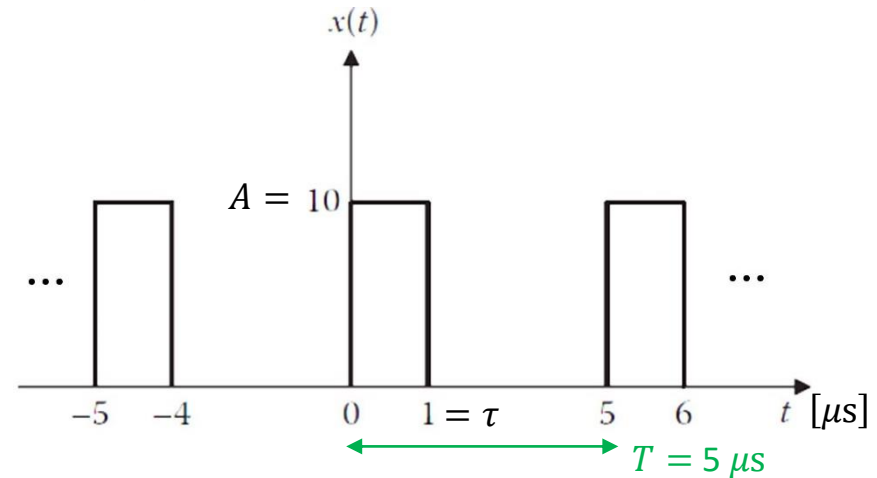
$$\text{De (4), } a_x[0] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^\tau A dt = \frac{A}{T} [t]_0^\tau = \frac{A\tau}{T} \quad \text{onde } A = 10V, T = 5 \mu s \text{ e } \tau = 1 \mu s. \quad (13A)$$

Séries de Fourier - Exemplo

De (5) temos:

$$a_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi kt/T) dt =$$

$$= \frac{2}{T} \int_0^\tau A \cos(2\pi kt/T) dt$$



Da equação 160 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/TOI.pdf> temos que $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax$. Daí

$$a_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^\tau A \cos(2\pi kt/T) dt = \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2\pi k} \right) \left[\sin \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right]_0^\tau = \frac{2A}{T} \left(\frac{T}{2\pi k} \right) \sin \left(\frac{2\pi k\tau}{T} \right) = \frac{A}{\pi k} \sin \left(\frac{2\pi k\tau}{T} \right) \quad (14)$$

De (6) temos:

$$b_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi kt/T) dt = \frac{2}{T} \int_0^\tau A \sin(2\pi kt/T) dt$$

Da equação 145 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/TOI.pdf> temos que $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax$. Daí

$$b_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^\tau A \sin(2\pi kt/T) dt = \frac{-2A}{T} \left(\frac{T}{2\pi k} \right) \left[\cos \left(\frac{2\pi kt}{T} \right) \right]_0^\tau = \left(\frac{-A}{\pi k} \right) \left[\cos \left(\frac{2\pi k\tau}{T} \right) - 1 \right] = \left(\frac{A}{\pi k} \right) \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi k\tau}{T} \right) \right] \quad (15)$$

Séries de Fourier - Exemplo

De (8) e (9) e de (14) e (15) temos:

$$m_x[k] = \sqrt{(a_x[k])^2 + (b_x[k])^2} = \sqrt{\left(\frac{A}{\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)\right)^2 + \left(\left(\frac{A}{\pi k}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)\right]\right)^2} = \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) \quad (16)$$

$$\theta_x[k] = -\operatorname{atan}\left(\frac{b_x[k]}{a_x[k]}\right) = -\operatorname{atan}\left(\frac{\left(\frac{A}{\pi k}\right) \left[1 - \cos\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)\right]}{\frac{A}{\pi k} \sin\left(\frac{2\pi k\tau}{T}\right)}\right) = -\operatorname{atan}\left(\tan\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right)\right) = -\frac{\pi k\tau}{T} \quad (17)$$

Substituindo (13A), (16) e (17) em (7), temos:

$$x(t) = a_x[0] + \sum_{k=1}^{\infty} m_x[k] \cos(2\pi kt/T + \theta_x[k]) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) \cos\left(2\pi kt/T - \frac{\pi k\tau}{T}\right) \quad (18)$$

Limitando a representação de $x(t)$ às M primeiras componentes espectrais e explicitando a magnitude e fase das M componentes, (18) torna-se

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^M \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t - \frac{\pi k\tau}{T}\right)$$

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^M \left| \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) \right| \cos\left(2\pi \frac{k}{T}t - \frac{\pi k\tau}{T} + \operatorname{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) < 0, \pi, 0\right)\right) \quad (19)$$

onde $\operatorname{if}(\operatorname{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

Séries de Fourier - Exemplo

Analisando (19):

magnitude da componente espectral de frequência zero (DC) que ocorre em $f_k = k/T$ para $k = 0$.

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^M \left| \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) \right| \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t - \frac{\pi k \tau}{T} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k \tau}{T}\right) < 0, \pi, 0\right)\right) \quad (19)$$

magnitude da k -ésima componente espectral a qual ocorre na frequência $f_k = k/T$

$f_k = \frac{k}{T}$

fase da k -ésima componente espectral a qual ocorre na frequência $f_k = k/T$

onde $\text{if}(\text{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

Para $A = 10\text{V}$, $T = 5 \mu\text{s}$ e $\tau = 1 \mu\text{s}$ e para $M = 50$ componentes espectrais (19) resulta em.

$$x(t) = 2 + \sum_{k=1}^{50} \left| \frac{20}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) \right| \cos\left(2\pi \frac{k}{5} t - \frac{\pi k}{5} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) < 0, \pi, 0\right)\right) \quad (20)$$

Comparando (20) com (7), a magnitude $m_x[k]$ e a fase $\theta_x[k]$ da k -ésima componente espectral do espectro unilateral de $x(t)$ e que ocorre na frequência $f_k = k/T$ é dada por:

$$m_x[k] = \text{if}\left(k = 0, 2, \left| \frac{20}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) \right| \right) \quad (21) \quad \theta_x[k] = -\frac{\pi k}{5} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) < 0, \pi, 0\right) \quad (22)$$

componente espectral de frequência zero (DC)

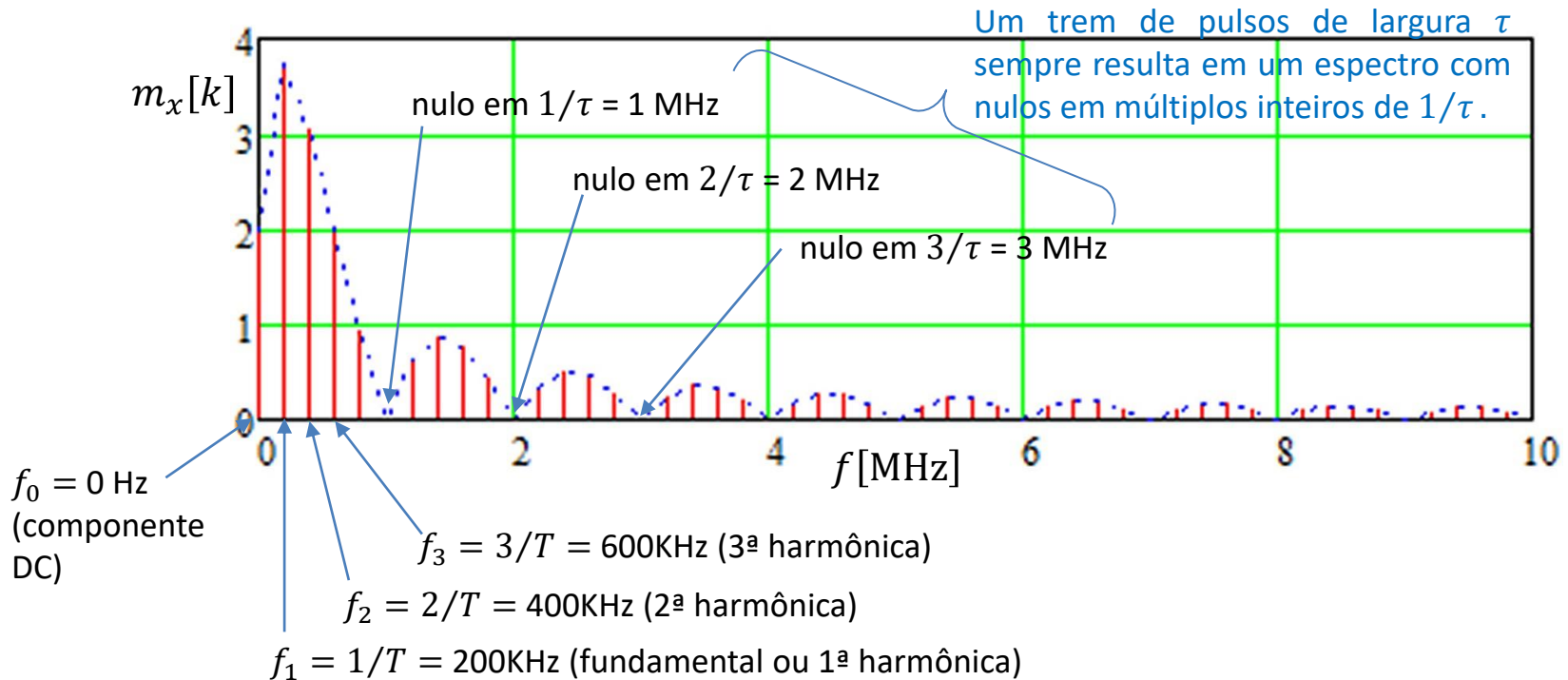
Séries de Fourier - Exemplo

Para efeito de plotar a fase $\theta_x[k]$ das $M = 50$ primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $x(t)$, sendo $k = 0, 1, \dots, M$, é conveniente converter (22) para resultar um gráfico em graus, ao invés de radianos, e limitar a excursão da fase em graus ao intervalo $-180^\circ < \theta_x[k] < 180^\circ$:

$$\theta_x[k] = -\text{mod}\left(\frac{180k}{5} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{T}\right) < 0, 180, 0\right), 180\right) \quad (23)$$

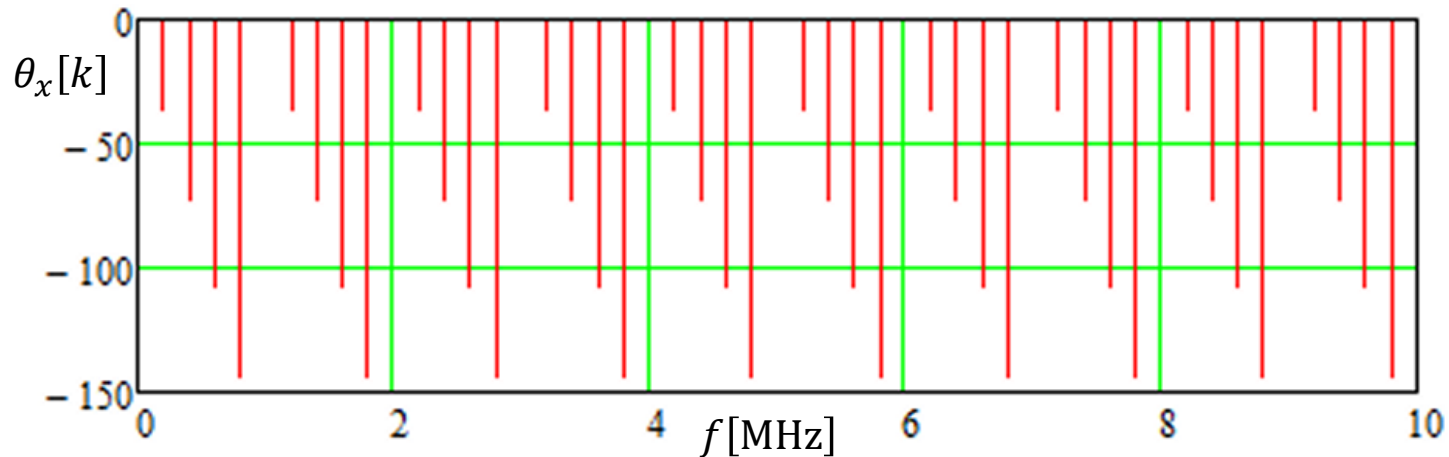
onde $\text{mod}(x, y)$ é o operador que retorna o resto da divisão de x por y (x modulo y), tendo o resultado o mesmo sinal que x e onde $\text{if}(\text{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

De (21), com $k = 0, 1, \dots, M$, o gráfico da magnitude $m_x[k]$ das $M = 50$ primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $x(t)$, cada uma delas ocorrendo na frequência $f_k = k/T$, resulta em:

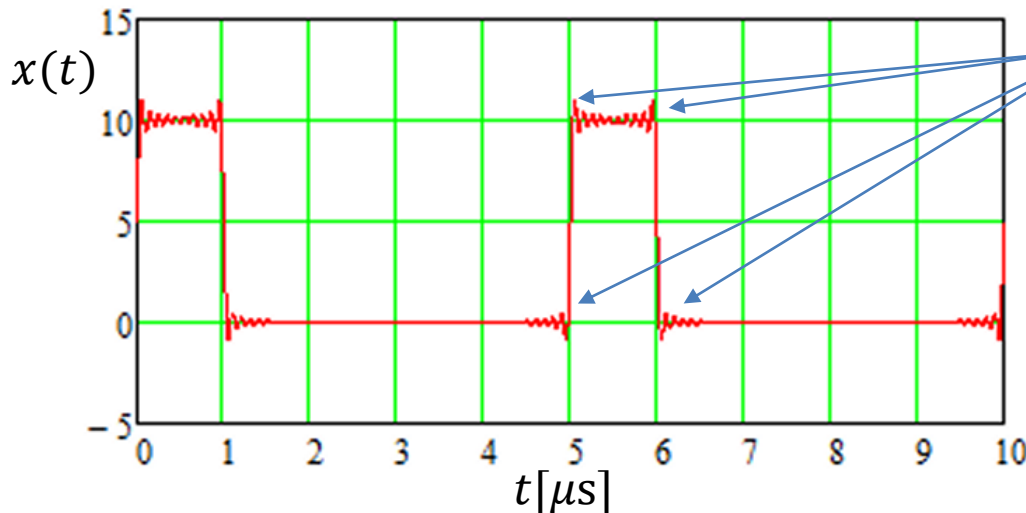


Séries de Fourier - Exemplo

De (23) , com $k = 0,1,\dots,M$, o gráfico da fase $\theta_x[k]$ das $M = 50$ primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $x(t)$, cada uma delas ocorrendo na frequência $f_k = k/T$, resulta em :



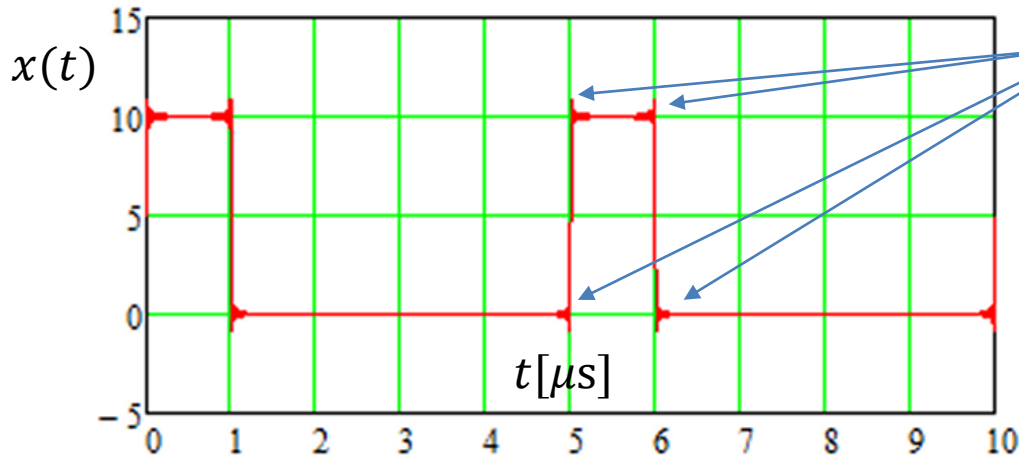
(b) Para reconstruir e plotar $x(t)$ no domínio tempo a partir das $M = 50$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$ na SF trigonométrica compacta, utilizaremos a equação (20) com $0 < t < 2T$:



Distorção de Gibbs: $x(t)$ está sendo representado apenas com as $M = 50$ primeiras componentes espectrais (harmônicas), então faltam as componentes de alta frequência que permitiriam reconstruir com fidelidade no tempo as transições rápidas da borda de subida e de descida do pulso.

Séries de Fourier - Exemplo

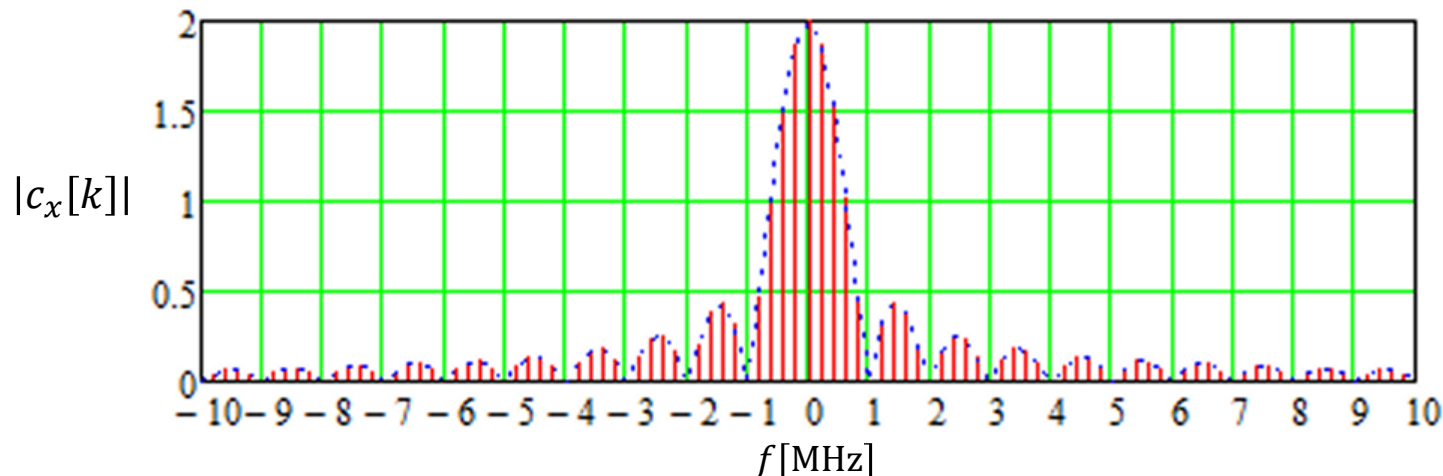
(c) Para reconstruir e plotar $x(t)$ no domínio tempo a partir das $M = 200$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$ na SF trigonométrica compacta, utilizaremos a equação (20) com $0 < t < 2T$ e com o limite superior do somatório $M = 200$:



Distorção de Gibbs: $x(t)$ está sendo representado com as $M = 200$ primeiras componentes espectrais, então é significativa a redução da distorção de Gibbs se comparado ao resultado do item (b) em que foi utilizado apenas 50 componentes espectrais.

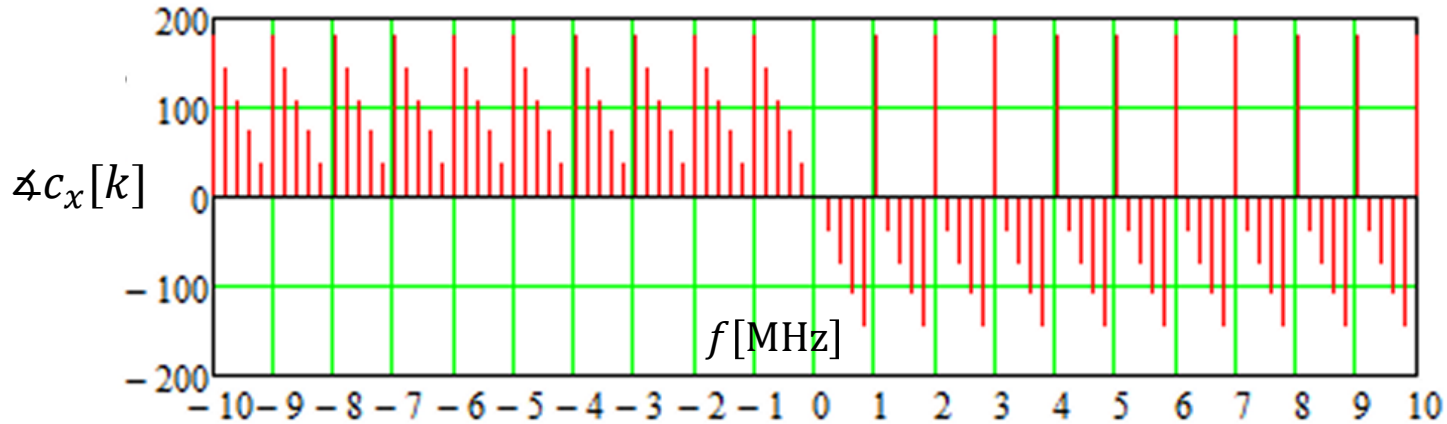
(d) Para determinar e plotar o espectro bilateral de $x(t)$ para as $M = 50$ primeiras componentes espectrais é necessário representar $x(t)$ através de sua SF exponencial, definida por (10), cujos coeficientes são dados por (11), (12) e (13) com referência a (13A), (14) e (15).

De (11), (12) e (13), com $k = -M, -M + 1, \dots, M$, o gráfico da magnitude $|c_x[k]|$ das $M = 50$ primeiras componentes espectrais do espectro bilateral de $x(t)$, cada uma delas ocorrendo na frequência $f_k = k/T$, resulta em :

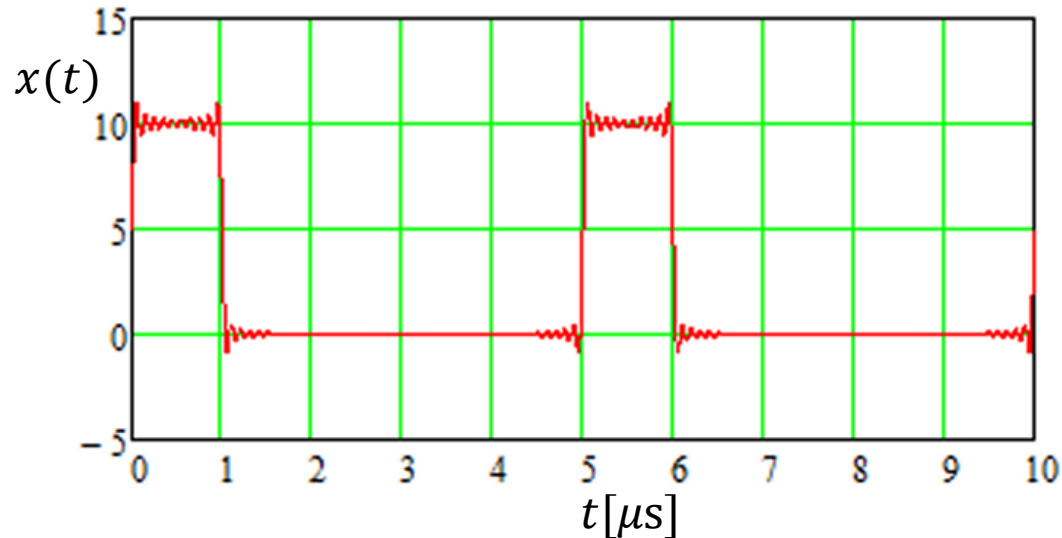


Séries de Fourier - Exemplo

De (11), (12) e (13) , com $k = -M, -M + 1, \dots, M$, o gráfico da fase $\angle c_x[k]$ das $M = 50$ primeiras componentes espectrais do espectro bilateral de $x(t)$, cada uma delas ocorrendo na frequência $f_k = k/T$, resulta em :

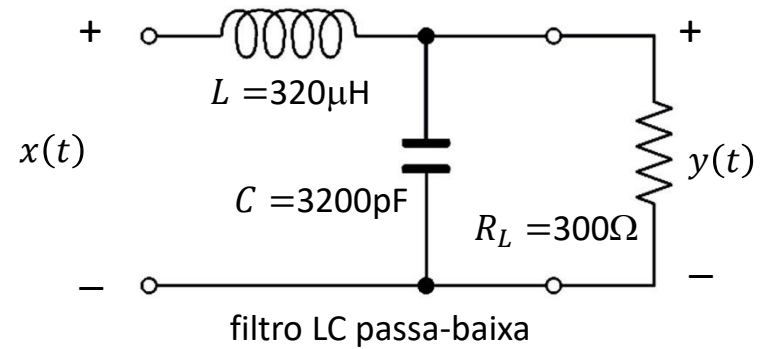
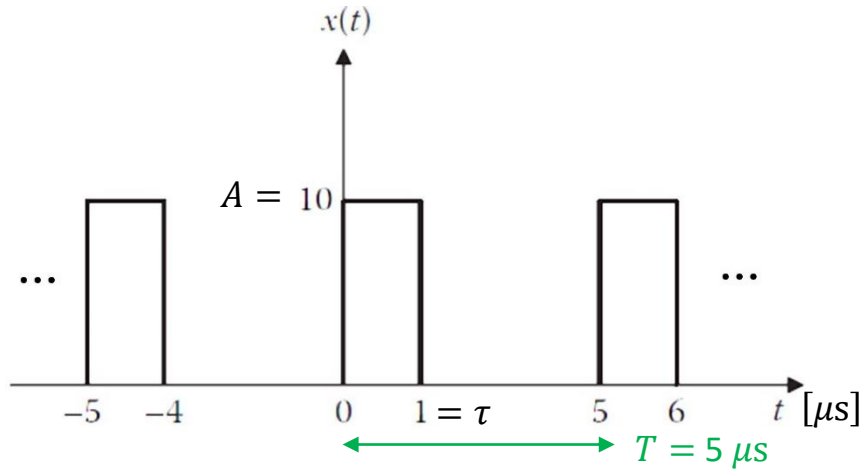


(e) Para reconstruir e plotar $x(t)$ no domínio tempo a partir das $M = 50$ primeiras componentes espectrais de $x(t)$ da SF exponencial, utilizaremos a equação (10) $x(t) = \sum_{k=-M}^M c_x[k] e^{j2\pi kt/T}$ com os coeficientes $c_x[k]$ dados por (11), (12) e (13) e para $0 < t < 2T$:



Séries de Fourier - Exemplo

Exemplo : O circuito de comutação de uma fonte chaveada gera o trem de pulsos periódico $x(t)$ de período T , conforme mostra a figura abaixo. O sinal $x(t)$ é aplicado a um filtro LC passa-baixa, que atenua os harmônicos do espectro do sinal $x(t)$ e transfere sem atenuação a componente DC do espectro de $x(t)$ para a resistência de carga R_L na saída $y(t)$.



Pede-se: **(a)** Plote para $0 < t < 2T$ o sinal $y(t)$ na saída do filtro-baixa representando $x(t)$ pela sua SF trigonométrica compacta e determinando $y(t)$ a partir da interação das 50 primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $x(t)$ com a função de transferência $H(\omega)$ do filtro. **(b)** Plote em um mesmo gráfico a resposta $y(t)$ obtida em (a) e a excitação $x(t)$ representada pela sua SF trigonométrica compacta. **(c)** Determine e plote a magnitude e a fase das 50 primeiras componentes espectrais do espectro unilateral do sinal $y(t)$ **(d)** Quantos volts DC um multíteste mede na saída $y(t)$? **(e)** Quantos volts RMS um multíteste *true* RMS mede na saída $y(t)$? **(f)** Plote o sinal de *ripple* (componente AC) que um osciloscópio mede na saída $y(t)$ quando o canal de entrada do osciloscópio está configurado para acoplamento AC (ver <https://www.embarcados.com.br/medicao-de-ripple/> e ver <https://pt.wikipedia.org/wiki/Oscilosc%C3%B3pio>). **(g)** Determine a tensão pico a pico da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$. **(h)** Determine o valor RMS da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$. **(i)** Determine a distorção harmônica total (THD – *Total Harmonic Distortion*) da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$ (ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Distor%C3%A7%C3%A3o_harm%C3%B4nica_total).

Solução :

(a) A representação de $x(t)$ pela sua SF trigonométrica compacta com 50 componentes espectrais já foi determinada no exemplo anterior, resultando na equação (20) do slide 9:

$$x(t) = 2 + \sum_{k=1}^{50} \left| \frac{20}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k}{5}\right) \right| \cos\left(2\pi \frac{k}{5} t - \frac{\pi k}{5} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k}{T}\right) < 0, \pi, 0\right)\right) \quad (20)$$

que resulta da equação (19) do slide 9 para $A = 10V$, $T = 5 \mu s$ e $\tau = 1 \mu s$ e limitada a $M = 50$ componentes espectrais:

$$x(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{k=1}^M \left| \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) \right| \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t - \frac{\pi k\tau}{T} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) < 0, \pi, 0\right)\right) \quad (19)$$

onde $\text{if}(\text{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

A função de transferência $H(\omega)$ do filtro passa-baixa já foi determinada no slide 3 do [Cap II.3](#) das notas de aula, resultando em:

$$H(\omega) = \frac{|\dot{Y}|e^{j\angle\dot{Y}}}{|\dot{X}|e^{j\angle\dot{X}}} = \frac{1}{(1 - LC\omega^2) + j\frac{\omega L}{R_L}}, \quad \omega = 2\pi f \quad (24)$$

ou, substituindo $\omega = 2\pi f$ em (24):

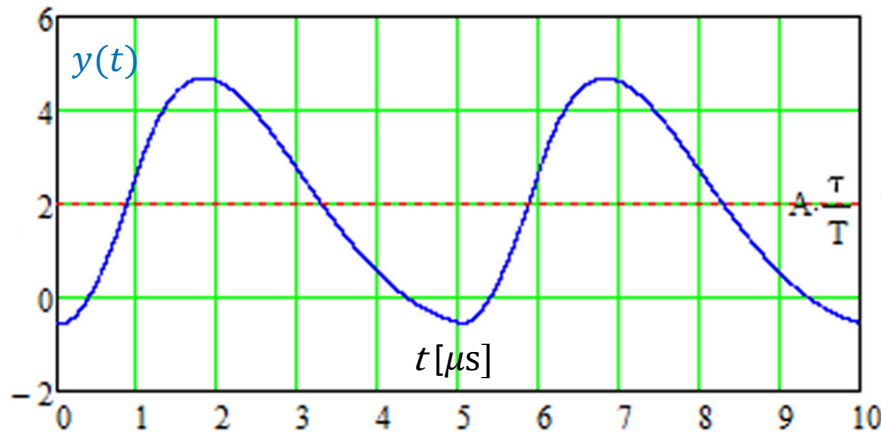
$$H(f) = \frac{1}{(1 - LC(2\pi f)^2) + j\frac{2\pi fL}{R_L}} \quad (25)$$

A determinação de $y(t)$ a partir da interação das 50 primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $x(t)$ com a função de transferência $H(\omega)$ do filtro segue a mesma abordagem da solução do item (d) do slide 5 do [Cap II.2](#) das notas de aula para determinação da resposta à excitação de um único cosseno de frequência $f_{in} = 0.15$ Hz, com a diferença que aqui a excitação é uma superposição de $M = 50$ cossenos, cada um deles de frequência $f_k = k/T$, $k = 0, 1, \dots, M$. Com base nesta abordagem temos de (19) e (25) :

$$y(t) = \frac{A\tau}{T} \left| H\left(\frac{0}{T}\right) \right| + \sum_{k=1}^M \left| \frac{2A}{\pi k} \sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) \right| \left| H\left(\frac{k}{T}\right) \right| \cos\left(2\pi \frac{k}{T} t - \frac{\pi k\tau}{T} + \text{if}\left(\sin\left(\frac{\pi k\tau}{T}\right) < 0, \pi, 0\right) + \angle H\left(\frac{k}{T}\right)\right) \quad (26)$$

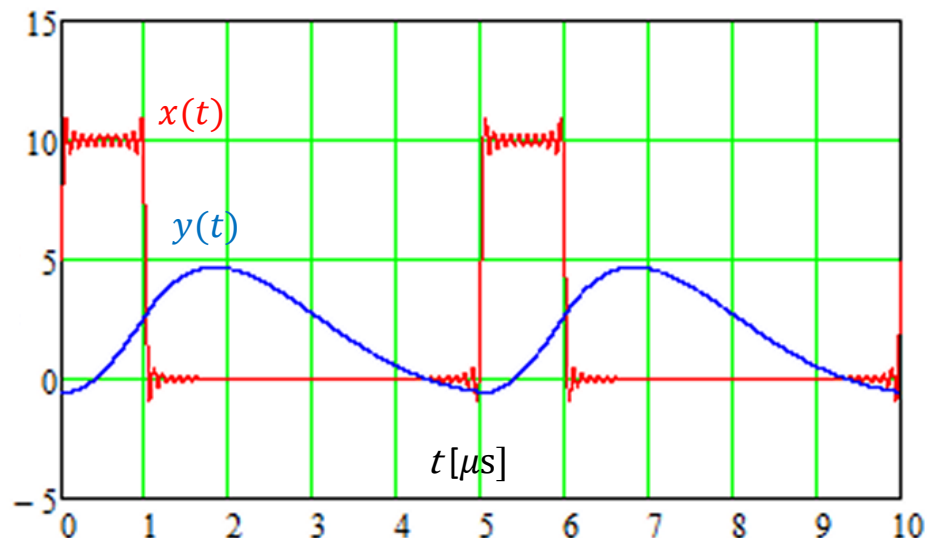
Séries de Fourier - Exemplo

De (26) para $0 < t < 2T$, $A = 10V$, $T = 5 \mu s$, $\tau = 1 \mu s$ e $M = 50$, e usando (25) para $L = 320 \mu H$, $C = 3200 pF$ e $R_L = 300 \Omega$ obtemos o gráfico de $y(t)$ como sendo



Note que o valor médio (= nível DC) de $y(t)$ corresponde ao termo $p/k = 0$ na SF trigonométrica compacta de $x(t)$, o que era de se esperar dado que a função de transferência $H(f)$ do filtro tem ganho unitário p/ DC, i.e., $H(0 \text{ Hz}) = 1$.

(b) De (26) e (19), o gráfico da resposta $y(t)$ obtida em (a) plotado conjuntamente com a excitação $x(t)$ representada pela sua SF trigonométrica compacta resulta em:



Séries de Fourier - Exemplo

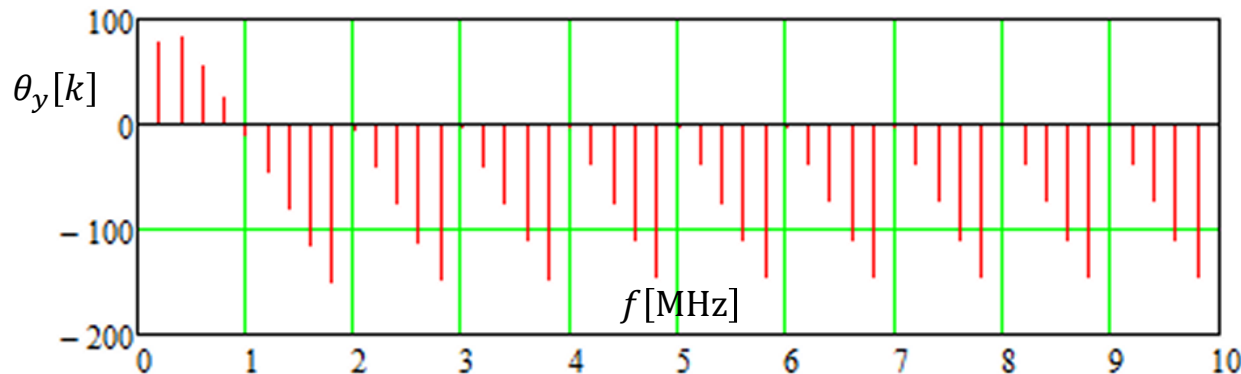
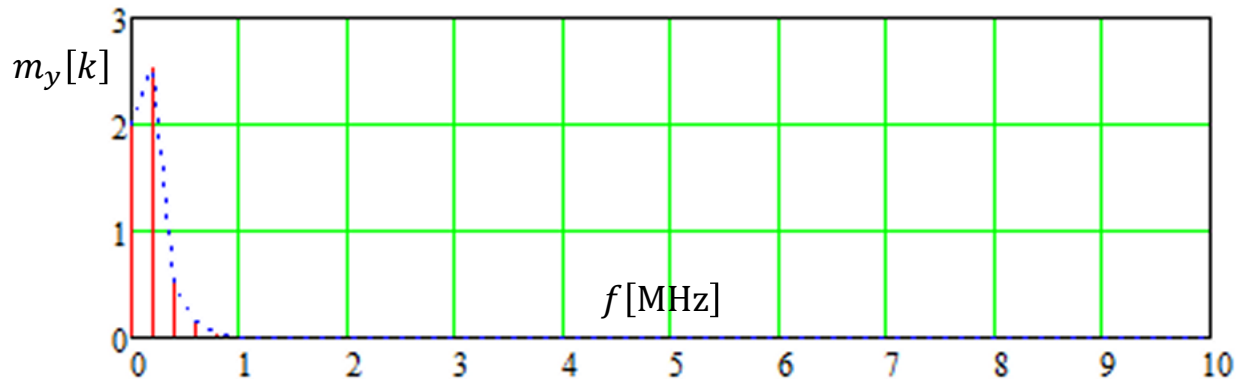
(c) De (26) e (25), para $k = 0, 1, \dots, M$, $A = 10V$, $T = 5 \mu s$, $\tau = 1 \mu s$, $L = 320 \mu H$, $C = 3200 pF$ e $R_L = 300 \Omega$ a magnitude $m_y[k]$ e a fase $\theta_y[k]$ das $M = 50$ primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $y(t)$, cada uma delas ocorrendo na frequência $f_k = k/T$, é dada por :

$$m_y[k] = \text{if} \left(k = 0, \frac{A\tau}{T} \left| H \left(\frac{k}{T} \right) \right|, \left| \frac{2A}{\pi k} \sin \left(\frac{\pi k \tau}{T} \right) \right| \left| H \left(\frac{k}{T} \right) \right| \right) \quad \text{em } [^\circ] \quad (27)$$

$$\theta_y[k] = -\text{mod} \left(\frac{180k\tau}{T} + \text{if} \left(\sin \left(\frac{\pi k \tau}{T} \right) < 0, 180, 0 \right) + \angle H \left(\frac{k}{T} \right), 180 \right) \quad (28)$$

onde $\text{mod}(x, y)$ é o operador que retorna o resto da divisão de x por y (x modulo y), tendo o resultado o mesmo sinal que x e onde $\text{if}(\text{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

De (27) e (28):



Séries de Fourier - Exemplo

(d) Quando um multíteste está comutado para a escala DC, ele mede o nível médio ou a componente de frequência zero do sinal aplicado aos seus terminais. Um multíteste comutado para escala DC e conectado à saída $y(t)$ mede portanto (ver equação (26)):

$$y_{DC} = \frac{A\tau}{T} \left| H\left(\frac{0}{T}\right) \right| = 2.000 V_{DC}$$

(e) Um multíteste *true RMS* mede o **valor eficaz**, i.e., o RMS (*Root Mean Square*) do sinal $u(t)$ aplicado aos seus terminais através da expressão do domínio tempo (ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Valor_eficaz):

$$u_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (29)$$

onde o período de integração T é tanto maior quanto menor for a frequência do harmônico fundamental do sinal $u(t)$. Alternativamente, o **Teorema de Parseval** (ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Parseval) estabelece que a potência (e portanto, o valor RMS) de um sinal é a mesma tanto no domínio tempo como no domínio frequência. E portanto, se determinarmos o espectro unilateral de $u(t)$ através de sua SF trigonométrica compacta, o valor RMS de $u(t)$ pode ser obtido da magnitude $m_u[k]$ das M componentes espectrais do espectro unilateral de $u(t)$, com $k = 0, 1, \dots, M$, através da expressão do domínio frequência:

$$u_{RMS} = \sqrt{(m_u[0])^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M (m_u[k])^2} \quad (30)$$

Determinando o valor RMS de $y(t)$ através de (29), sendo $y(t)$ dado por (26), com $T = 5 \mu s$:

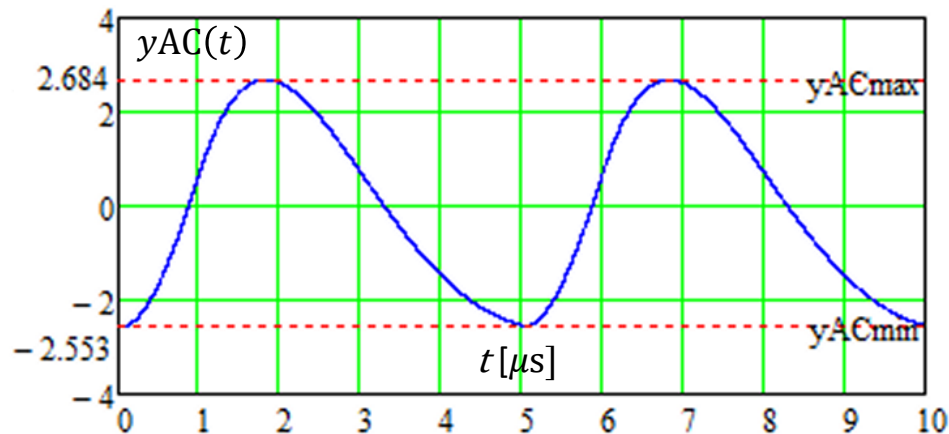
$$y_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T y^2(t) dt} = 2.711 V_{RMS}$$

Determinando o valor RMS de $y(t)$ através de (30), sendo $m_y[k]$ dado por (27), com $M = 50$:

$$y_{RMS} = \sqrt{(m_y[0])^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M (m_y[k])^2} = 2.711 V_{RMS}$$

Séries de Fourier - Exemplo

(f) O sinal de *ripple* $y_{AC}(t)$ (componente AC) que um osciloscópio mede na saída $y(t)$ quando o canal de entrada do osciloscópio está configurado para acoplamento AC é o sinal $y(t)$ dado por (26) mas com a componente DC eliminada. Isto ocorre porque, quando o canal de entrada do osciloscópio está configurado para acoplamento AC, um capacitor é colocado em série com o caminho do sinal e o capacitor bloqueia a componente DC. Portanto, $y_{AC}(t) = y(t) - \frac{A\tau}{T} \left| H\left(\frac{0}{T}\right) \right|$ e seu gráfico resulta em:



(g) A tensão pico a pico da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$ resulta da inspeção do gráfico de $y_{AC}(t)$ obtida em (f), e é determinada da seguinte forma:

$$y_{ACmax} = 2.684 \text{ V} \quad y_{ACmin} = -2.553 \text{ V}$$

$$y_{ACpp} = y_{ACmax} - y_{ACmin} = 5.237 \text{ V}_{pp}$$

(h) O valor RMS de $y_{AC}(t)$ ($y_{AC}(t)$ já foi determinado em (f)) é obtido de (30) com a componente DC zerada sendo $m_y[k]$ dado por (27), com $M = 50$:

$$y_{ACRMS} = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^M (m_y[k])^2} = 1.830 \text{ V}_{RMS}$$

(i) A distorção harmônica total (THD – *Total Harmonic Distortion*) de um sinal $u(t)$ mede percentualmente o quanto o sinal se afasta do formato senoidal no domínio tempo. Simultaneamente a THD mede o quanto o espectro de $u(t)$ é poluído por componentes espectrais harmônicas distintas da componente fundamental. Se determinarmos o espectro unilateral de $u(t)$ através de sua SF trigonométrica compacta, a THD de $u(t)$ pode ser obtida da magnitude $m_u[k]$ das M componentes espectrais do espectro unilateral de $u(t)$, com $k = 0, 1, \dots, M$, através da seguinte expressão:

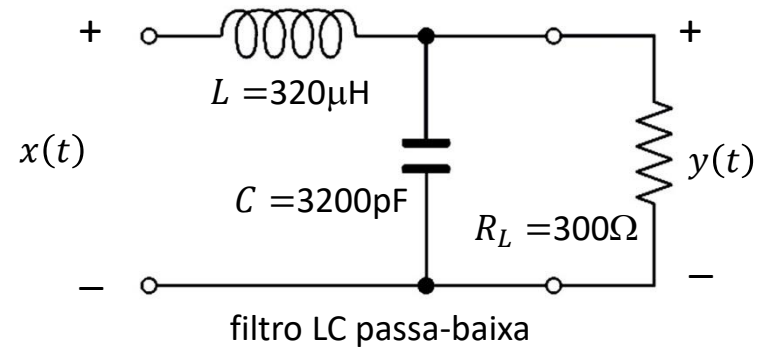
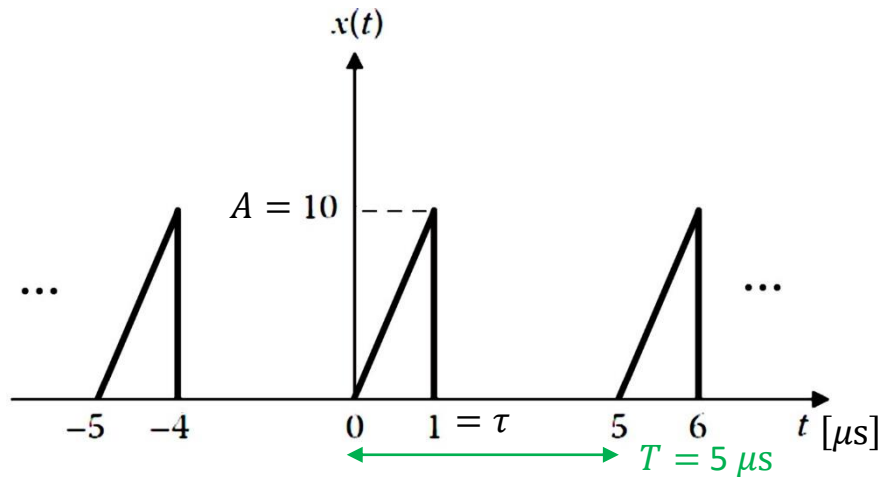
$$THD = 100 \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^M (m_u[k])^2}{(m_u[1])^2}} \quad (31)$$

Determinando a THD de $y(t)$ através de (31), sendo $m_y[k]$ dado por (27), com $M = 50$:

$$THD = 100 \sqrt{\frac{\sum_{k=2}^M (m_y[k])^2}{(m_y[1])^2}} = 20.459 \%$$

Homework

O circuito de comutação de uma fonte chaveada gera o trem de pulsos periódico $x(t)$ de período T , conforme mostra a figura abaixo. O sinal $x(t)$ é aplicado a um filtro LC passa-baixa, que atenua os harmônicos do espectro do sinal $x(t)$ e transfere sem atenuação a componente DC do espectro de $x(t)$ para a resistência de carga R_L na saída $y(t)$.



Pede-se: (a) Plote para $0 < t < 2T$ o sinal $y(t)$ na saída do filtro-baixa representando $x(t)$ pela sua SF trigonométrica compacta e determinando $y(t)$ a partir da interação das 50 primeiras componentes espectrais do espectro unilateral de $x(t)$ com a função de transferência $H(\omega)$ do filtro. (b) Plote em um mesmo gráfico a resposta $y(t)$ obtida em (a) e a excitação $x(t)$ representada pela sua SF trigonométrica compacta. (c) Determine e plote a magnitude e a fase das 50 primeiras componentes espectrais do espectro unilateral do sinal $y(t)$ (d) Quantos volts DC um multíteste mede na saída $y(t)$? (e) Quantos volts RMS um multíteste *true* RMS mede na saída $y(t)$? (f) Plote o sinal de *ripple* (componente AC) que um osciloscópio mede na saída $y(t)$ quando o canal de entrada do osciloscópio está configurado para acoplamento AC. (g) Determine a tensão pico a pico da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$. (h) Determine o valor RMS da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$. (i) Determine a distorção harmônica total (THD – *Total Harmonic Distortion*) da componente AC (*ripple*) do sinal $y(t)$.

Dica: Para obter as primitivas nas integrais que determinam os coeficientes $a_x[k]$ e $b_x[k]$ (equações (5) e (6)) use as equações 247 e 237 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/TOI.pdf> .

Propriedades gerais de SFs

Linearity	$\alpha x(t) + \beta y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \alpha c_x[k] + \beta c_y[k]$
Time Shifting	$x(t - t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} e^{-j2\pi kt_0/T} c_x[k]$
Frequency Shifting	$e^{j2\pi k_0 t/T} x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_x[k - k_0]$
Conjugation	$x^*(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_x^*[-k]$
Time Differentiation	$\frac{d}{dt}(x(t)) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} (j2\pi k/T) c_x[k]$
Time Reversal	$x(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_x[-k]$
Time Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \frac{c_x[k]}{j2\pi k/T}, \quad k \neq 0 \quad \underline{\text{if } c_x[0] = 0}$
Parseval's Theorem	$\frac{1}{T} \int_T x(t) ^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] ^2$
Multiplication – Convolution Duality	$x(t)y(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_y[m]c_x[k-m] = c_x[k] * c_y[k]$ $x(t) \otimes y(t) = \int_T x(\tau)y(t-\tau) d\tau \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} T c_x[k]c_y[k]$
Change of Period	If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_x[k]$ and $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_{xm}[k]$ $, c_{xm}[k] = \begin{cases} c_x[k/m], & k/m \text{ an integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
Time Scaling	If $x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_x[k]$ and $z(t) = x(mt) \xleftrightarrow{\mathcal{FS}} c_z[k]$ $c_z[k] = \begin{cases} c_x[k/m], & k/m \text{ an integer} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$

Fourier Series (FS) Symmetry Conditions

Type of Symmetry	Trigonometric FS Coefficients	Exponential FS Coefficients	Comments
Even periodic $x(t) = x(-t)$	$a_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \cos(2\pi k f_0 t) dt$ $b_k = 0$	$c_k = \frac{1}{2} a_k$ $c_k \text{ has real value}$	Phase of c_k is either zero or π
Odd periodic $x(t) = -x(-t)$	$a_k = 0$ $b_k = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} x(t) \sin(2\pi k f_0 t) dt$	$c_k = -j \frac{1}{2} b_k$ $c_k \text{ has imaginary values}$	Phase of c_k is either $\pi/2$ or $-\pi/2$
Half-wave even symmetry $x(t) = x\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_{2k} \text{ and } b_{2k} \text{ may have nonzero values but}$ $a_{2k+1} = 0, \quad b_{2k+1} = 0$	$c_{2k} \neq 0$ $c_{2k+1} = 0$	
Half-wave odd symmetry $x(t) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$	$a_{2k+1} \text{ and } b_{2k+1} \text{ may have nonzero values but}$ $a_{2k} = 0, \quad b_{2k} = 0$	$c_{2k} = 0$ $c_{2k+1} \neq 0$	

Apêndice A

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	