



Série de Fourier de sinais periódicos no tempo discreto. Transformada de Fourier - análise espectral no domínio frequência angular ω de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo.



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

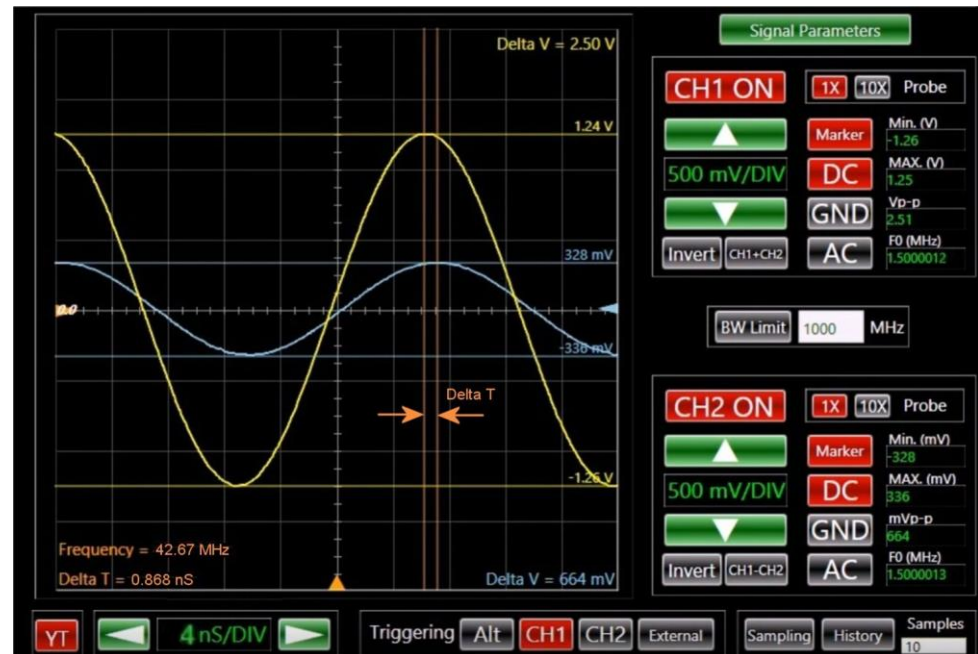
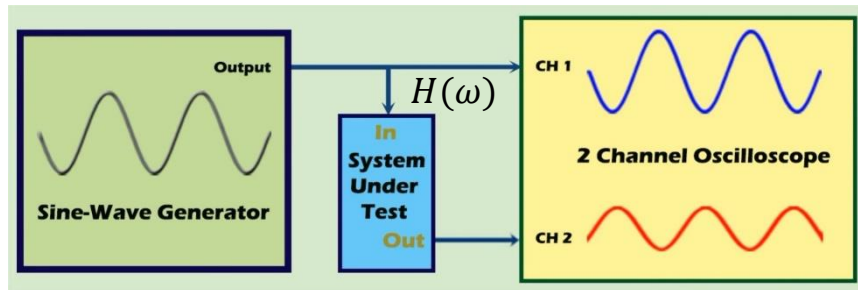
ELC1115 – Sinais e Sistemas

Prof. Fernando DeCastro

Série de Fourier de sinais no tempo discreto

No Cap III.1 discutimos a Série Fourier em tempo contínuo (SFTC) como um método para representar sinais periódicos no tempo contínuo e determinar a resposta de um sistema LTI analógico a uma excitação periódica (exemplo da fonte chaveada). Neste capítulo, analisaremos a SF em tempo discreto (SFTD) aplicada à representação de sinais periódicos no tempo discreto. A abordagem é semelhante à vista no Cap III.1, valendo aqui a maioria dos conceitos básicos lá vistos, com algumas diferenças significativas conforme veremos. Na realidade a SFTD é muitíssimo similar (senão idêntica) à Transformada Discreta de Fourier, a ser analisada adiante em capítulo posterior das notas de aula, quando retomaremos a discussão sobre a similaridade entre a SFTD e a Transformada Discreta de Fourier.

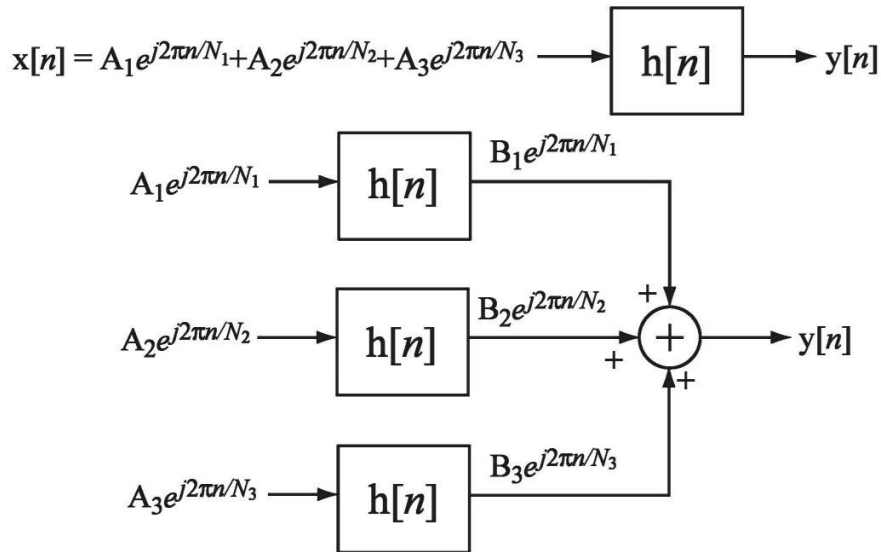
Vimos nos capítulos anteriores das notas de aula que, se um sistema LTI em tempo contínuo (sistema analógico) é excitado por uma cossenoide (ou senóide), a resposta também será uma cossenoide, de mesma frequência da excitação, mas com magnitude e fase que respectivamente dependem da magnitude e da fase da função de transferência $H(\omega)$ do sistema, conforme mostra a figura.



Série de Fourier de sinais no tempo discreto

De mesma forma que para um sistema analógico, se um sistema LTI em tempo discreto (sistema digital) é excitado por uma cossenoide (ou senóide), a resposta também será uma cossenoide (ou senóide), com a mesma frequência, mas de magnitude e fase que dependem da função de transferência do sistema. Se um sistema LTI é excitado por uma soma (= superposição) de sinais, a resposta geral é a soma das respostas para cada um dos sinais individualmente.

A abordagem que representa sinais discretos no tempo através de série de Fourier em tempo discreto (SFTD) nada mais faz do que expressar sinais periódicos arbitrários como uma combinação linear (= superposição) de senóides, de valor real ou complexo (exponenciais complexas). Especificamente, esta abordagem faz uso da superposição de sinais para encontrar a resposta de qualquer sistema LTI a qualquer sinal arbitrário através da soma das respostas à exponenciais complexas individuais, conforme mostra a figura.



$h[n]$ é a resposta ao impulso do sistema LTI.

N_i é o período da i -ésima exponencial complexa.

A_i e B_i são fasores da forma $|A_i|e^{j\angle A_i}$ e $B_i = |B_i|e^{j\angle B_i}$.

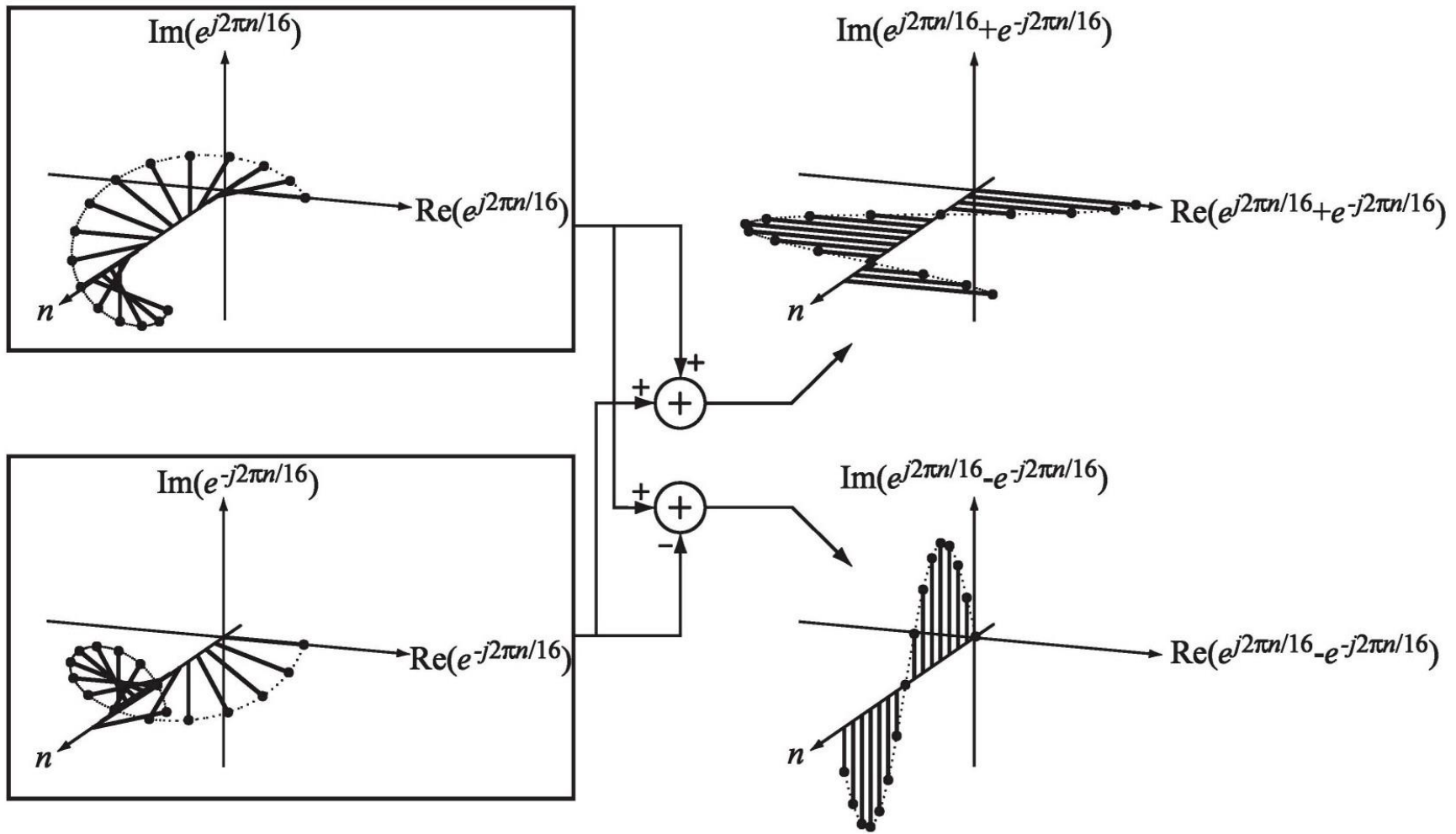
Esta figura mostra que a resposta $y[n]$ de um sistema LTI a um sinal $x[n]$ é equivalente à soma das respostas individuais do sistema à exponenciais complexas cuja soma (= superposição) é equivalente ao sinal $x[n]$.

Mesmo que $x[n]$ seja uma sequência de valores reais, ainda assim a superposição de exponenciais complexas é capaz de representar $x[n]$ porque duas exponenciais complexas conjugadas são capazes de sintetizar senóides e cossenoides reais através das seguintes relações trigonométricas (ver Apêndice A):

$$\cos(2\pi n/N_i) = \frac{e^{j2\pi n/N_i} + e^{-j2\pi n/N_i}}{2} \quad \sin(2\pi n/N_i) = \frac{e^{j2\pi n/N_i} - e^{-j2\pi n/N_i}}{2j}$$

Série de Fourier de sinais no tempo discreto

Por exemplo, a figura mostra a superposição através da soma e a superposição através de subtração entre as exponenciais complexas $e^{j2\pi n/16}$ e $e^{-j2\pi n/16}$ para respectivamente formar as funções reais $2\cos(2\pi n/16)$ e $2j\text{sen}(2\pi n/16)$:



Série de Fourier de sinais no tempo discreto

Representando então a sequência $x[n]$ de período N por uma superposição de exponenciais complexas, temos:

$$x[n] = \sum_{k=n_0}^{n_0+N-1} c_x[k] e^{j2\pi kn/N} \quad (1)$$

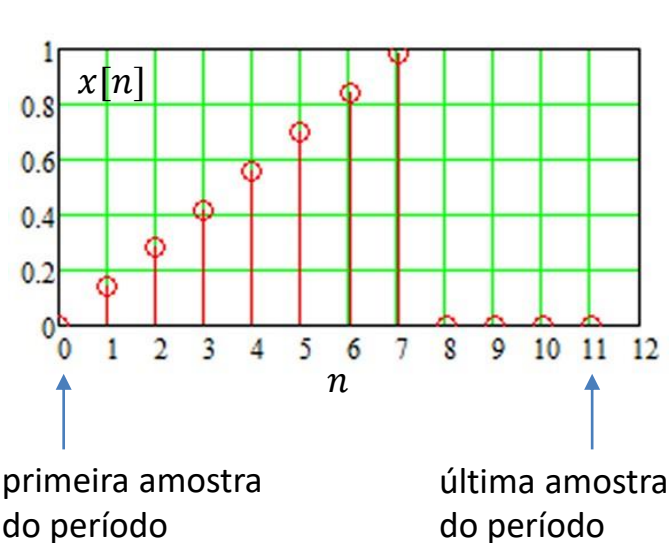
onde n_0 é um valor inteiro e arbitrário, sendo usualmente adotado $n_0 = 0$. Note a semelhança com a SF Exponencial para $x(t)$ no tempo contínuo:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \quad (2)$$

Os coeficientes $c_x[k]$ em (1), que definem o espectro discreto de $x[n]$, são dados por:

$$c_x[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N} \quad (3)$$

Exemplo: Considere a sequência $x[n]$ de período $N = 12$ conforme mostra a figura.



n	$x[n]$
0	0
1	0.14
2	0.28
3	0.42
4	0.56
5	0.7
6	0.84
7	0.98
8	0
9	0
10	0
11	0

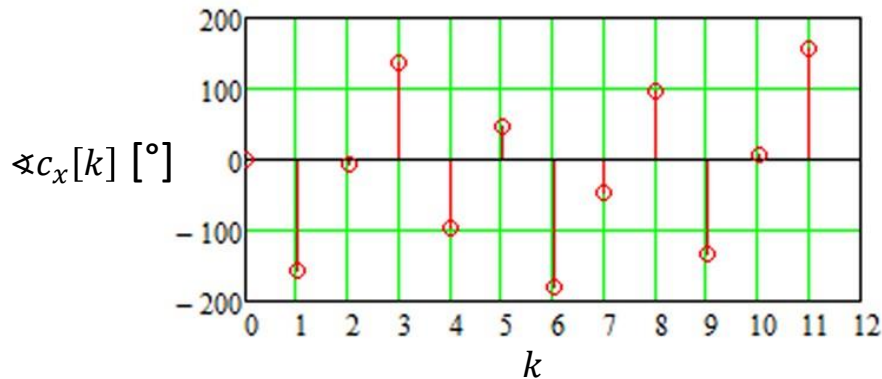
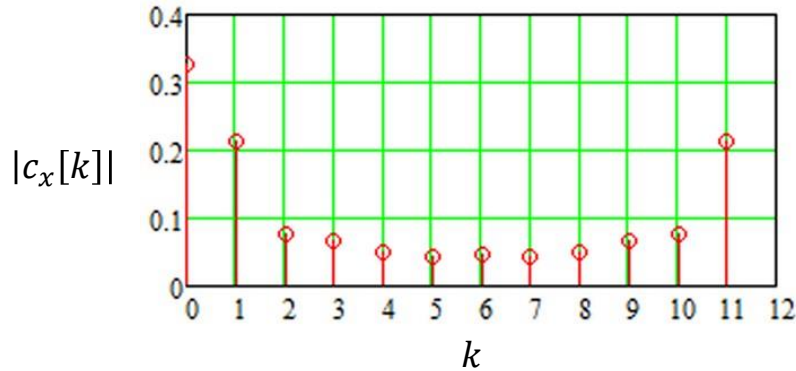
Pede-se: (a) Determine e plote a magnitude e a fase do espectro discreto $c_x[k]$ de $x[n]$. (b) Reconstrua $x[n]$ no tempo discreto a partir de suas componentes espectrais $c_x[k]$. (c) A partir da expressão de $x[n]$ obtida em (b) plote $x[n]$ por dois períodos N consecutivos a partir da origem, isto é, plote $x[n]$ para $n = 0, 1, \dots, 2N - 1$.

Série de Fourier de sinais no tempo discreto

Solução: (a) De (3) e dos valores da sequência $x[n]$ dados no enunciado temos:

$$c_x[k] = \frac{1}{12} \sum_{n=0}^{11} x[n] e^{-j2\pi kn/12} \Rightarrow$$

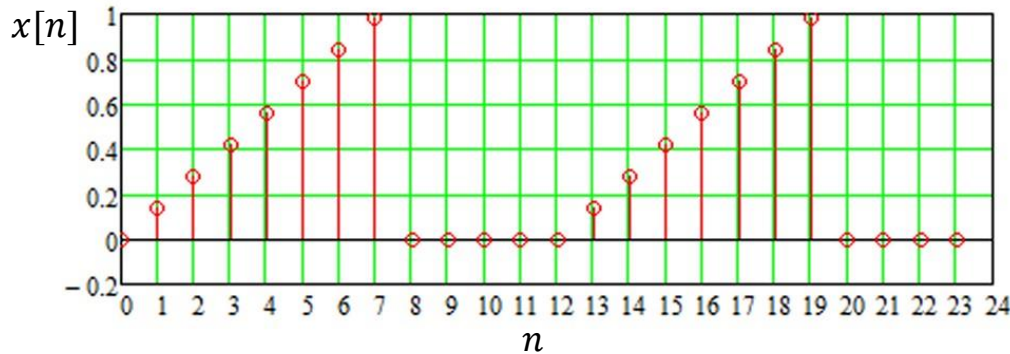
k	$c_x[k]$
	0
0	0.327
1	-0.193-0.09i
2	0.076-0.01i
3	-0.047+0.047i
4	$-5.833 \cdot 10^{-3} - 0.051i$
5	0.029+0.031i
6	-0.047
7	0.029-0.031i
8	$-5.833 \cdot 10^{-3} + 0.051i$
9	-0.047-0.047i
10	0.076+0.01i
11	-0.193+0.09i



Série de Fourier de sinais no tempo discreto

(b)&(c) De (1) e dos valores de $c_x[k]$ obtidos em (a), e para $n = 0, 1, \dots, 23$, temos:

$$x[n] = \sum_{k=0}^{11} c_x[k] e^{j2\pi kn/12} \quad \Rightarrow$$

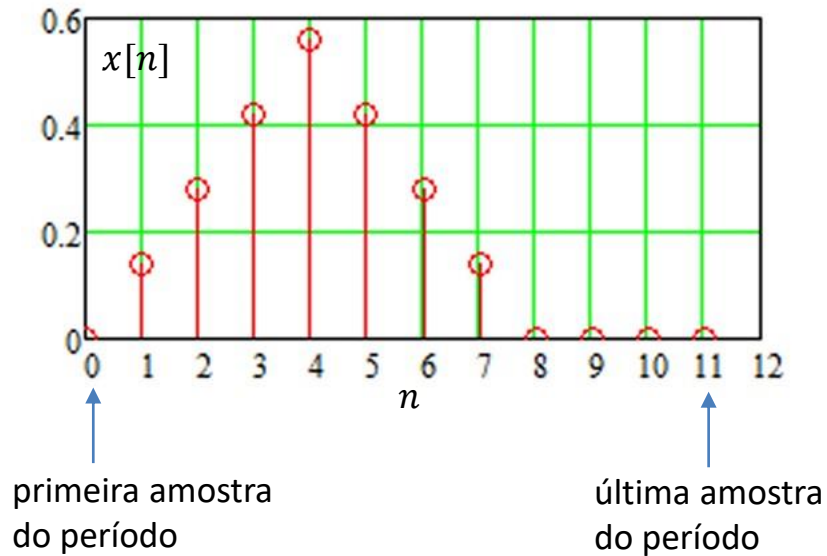


n	$x[n]$
0	0
1	0.14
2	0.28
3	0.42
4	0.56
5	0.7
6	0.84
7	0.98
8	0
9	0
10	0
11	0
12	0
13	0.14
14	0.28
15	0.42
16	0.56
17	0.7
18	0.84
19	0.98
20	0
21	0
22	0
23	0

Note que a reconstrução de $x[n]$ discreta a partir de suas componentes espectrais $c_x[k]$ **resulta em uma reconstrução exata**. Esta é uma diferença significativa com relação à reconstrução de $x(t)$ contínua a partir de suas componentes espectrais $c_x[k]$, que sempre resulta apenas em uma reconstrução aproximada em consequência da distorção de Gibbs, a menos que se utilize infinitas componentes espectrais na reconstrução de $x(t)$.

Homework

Considere a sequência $x[n]$ de período $N = 12$ conforme mostra a figura.



n	$x[n]$
0	0
1	0.14
2	0.28
3	0.42
4	0.56
5	0.42
6	0.28
7	0.14
8	0
9	0
10	0
11	0

Pede-se: **(a)** Determine e plote a magnitude e a fase do espectro discreto $c_x[k]$ de $x[n]$. **(b)** Reconstrua $x[n]$ no tempo discreto a partir de suas componentes espectrais $c_x[k]$. **(c)** A partir da expressão de $x[n]$ obtida em (b) plote $x[n]$ por dois períodos N consecutivos a partir da origem, isto é, plote $x[n]$ para $n = 0, 1, \dots, 2N - 1$.

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

Conforme visto no Cap III.1 das notas de aula, a SF Exponencial representa um sinal $x(t)$ real de período T através da superposição de exponenciais complexas conforme (4) abaixo. Os coeficientes $c_x[k]$ são dados por (5)-(10) e representam a magnitude $|c_x[k]|$ e a fase $\angle c_x[k]$ das M primeiras componentes espectrais do espectro bilateral de $x(t)$:

$$x(t) = \sum_{k=-M}^M c_x[k] e^{j2\pi kt/T} \quad (4)$$

onde

$$c_x[0] = a_x[0] \quad (5)$$

$$c_x[k] = \frac{a_x[k] - jb_x[k]}{2} \quad (6)$$

$$c_x[-k] = c_x^*[k] \quad (7)$$

sendo $\{\cdot\}^*$ o operador que retorna o complexo conjugado de seu argumento

e onde

$$a_x[0] = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt \quad (8)$$

$$a_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \cos(2\pi kt/T) dt \quad (9)$$

$$b_x[k] = \frac{2}{T} \int_0^T x(t) \sin(2\pi kt/T) dt \quad (10)$$

Combinando algebricamente as equações (5) a (10) os coeficientes $c_x[k]$ podem alternativamente ser dados por

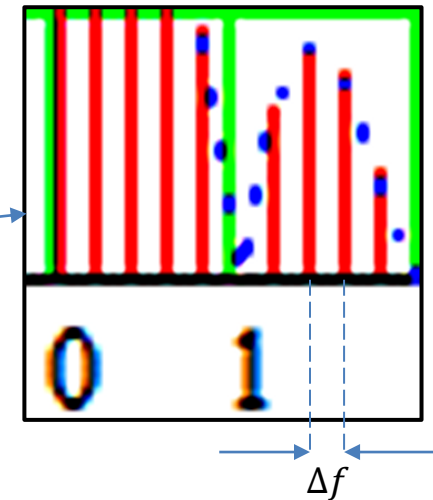
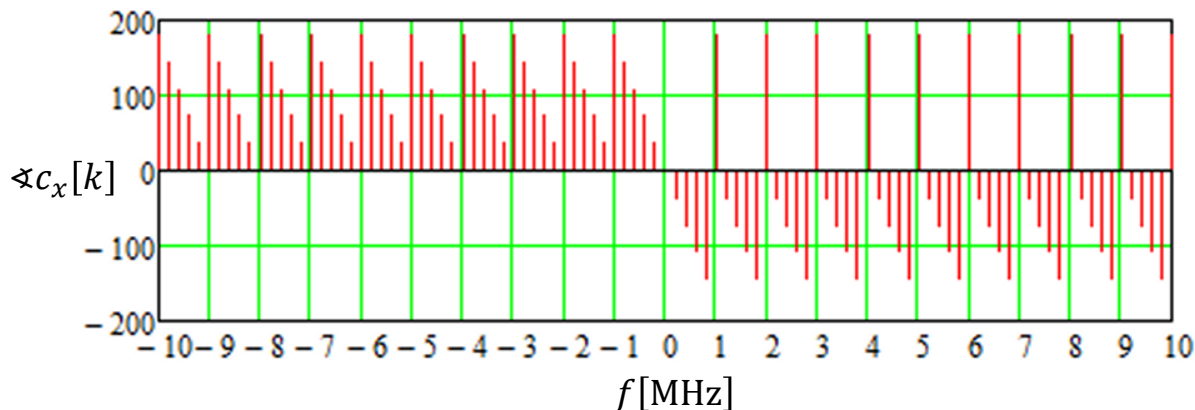
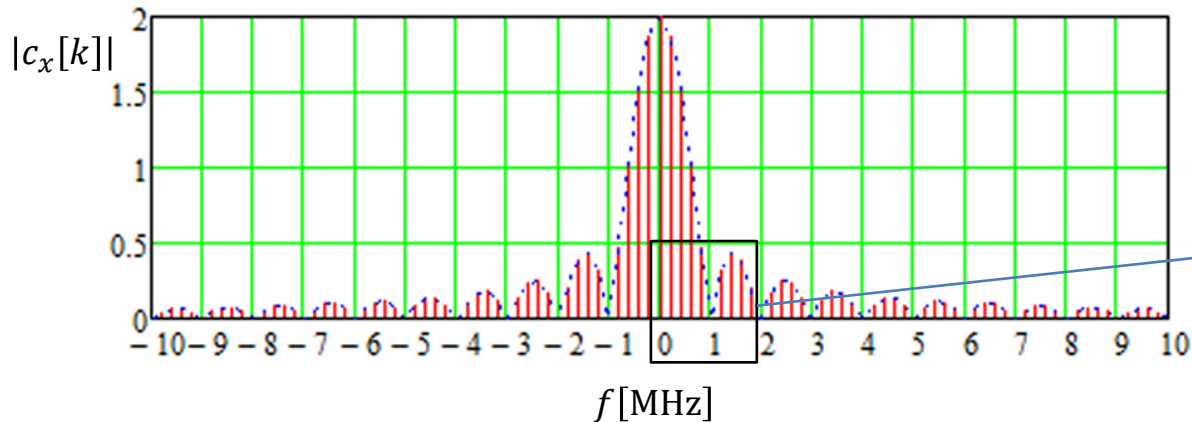
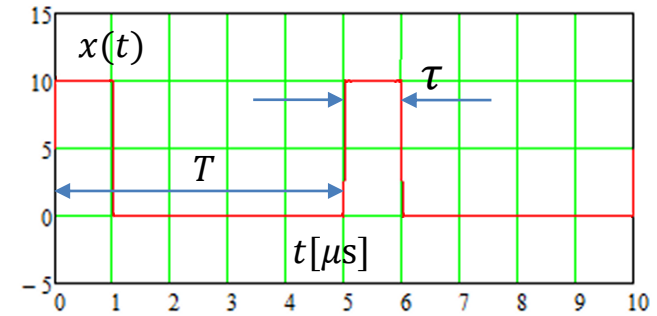
$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{-j2\pi kt/T} dt \quad (11)$$

onde t_0 é um instante arbitrário, sendo usualmente adotado $t_0 = 0$ ou $t_0 = -T/2$.

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

Consideremos o trem de pulsos $x(t)$ de duração $\tau = 1 \mu\text{s}$, período $T = 5 \mu\text{s}$ e amplitude $A = 10\text{V}$, já analisado no Cap III.1 das notas de aula, conforme mostra a figura:

A magnitude $|c_x[k]|$ e a fase $\angle c_x[k]$ das componentes espectrais do espectro bilateral de $x(t)$, representadas pelos coeficientes $c_x[k]$ dados por (5)-(10), são mostrados abaixo para uma faixa espectral de 0 a 10 MHz:

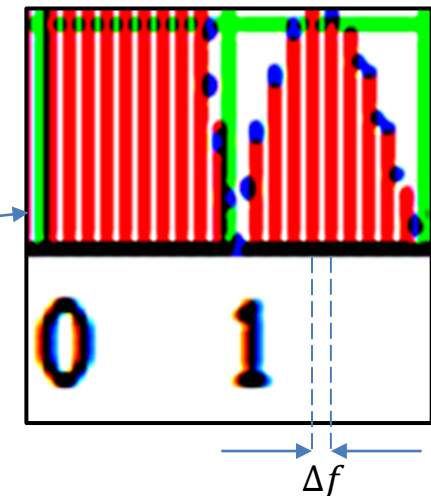
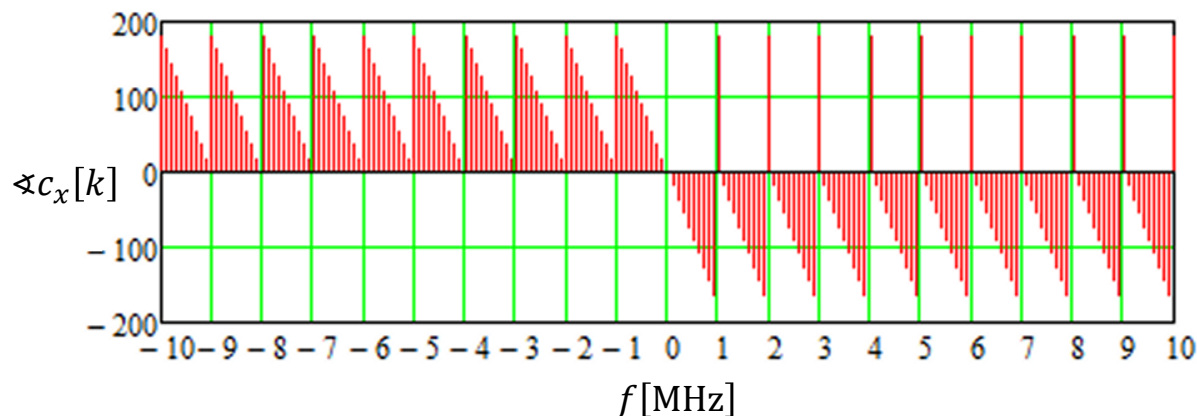
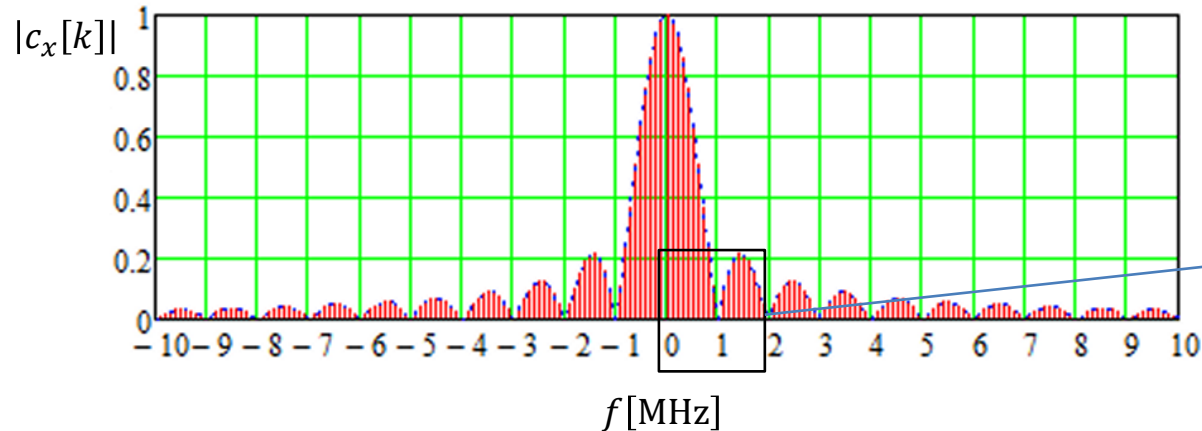
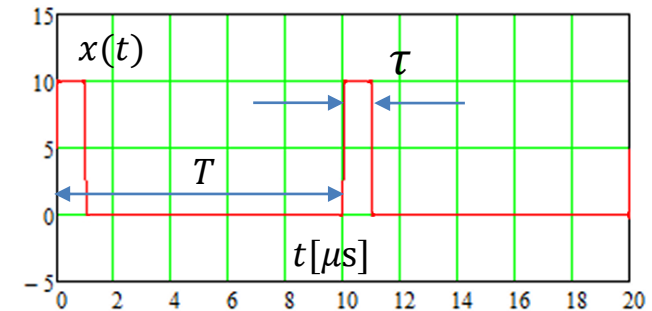


Note que duas componentes espectrais adjacentes no domínio frequência são separadas de $\Delta f = 1/T = 200 \text{ kHz}$ para $T = 5 \mu\text{s}$.

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

Vamos agora aumentar o período do trem de pulsos $x(t)$ para $T = 10 \mu\text{s}$ mantendo a duração $\tau = 1 \mu\text{s}$ e a amplitude $A = 10\text{V}$, conforme mostra a figura:

A magnitude $|c_x[k]|$ e a fase $\angle c_x[k]$ das componentes espectrais do espectro bilateral de $x(t)$, representadas pelos coeficientes $c_x[k]$ dados por (5)-(10), são mostrados abaixo para uma faixa espectral de 0 a 10 MHz:

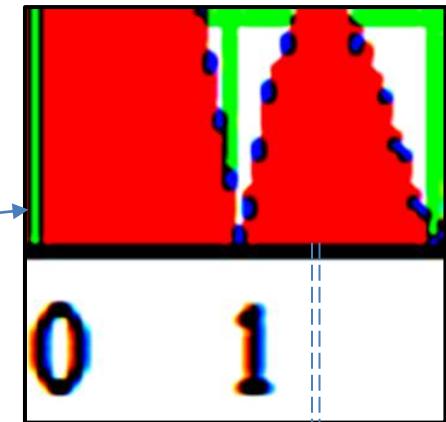
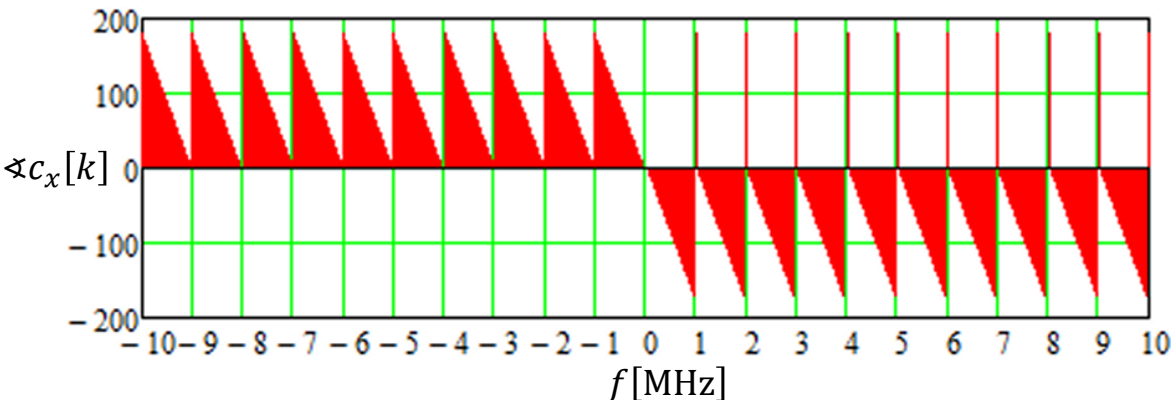
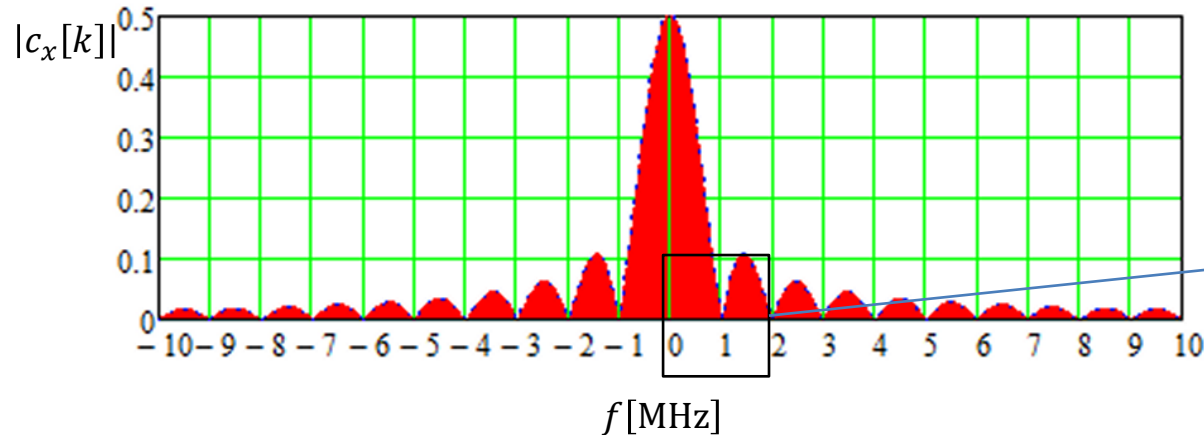
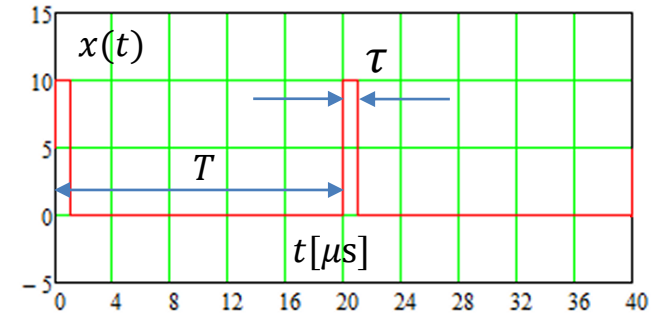


Dois componentes espectrais adjacentes no domínio frequência são separados de $\Delta f = 1/T = 100 \text{ KHz}$ para $T = 10 \mu\text{s}$. Portanto, com o aumento do período T ocorreu uma redução da separação Δf entre as componentes espectrais, se comparado ao slide anterior.

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

Vamos agora aumentar o período do trem de pulsos $x(t)$ para $T = 20 \mu s$ mantendo a duração $\tau = 1 \mu s$ e a amplitude $A = 10V$, conforme mostra a figura:

A magnitude $|c_x[k]|$ e a fase $\angle c_x[k]$ das componentes espectrais do espectro bilateral de $x(t)$, representadas pelos coeficientes $c_x[k]$ dados por (5)-(10), são mostrados abaixo para uma faixa espectral de 0 a 10 MHz:



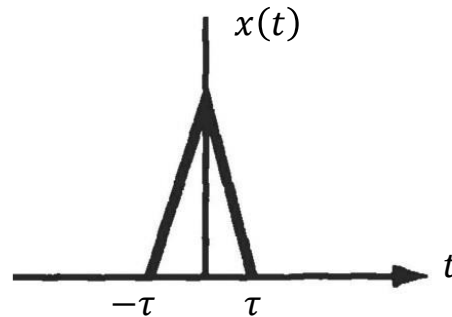
Duas componentes espectrais adjacentes no domínio frequência são separadas de $\Delta f = 1/T = 50 \text{ KHz}$ para $T = 20 \mu s$.

Com o aumento do período T a separação Δf entre as componentes espectrais torna-se tão pequena que o espectro tende a ser contínuo visualmente.

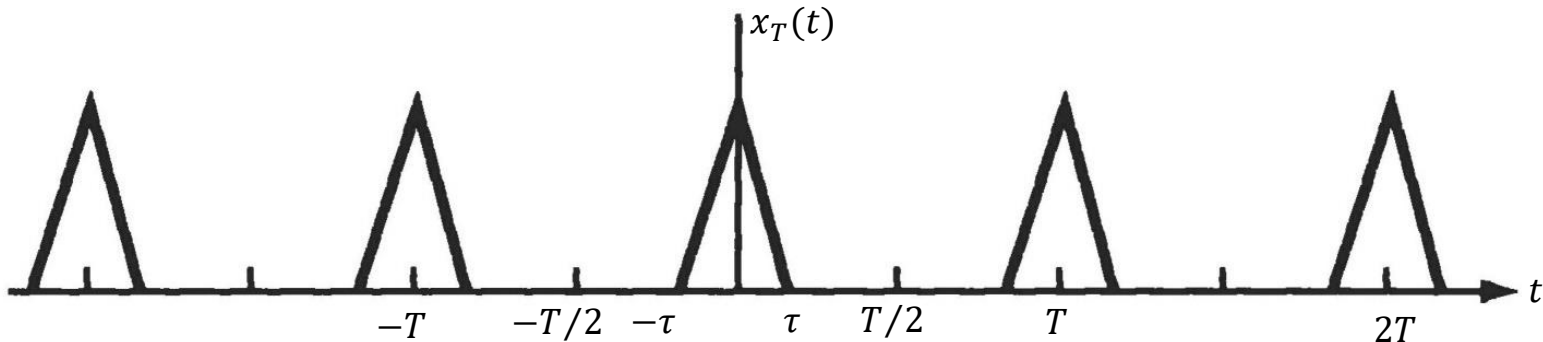
Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

Portanto ao aumentar o período de uma função $x(t)$ tal que $T \rightarrow \infty$, a separação Δf entre as componentes espectrais $c_x[k]$ torna-se de valor infinitesimal df e o espectro de $x(t)$ torna-se uma função contínua $c_x(f)$ no domínio frequência f . Mas uma função $x(t)$ de período T infinito é uma função que não se repete no tempo t , e, assim, é uma função aperiódica. Desta maneira, **funções $x(t)$ aperiódicas e contínuas no domínio tempo t possuem um espectro contínuo $c_x(f)$ no domínio frequência f** . Passamos agora a adaptar a SF exponencial dada pela equação (4) de forma que ela possa representar o espectro contínuo de sinais aperiódicos.

Seja $x(t)$ um sinal aperiódico de duração finita de forma que $x(t) = 0$ para $|t| > \tau$. A figura abaixo mostra, a título de exemplo, uma possível forma funcional para um sinal $x(t)$ que obedece esta condição.



Seja $x_T(t)$ um sinal periódico de período T formado através da repetição periódica de $x(t)$ ao longo do eixo do tempo t com um período de repetição T conforme mostra a figura abaixo.



Note que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = x(t) \quad (12)$$

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

A SF exponencial de $x_T(t)$ é dada por (4) com $M = \infty$, sendo os coeficientes $c_x[k]$ dados por (11), conforme segue:

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{j2\pi kt/T} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{jk\omega t} \quad \text{sendo } \omega = 2\pi/T \quad (13)$$

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x_T(t) e^{-j2\pi kt/T} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (14)$$

Dado que $x_T(t) = x(t)$ para $|t| < T/2$ (ver gráficos no slide anterior) e dado que $x(t) = 0$ fora do referido intervalo, então a equação (14) pode ser reescrita como

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (15)$$

A título de tornar compacta a representação algébrica da equação (15), vamos definir a função $X(\omega)$ dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16)$$

de modo que, usando a definição (16) na equação (15), os coeficientes $c_x[k]$ passam a ser dados por

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega t} dt = \frac{1}{T} X(k\omega) \quad (17)$$

Substituindo (17) em (13)

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k\omega) e^{jk\omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega) e^{jk\omega t} \omega \quad (18)$$

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{jk\omega t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(k\omega) e^{jk\omega t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\omega) e^{jk\omega t} \omega \quad (18)$$

Ao aumentar o período de uma função $x_T(t)$ tal que $T \rightarrow \infty$ a função torna-se aperiódica. E, conforme vimos nos slides 10, 11 e 12, a condição $T \rightarrow \infty$ torna infinitesimal a separação Δf no domínio frequência entre as componentes espectrais $c_x[k]$, de tal forma que $\Delta f \rightarrow 0$ nesta condição. Portanto, $T \rightarrow \infty$ torna Δf um valor infinitesimal df . Equivalentemente, dado que $\omega = 2\pi f$, ao aumentar o período de uma função $x_T(t)$ tal que $T \rightarrow \infty$, a separação $\Delta\omega$ entre as componentes espectrais é tal que $\Delta\omega \rightarrow 0$, portanto tornando $\Delta\omega$ um valor infinitesimal $d\omega$.

Façamos então $T \rightarrow \infty$ em (18) de forma que a mesma represente um sinal aperiódico. Visto que $T \rightarrow \infty$ e dado que $\omega = 2\pi/T$, então ω se torna um valor infinitesimal $d\omega$, ou equivalentemente $\Delta\omega \rightarrow 0$. Nesta situação, (18) torna-se:

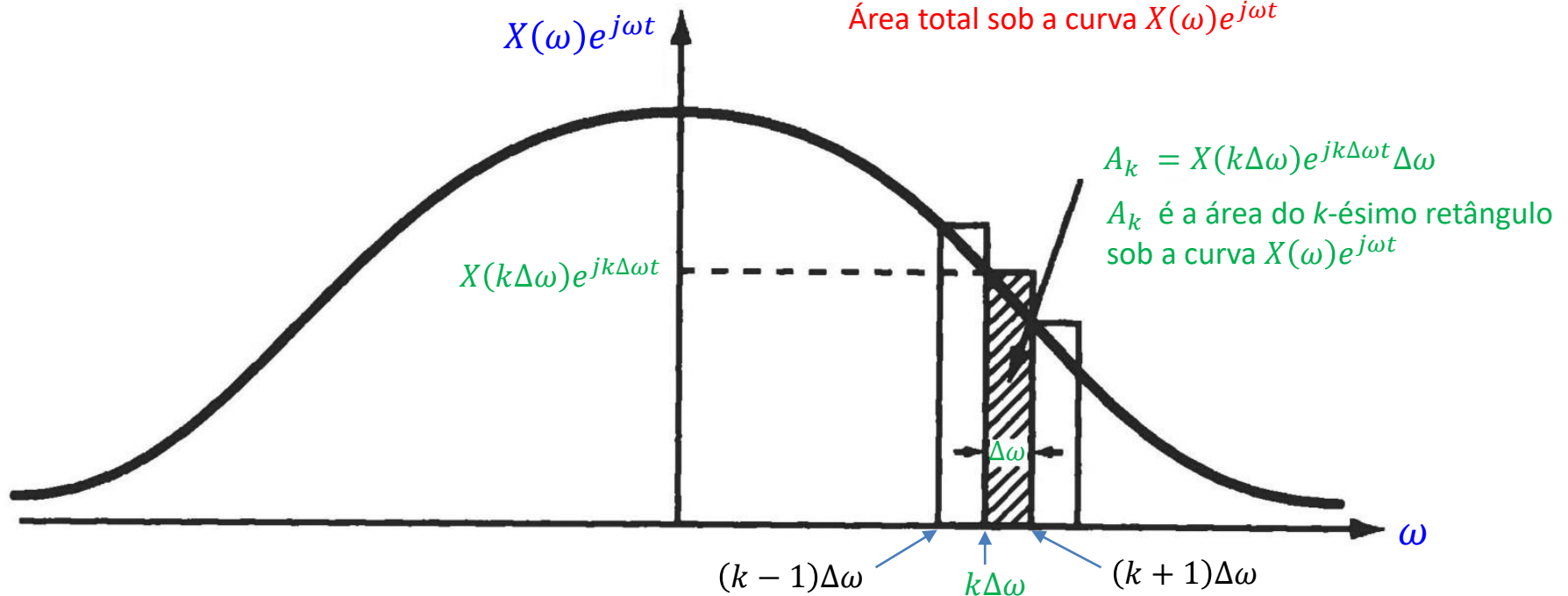
$$\lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad \text{onde} \quad \Delta\omega \rightarrow 0 \quad (19)$$

Usando a equação (12) $x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t)$ em (19) obtemos:

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega \quad (20)$$

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} x_T(t) = \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \underbrace{\frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega}_{\text{Área total sob a curva } X(\omega)e^{j\omega t}} \quad (20)$$



A análise da figura acima evidencia que para $\Delta\omega \rightarrow 0$ o somatório $\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega$ em (20) calcula a área total sob a curva $X(\omega)e^{j\omega t}$, e, portanto, calcula a integral da função $X(\omega)e^{j\omega t}$:

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(k\Delta\omega) e^{jk\Delta\omega t} \Delta\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (21)$$

Nota: O fato de a curva $X(\omega)e^{j\omega t} = \text{Re}\{X(\omega)e^{j\omega t}\} + j \text{Im}\{X(\omega)e^{j\omega t}\}$ ser uma curva de valor complexo não invalida a análise acima porque o sistema é LTI (e portanto vale a superposição de sinais) e, em consequência, a mesma análise acima pode ser feita separadamente para a parte real $\text{Re}\{\cdot\}$ e a parte imaginária $\text{Im}\{\cdot\}$ de $X(\omega)e^{j\omega t}$.

Transformada de Fourier - análise espectral de sinais não-periódicos no domínio tempo contínuo

Substituindo (21) em (20) obtemos

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (22)$$

sendo $X(\omega)$ dada por (16), conforme slide 14:

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (16)$$

Note que (22) e (16) contemplam um sinal $x(t)$ contínuo e aperiódico no domínio tempo t e um espectro $X(\omega)$ contínuo no domínio frequência ω , sendo $\omega = 2\pi f$. Note também que (22) e (16) resultam da adaptação das equações (13) e (14) do slide 14, abaixo reproduzidas. Estas equações são representativas da SF exponencial e contemplam um sinal $x_T(t)$ contínuo e de período T no domínio tempo t e um espectro $c_x[k]$ discreto no domínio frequência f , sendo $f = \omega/2\pi$.

$$x_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_x[k] e^{jk\omega t} \quad \text{sendo } \omega = 2\pi/T \quad (13)$$

$$c_x[k] = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_T(t) e^{-jk\omega t} dt \quad (14)$$

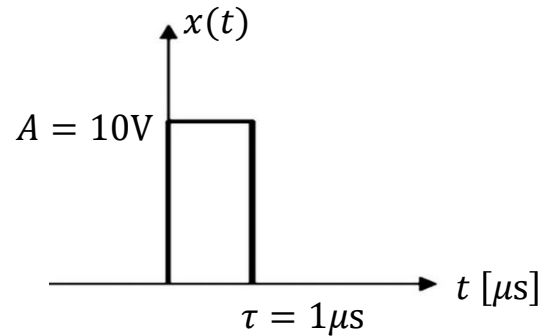
As equações (16) e (22) definem respectivamente o operador **Transformada Direta de Fourier $\mathcal{F}\{\cdot\}$** e o operador **Transformada Inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$** , conforme abaixo explicitado:

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (23)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (24)$$

Transformada de Fourier - Exemplos

Exemplo: Considere o pulso $x(t)$ aperiódico de duração $\tau = 1\mu\text{s}$ e amplitude $A = 10\text{V}$, conforme mostra a figura abaixo.



Pede-se: (a) Determine o espectro $X(\omega)$ de $x(t)$ através da operação $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ onde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ é o operador Transformada Direta de Fourier. **(b)** Plote a magnitude e a fase do espectro $X(f)$ no intervalo $-10/\tau < f < 10/\tau$, sendo $f = \omega/2\pi$.

Solução: (a) De (23) temos

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = A \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt$$

Da equação 259 de <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/TOI.pdf> temos que $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax}$ Daí, com $a = -j\omega$ e $x = t$, obtemos

$$\begin{aligned} X(\omega) &= A \int_0^{\tau} e^{-j\omega t} dt = A \left[\frac{-1}{j\omega} (e^{-j\omega t}) \right]_0^{\tau} = \frac{-A}{j\omega} [e^{-j\omega\tau} - 1] = \frac{A}{j\omega} [1 - e^{-j\omega\tau}] = \frac{A}{j\omega} [1 - e^{-j\omega\tau}] \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}}{e^{j\omega\frac{\tau}{2}}} = \\ &= A \frac{e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} [e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}]}{\frac{\omega}{2} 2j} = A\tau \frac{\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)} e^{-j\omega\frac{\tau}{2}} = A\tau \operatorname{sinc}\left(\omega\frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}, \text{ onde } \operatorname{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}. \end{aligned}$$

Ver Apêndice A

Transformada de Fourier - Exemplos

$$X(\omega) = A \tau \operatorname{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} \quad (25)$$

(b) Dado que $\omega = 2\pi f$, (25) pode ser reescrita como

$$X(f) = A \tau \operatorname{sinc}\left(2\pi f \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f \frac{\tau}{2}} = A \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau) e^{-j\pi f \tau} \quad (26)$$

Explicitando a magnitude $|X(f)|$ e a fase $\angle X(f)$ do espectro $X(f)$ dado por (26):

$$|X(f)| = |A \tau \operatorname{sinc}(\pi f \tau)| \quad (27) \qquad \angle X(f) = -\pi f \tau + \operatorname{if}(\operatorname{sinc}(\pi f \tau) < 0, \pi, 0) \quad (28)$$

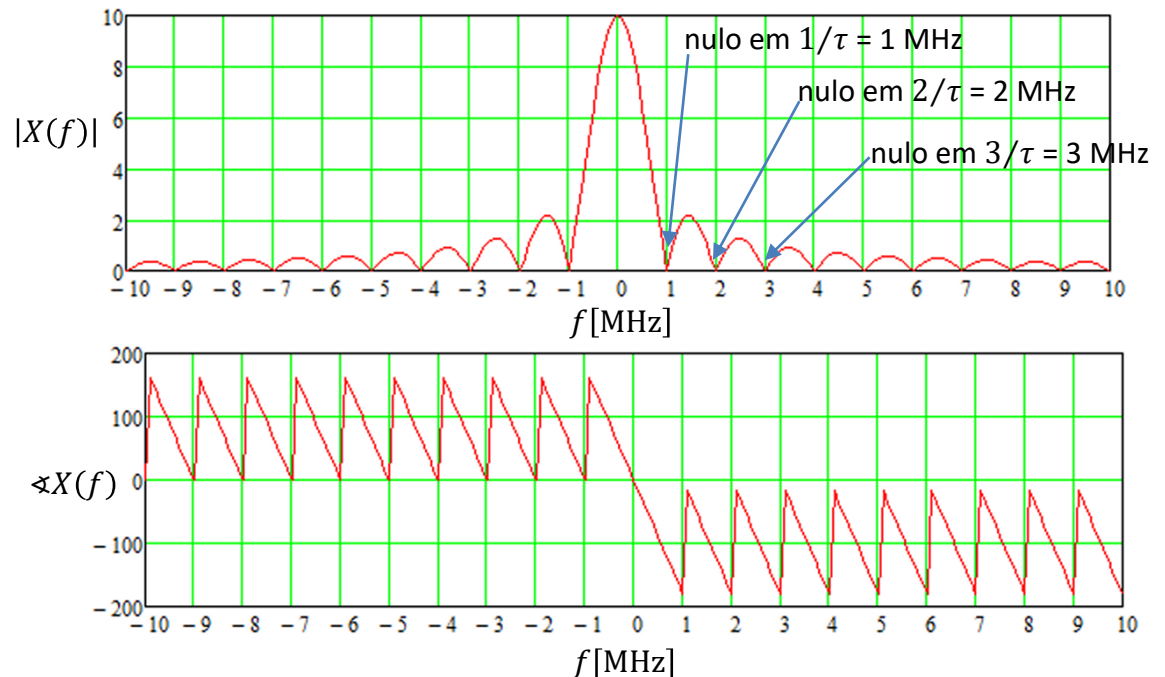
Convertendo (28) para resultar um gráfico em graus, ao invés de radianos, e limitando a excursão da fase em graus ao intervalo $-180^\circ < \angle X(f) < 180^\circ$:

$$\angle X(f) = -\operatorname{mod}(180f\tau + \operatorname{if}(\operatorname{sinc}(\pi f \tau) < 0, 180, 0), 180) \quad (29)$$

onde $\operatorname{mod}(x, y)$ é o operador que retorna o resto da divisão de x por y (x modulo y), tendo o resultado o mesmo sinal que x e onde $\operatorname{if}(\operatorname{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

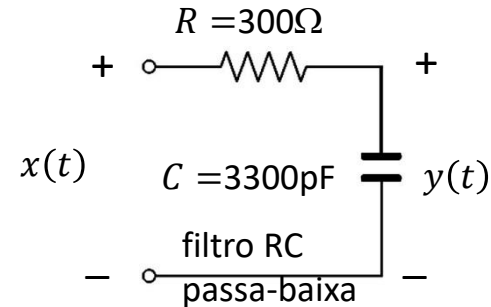
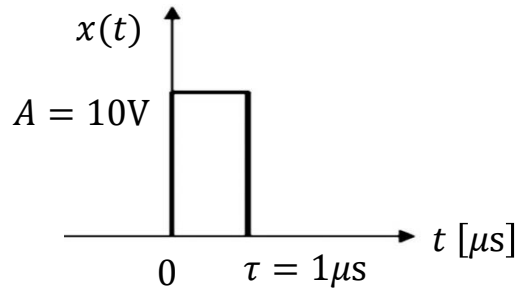
De (27) e (29) para $-10/\tau < f < 10/\tau$:

Note que da mesma forma que no caso periódico (ver slide 10 do Cap III.1 das notas de aula), um pulso $x(t)$ aperiódico de largura τ sempre resulta em um espectro com nulos em múltiplos inteiros de $1/\tau$.



Transformada de Fourier - Exemplos

Exemplo : Um pulso $x(t)$ aperiódico de duração $\tau = 1\mu s$ e amplitude $A = 10V$ é aplicado à entrada de um filtro RC passa-baixa, conforme mostra a figura abaixo.



Pede-se: (a) Determine o espectro $Y(\omega)$ de $y(t)$ através da operação $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, onde $H(\omega)$ é a função de transferência do filtro. **(b)** Plote a magnitude e a fase do espectro $Y(f)$ no intervalo $-10/\tau < f < 10/\tau$, sendo $f = \omega/2\pi$. **(c)** Determine e plote p/ $0 < t < 6\mu s$ a resposta $y(t)$ à excitação $x(t)$ através da operação $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$, onde $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ é o operador Transformada Inversa de Fourier. Em razão da complexidade analítica na obtenção da primitiva na integral para determinação de $\mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$, utilize na solução deste item a função ifourier() do software Matlab: “ifourier Inverse Fourier integral transform.

$f = \text{ifourier}(F)$ is the inverse Fourier transform of the symbolic expression or function F with default independent variable w . By default, the result f is a function of x . If $F = F(x)$, then f is returned as a function of the variable t , $f = f(t)$.”

Solução: (a) O espectro $X(\omega)$ do pulso $x(t)$ de amplitude A e duração τ é dado pela equação (25) (ver exemplo anterior). A função de transferência $H(\omega)$ do filtro é obtida do divisor de tensão entre o resistor R e a reatância $1/j\omega C$ do capacitor C , e resulta em

$$H(\omega) = \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} = \frac{1/RC}{\sqrt{(1/RC)^2 + \omega^2}} e^{-j \text{atan2}(\frac{1}{RC}, \omega)} \quad (30)$$

Daí, de (30) e (25) temos:

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega) = A\tau \frac{1/RC}{1/RC + j\omega} \text{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} = A\tau \frac{1/RC}{\sqrt{(1/RC)^2 + \omega^2}} \text{sinc}\left(\omega \frac{\tau}{2}\right) e^{-j(\omega \frac{\tau}{2} + \text{atan2}(\frac{1}{RC}, \omega))} \quad (31)$$

onde $\text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}$.

(b) Fazendo $\omega = 2\pi f$ em (31) obtemos

$$Y(f) = A\tau \frac{1/RC}{\sqrt{(1/RC)^2 + (2\pi f)^2}} \text{sinc}(\pi f\tau) e^{-j(\pi f\tau + \text{atan2}(\frac{1}{RC}, 2\pi f))} \quad (32)$$

Explicitando a magnitude $|Y(f)|$ e a fase $\angle Y(f)$ do espectro $Y(f)$ dado por (32):

$$|Y(f)| = |A \tau \text{sinc}(\pi f\tau)| \left(\frac{1/RC}{\sqrt{(1/RC)^2 + (2\pi f)^2}} \right) \quad (33)$$

$$\angle Y(f) = - \left(\pi f\tau + \text{if}(\text{sinc}(\pi f\tau) < 0, \pi, 0) + \text{atan2}\left(\frac{1}{RC}, 2\pi f\right) \right) \quad (34)$$

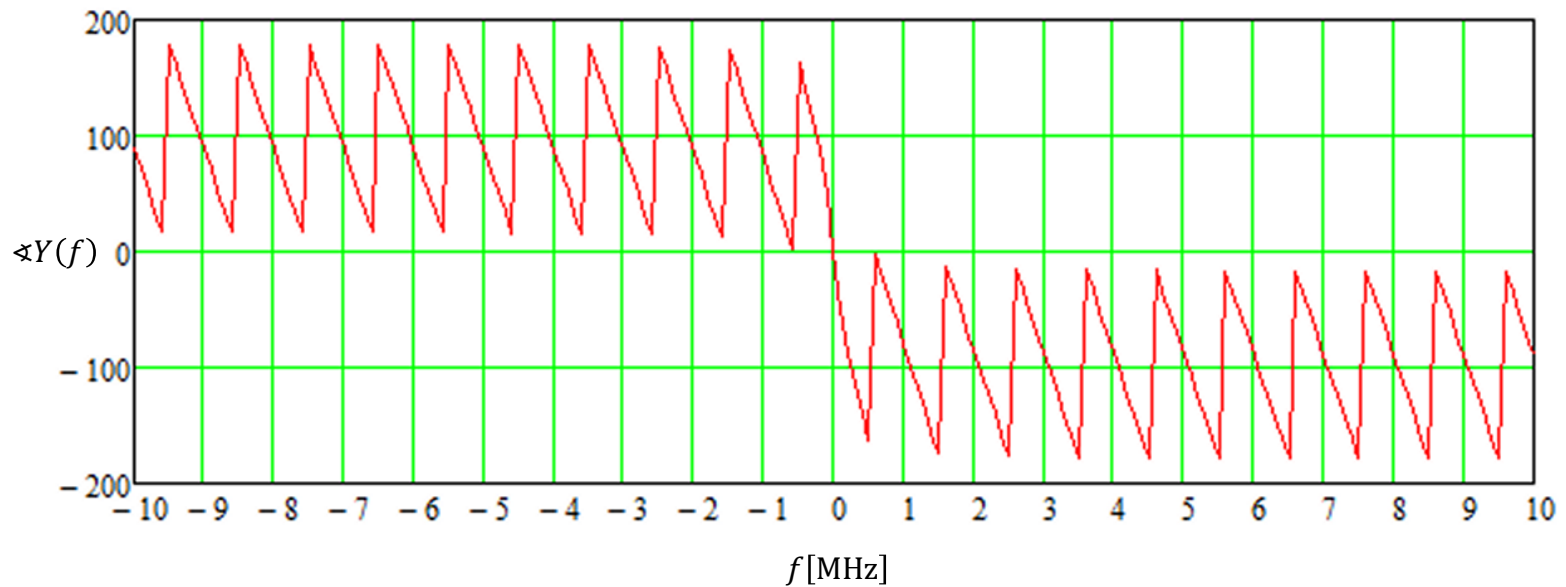
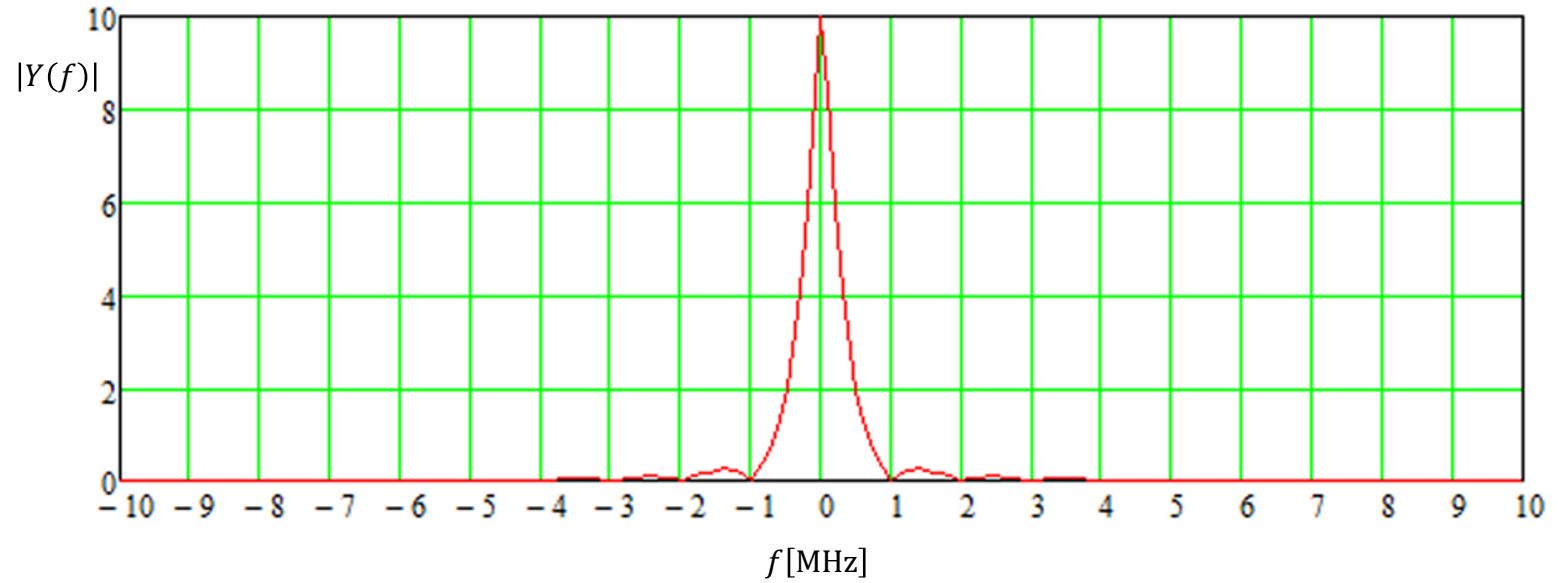
Convertendo (34) para resultar um gráfico em graus, ao invés de radianos, e limitando a excursão da fase em graus ao intervalo $-180^\circ < \angle Y(f) < 180^\circ$:

$$\angle Y(f) = - \text{mod} \left(180f\tau + \text{if}(\text{sinc}(\pi f\tau) < 0, 180, 0) + \frac{180}{\pi} \text{atan2}\left(\frac{1}{RC}, 2\pi f\right), 180 \right) \quad (35)$$

onde $\text{mod}(x, y)$ é o operador que retorna o resto da divisão de x por y (x modulo y), tendo o resultado o mesmo sinal que x e onde $\text{if}(\text{cond}, x, y)$ é o operador que retorna x se cond é verdadeiro (não-zero) e retorna y em caso contrário.

Transformada de Fourier - Exemplos

De (33) e (35) para $-10/\tau < f < 10/\tau$:



Transformada de Fourier - Exemplos

(c) A determinação da resposta $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$ à excitação $x(t)$ através da operação $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ implementada pela função `ifourier()` do software Matlab envolve o processamento de variáveis simbólicas e demanda um conjunto de comandos específicos para sua implementação. O script `.m` abaixo é uma possível sequência de comandos do software Matlab que determina e plota $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$ através da função `ifourier()`:

```
% define parametros
A=10; % Amplitude do pulso
Tau=1; % Duracao do pulso em microsegundos
R=300 % R em ohms
C= 3300*10^-12 % C em F
RC=R*C*10^6;
% define array de variaveis simbolicas
syms X H Y y w
% especifica espectro X(w) do sinal de entrada
X= A*Tau*sin(w*Tau/2).*exp(-j*w*Tau/2) ./ (w*Tau/2);
% especifica funcao de transferencia H(w)
H = (1/RC) ./ (j*w+1/RC);
% H=1;
% calcula espectro Y(w) na saida do filtro
Y=X.*H;
% Determina a saida y(t) aplicando a Transformada Inversa de Fourier sobre o
% espectro Y(w)
y = ifourier(Y);
% mostra a expressao simbolica de y(t)
y
% plota y(t) para o intervalo [0 6]
ezplot(y,[0 6])
% ajusta eixo horizontal para o intervalo [0 6] e o eixo vertical para o
% intervalo [0 15]
axis([0 6 0 15])
% coloca grid no grafico
grid on
```

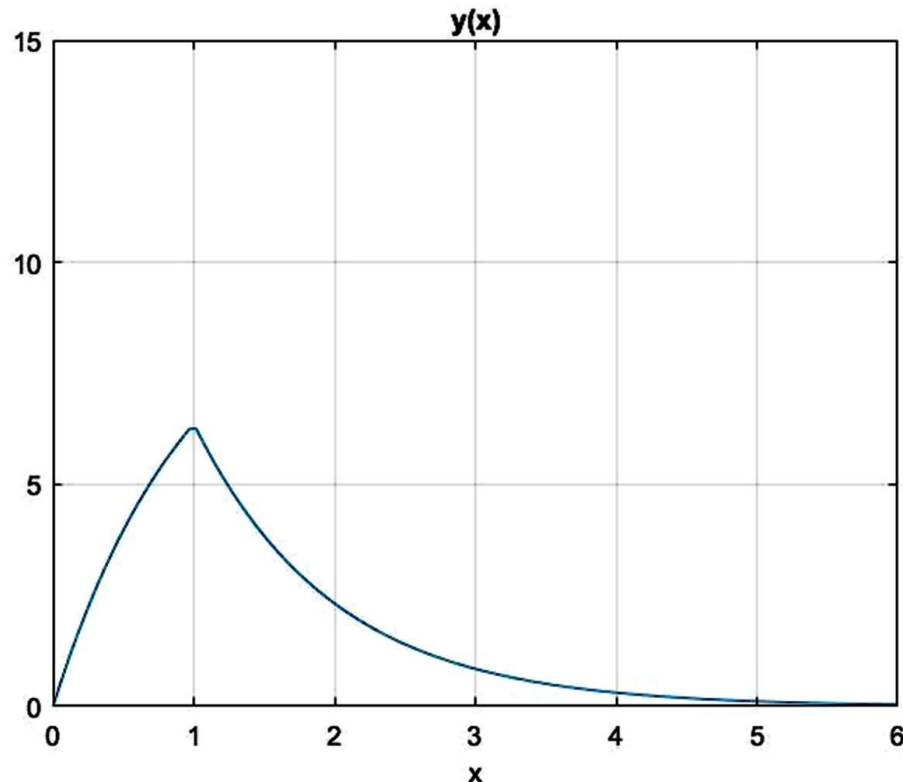
Transformada de Fourier - Exemplos

Para $A=10V$, $\tau=1\mu s$, $R=300$ ohms e $C= 3300$ pF o script .m do slide anterior resulta na seguinte expressão analítica (= expressão simbólica no contexto do Matlab) para a resposta $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$ à excitação $x(t)$:

$$y = (20*\pi*\text{heaviside}(x) - 20*\pi*\text{heaviside}(x - 1) - 20*\pi*\exp(-50/99)*\exp(50/99 - (100*x)/99)*\text{heaviside}(x) + 20*\pi*\text{heaviside}(x - 1)*\exp(50/99)*\exp(50/99 - (100*x)/99))/(2*\pi)$$

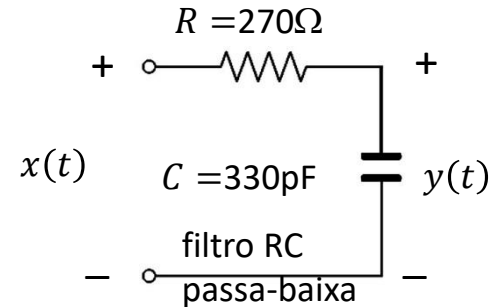
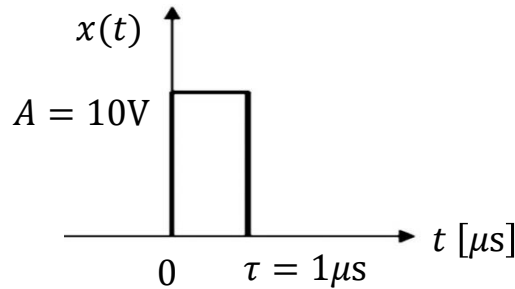
onde a variável “x” representa a variável tempo t , a constante “pi” representa a constante π e a função “heaviside(x)” representa a função degrau unitário $u(t)$ vista no Cap I das notas de aula.

Plotando $y(t)$ para $0 < t < 6 \mu s$ a partir da expressão analítica de y acima obtemos:



Homework

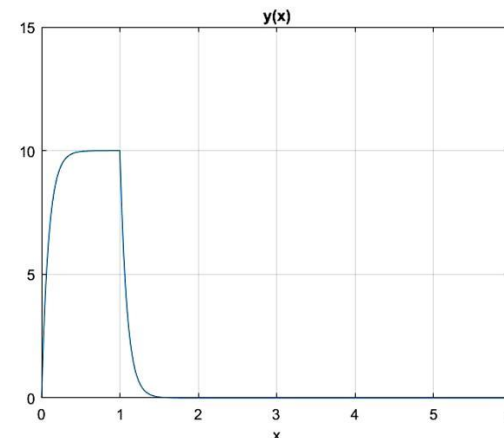
Um pulso $x(t)$ aperiódico de duração $\tau = 1\mu\text{s}$ e amplitude $A = 10\text{V}$ é aplicado à entrada de um filtro RC passa-baixa, conforme mostra a figura abaixo.



Pede-se: (a) Determine o espectro $Y(\omega)$ de $y(t)$ através da operação $Y(\omega) = H(\omega)X(\omega)$, onde $H(\omega)$ é a função de transferência do filtro. **(b)** Plote a magnitude e a fase do espectro $Y(f)$ no intervalo $-10/\tau < f < 10/\tau$, sendo $f = \omega/2\pi$. **(c)** Determine e plote p/ $0 < t < 6\mu\text{s}$ a resposta $y(t)$ à excitação $x(t)$ através da operação $y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$, onde $\mathcal{F}^{-1}\{\cdot\}$ é o operador Transformada Inversa de Fourier. Em razão da complexidade analítica na obtenção da primitiva na integral para determinação de $\mathcal{F}^{-1}\{Y(\omega)\}$, utilize na solução deste item a função ifourier() do software Matlab: "ifourier Inverse Fourier integral transform.

`f = ifourier(F)` is the inverse Fourier transform of the symbolic expression or function F with default independent variable w . By default, the result f is a function of x . If $F = F(x)$, then f is returned as a function of the variable t , $f = f(t)$."

Dica - O gráfico de $y(t)$ dever resultar conforme segue:



Property	Signal	Fourier transform
	$x(t)$	$X(\omega)$
	$x_1(t)$	$X_1(\omega)$
	$x_2(t)$	$X_2(\omega)$
Linearity	$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$	$a_1 X_1(\omega) + a_2 X_2(\omega)$
Time shifting	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Frequency shifting	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Time scaling	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Time reversal	$x(-t)$	$X(-\omega)$
Duality	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Time differentiation	$\frac{dx(t)}{dt}$	$j\omega X(\omega)$
Frequency differentiation	$(-jt)x(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Integration	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\pi X(0)\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} X(\omega)$

Property	Signal	Fourier transform
Convolution	$x_1(t) * x_2(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Multiplication	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$
Real signal	$x(t) = x_e(t) + x_o(t)$	$X(\omega) = A(\omega) + jB(\omega)$ $X(-\omega) = X^*(\omega)$
Even component	$x_e(t)$	$\text{Re}\{X(\omega)\} = A(\omega)$
Odd component	$x_o(t)$	$j \text{Im}\{X(\omega)\} = jB(\omega)$
Parseval's relations		

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\lambda)X_2(\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda)x_2(\lambda) d\lambda$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\omega)X_2(-\omega) d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$	\longleftrightarrow	$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$
$\delta(t)$		1
$\delta(t - t_0)$		$e^{-j\omega t_0}$
1		$2\pi\delta(\omega)$
$e^{j\omega_0 t}$		$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
$\cos \omega_0 t$		$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin \omega_0 t$		$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
$u(t)$		$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$u(-t)$		$\pi\delta(\omega) - \frac{1}{j\omega}$
$e^{-at}u(t), a > 0$		$\frac{1}{j\omega + a}$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\} \longleftrightarrow X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$$

$$t e^{-at} u(t), a > 0 \quad \frac{1}{(j\omega + a)^2}$$

$$e^{-a|t|}, a > 0 \quad \frac{2a}{a^2 + \omega^2}$$

$$\frac{1}{a^2 + t^2} \quad e^{-a|\omega|}$$

$$e^{-at^2}, a > 0 \quad \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\omega^2/4a}$$

$$p_a(t) = \begin{cases} 1 & |t| < a \\ 0 & |t| > a \end{cases} \quad 2a \frac{\sin \omega a}{\omega a}$$

$$\frac{\sin at}{\pi t}$$

$$p_a(\omega) = \begin{cases} 1 & |\omega| < a \\ 0 & |\omega| > a \end{cases}$$

$$\operatorname{sgn} t$$

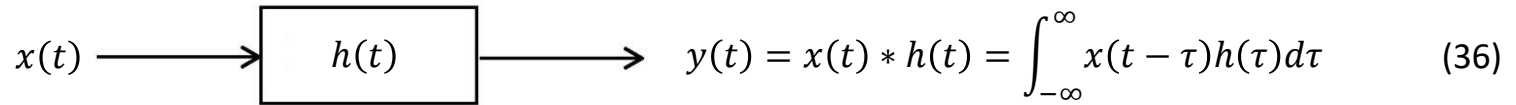
$$\frac{2}{j\omega}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT)$$

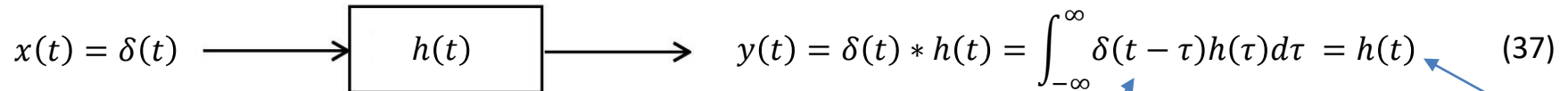
$$\omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Considerações quanto à resposta de um sistema LTI no domínio tempo e no domínio frequência

Vimos no Cap II.3 que a resposta $y(t)$ de um sistema LTI a uma excitação $x(t)$ é dada pela convolução entre a excitação $x(t)$ e a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema:


$$x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \quad (36)$$

Se a excitação for um impulso $x(t) = \delta(t)$ obtemos $h(t)$ como resposta (que é o que seria de se esperar):


$$x(t) = \delta(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t) = \delta(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - \tau)h(\tau)d\tau = h(t) \quad (37)$$

O impulso $\delta(t - \tau)$ resulta em um valor ∞ com área unitária sob a curva para um único instante $\tau = t$, resultando um valor nulo para todos os demais instantes τ .

Portanto, como a integral calcula a área debaixo da curva, ela resulta $h(t)$.

Vamos analisar (37) no domínio frequência, e para tanto vamos aplicar a Transformada de Fourier ao sinal $x(t)$ na entrada do sistema LTI e ao sinal $y(t)$ na sua saída. De (23) com $x(t) = \delta(t)$ obtemos :

$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega 0} = 1 \quad (38)$$

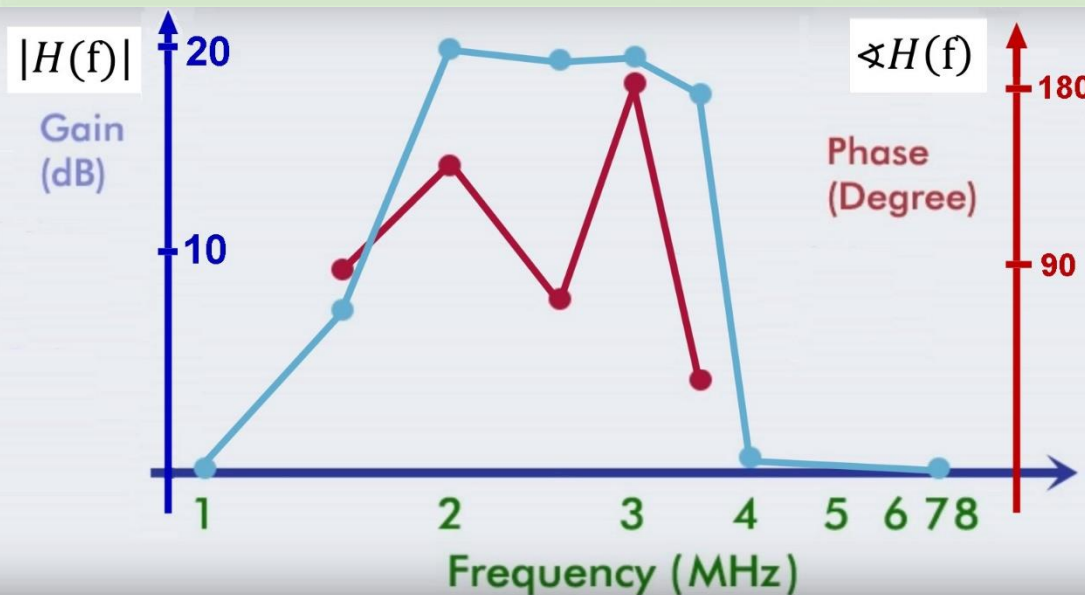
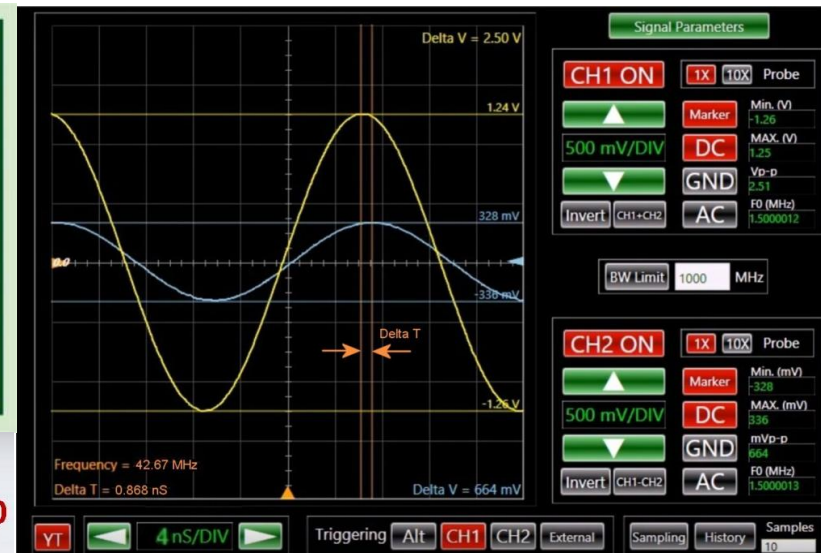
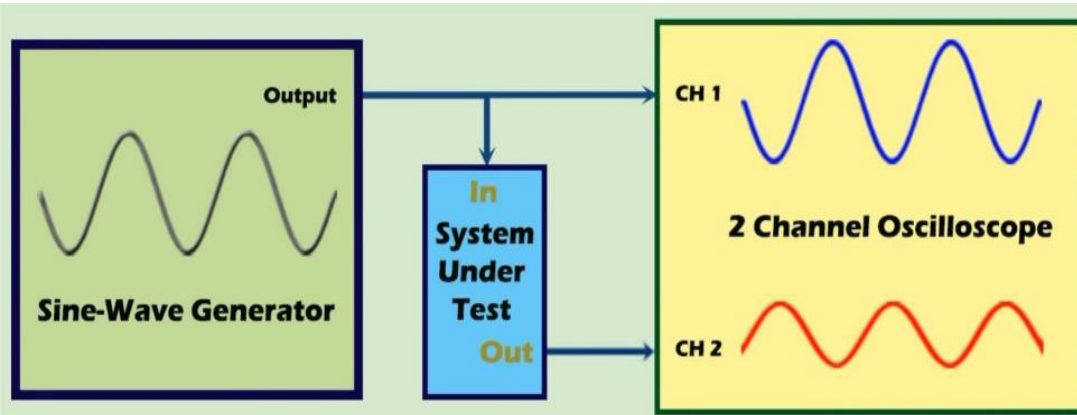
O impulso $\delta(t)$ resulta em um valor ∞ com área unitária sob a curva para um único instante $t = 0$, resultando um valor nulo para todos os demais instantes t .

Portanto, como a integral calcula a área debaixo da curva, ela resulta $e^{-j\omega 0}$.

Note que o resultado de (38) é $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ e significa que aplicar um impulso $\delta(t)$ na entrada $x(t)$ do sistema tem o mesmo efeito de aplicar um espectro $X(\omega) = 1$ (ou equivalentemente $X(f) = 1$ dado que $\omega = 2\pi f$) constante ao longo de todo o domínio frequência f . Um espectro $X(f) = 1$ possui largura infinita no domínio frequência f e, portanto, contempla um número infinito de frequências.

Considerações quanto à resposta de um sistema LTI no domínio tempo e no domínio frequência

No Cap I das notas de aula medimos a função de transferência $H(f) = |H(f)|e^{j\angle H(f)}$ de um sistema através de um processo que consiste em variar manualmente ao longo de uma faixa a frequência f de um gerador senoidal conectado à entrada do sistema e medir a entrada e a saída do sistema com um osciloscópio para cada frequência f , e assim determinar o quanto $|H(f)|$ amplifica e o quanto $\angle H(f)$ atrasa no tempo t o sinal de entrada senoidal de frequência f :



Conforme discutimos de (38) no slide anterior, quando aplicamos um impulso $\delta(t)$ na entrada $x(t)$ do sistema significa que estamos aplicando na entrada um espectro $X(f) = 1$ constante e de largura infinita no domínio frequência f . Isto equivale ao processo visto no Cap I que varia manualmente ao longo de uma ampla faixa a frequência f de um gerador senoidal aplicado à entrada $x(t)$ do sistema para medir a $H(f)$. **E, conseqüentemente, o espectro $Y(f)$ da saída $y(t)$ resultante da entrada $\delta(t)$ é uma medida da função de transferência $H(f)$ do sistema.**

Considerações quanto à resposta de um sistema LTI no domínio tempo e no domínio frequência

Continuando a análise de (37) no domínio frequência, vamos aplicar agora a Transformada de Fourier ao sinal $y(t)$ na saída do sistema LTI:

$$y(t) = \delta(t) * h(t) \longrightarrow \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{\delta(t) * h(t)\} \xrightarrow{\text{propriedade da convolução (convolution) slide 27}} Y(\omega) = \underbrace{\mathcal{F}\{\delta(t)\}}_1 \mathcal{F}\{h(t)\} \longrightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (39)$$

Conforme discutido no slide anterior, o espectro $Y(\omega)$ da saída $y(t)$ resultante da entrada $\delta(t)$ é uma medida da função de transferência $H(\omega)$ do sistema. **Consequentemente, de (39), infere-se que a função de transferência $H(\omega)$ de um sistema LTI é dada pela Transformada de Fourier de sua resposta ao impulso $h(t)$:**

$$H(\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} \quad (40)$$

Fazendo análise semelhante no domínio frequência para (36), obtemos:

$$x(t) \longrightarrow \begin{array}{c} h(t) \\ H(\omega) \end{array} \longrightarrow y(t) = x(t) * h(t)$$
$$X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \qquad Y(\omega) = \mathcal{F}\{y(t)\} = \mathcal{F}\{x(t) * h(t)\}$$

propriedade da convolução (convolution) slide 27

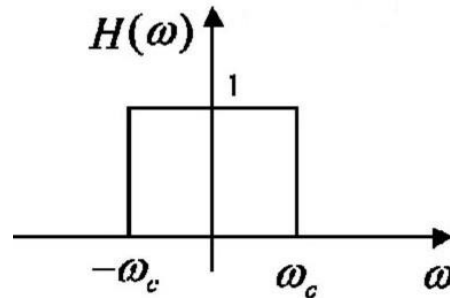
$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}\mathcal{F}\{h(t)\}$$
$$Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

De (41) fica evidenciada a importante propriedade de que a função de transferência $H(\omega)$ de um sistema LTI é dada pela razão entre os espectros de saída e entrada, ou equivalentemente pela razão entre as Transformadas de Fourier entre seus sinais de saída e entrada no domínio tempo.

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\mathcal{F}\{y(t)\}}{\mathcal{F}\{x(t)\}} \quad (41)$$

Exemplo - Resposta ao impulso de um filtro passa baixa ideal

Exemplo : Um filtro passa baixa ideal com frequência de corte ω_c e transmitância unitária apresenta a seguinte função de transferência $H(\omega)$:



Pede-se: (a) Determine a resposta ao impulso $h(t)$ do filtro através da propriedade da dualidade (“*duality*” slide 26) . **(b)** Determine $h(t)$ através da equação (24) e verifique a consistência do resultado obtido em (a). **(c)** Plote $h(t)$ obtida em (a) para $f_c = 2\pi/\omega_c = 1$ MHz e para $-4\mu s < t < 4\mu s$.

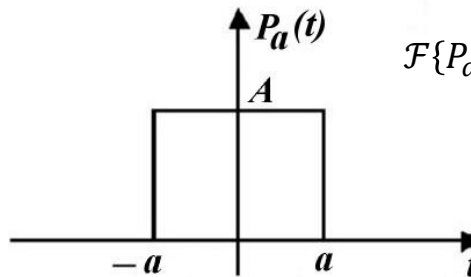
Solução: (a) De (40) temos que $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$. Para determinar $\mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\}$ através da propriedade da dualidade (“*duality*” slide 26) , consideremos a tabela abaixo:

Propriedade	Sinal = $\mathcal{F}^{-1}\{\text{Espectro}\}$	Espectro = $\mathcal{F}\{\text{Sinal}\}$
Dualidade	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
	$\frac{1}{2\pi} X(t)$	$x(-\omega)$

A propriedade da dualidade, explicitada na tabela acima, é interpretada da seguinte maneira no contexto do presente exemplo: Se um espectro $x(-\omega)$ no domínio frequência ω “espelhado” (i.e. $-\omega$) tem a mesma forma funcional de um sinal $x(t)$ no domínio tempo t então $\mathcal{F}^{-1}\{x(-\omega)\}$ é obtida de $\frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{x(t)\}$ mas considerando o resultado de $\mathcal{F}\{x(t)\}$ como uma função do tempo t (e não como uma função de ω , que é o domínio normal do resultado de $\mathcal{F}\{\cdot\}$).

Exemplo - Resposta ao impulso de um filtro passa baixa ideal

A Transformada de Fourier de um pulso $P_a(t)$ conforme figura abaixo resulta em



$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{P_a(t)\} &= A \int_{-a}^a e^{-j\omega t} dt = A \left[\frac{-1}{j\omega} (e^{-j\omega t}) \right]_{-a}^a = \frac{-A}{j\omega} [e^{-j\omega a} - e^{j\omega a}] = \frac{A}{j\omega} [e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}] = \\ &= \frac{2A}{\omega} \frac{[e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}]}{2j} = 2A \frac{\sin(\omega a)}{\omega} = A2a \frac{\sin(a\omega)}{(a\omega)} \end{aligned}$$

Mas note que a função de transferência $H(\omega)$ do filtro passa-baixa ideal apresenta no domínio frequência ω “espelhado” (i.e. $-\omega$) a mesma forma funcional que o sinal $P_a(t)$ no domínio tempo t , com “ a ” correspondendo a “ ω_c ” e com $A = 1$. Daí, pela propriedade da dualidade, temos

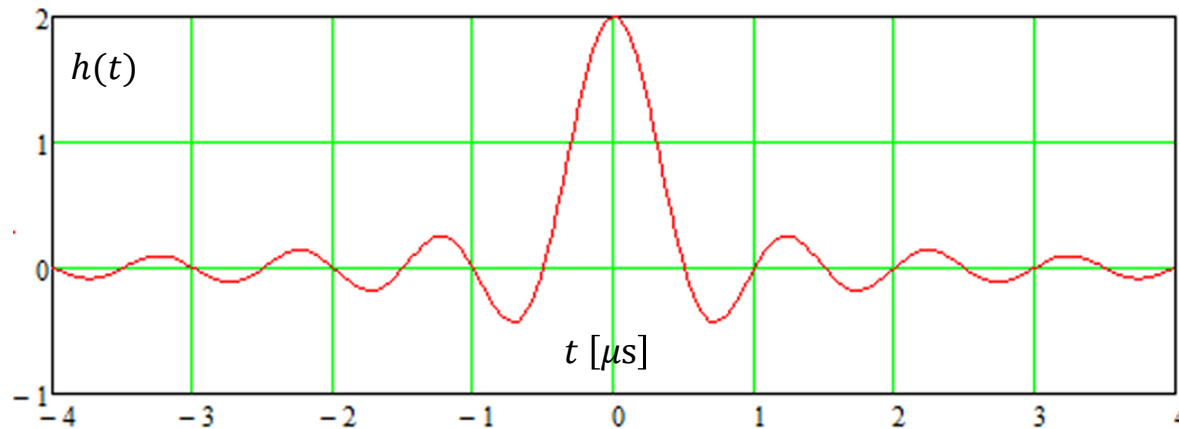
$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}\{P_a(t)\} \Big|_{\omega \leftarrow t} = \frac{1}{2\pi} \overset{1}{A} 2\omega_c \frac{\sin(\omega_c t)}{(\omega_c t)} = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t) \quad (41)$$

(b) De (24) temos:

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{jt} e^{j\omega t} \right]_{-\omega_c}^{\omega_c} = \frac{1}{2\pi jt} [e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}] = \\ &= \frac{1}{\pi t} \frac{[e^{j\omega_c t} - e^{-j\omega_c t}]}{2j} = \frac{1}{\pi t} \sin(\omega_c t) = \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin(\omega_c t)}{\omega_c t} = \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t) \quad \text{onde } \text{sinc}(u) = \frac{\sin u}{u}. \end{aligned} \quad (42)$$

Exemplo - Resposta ao impulso de um filtro passa baixa ideal

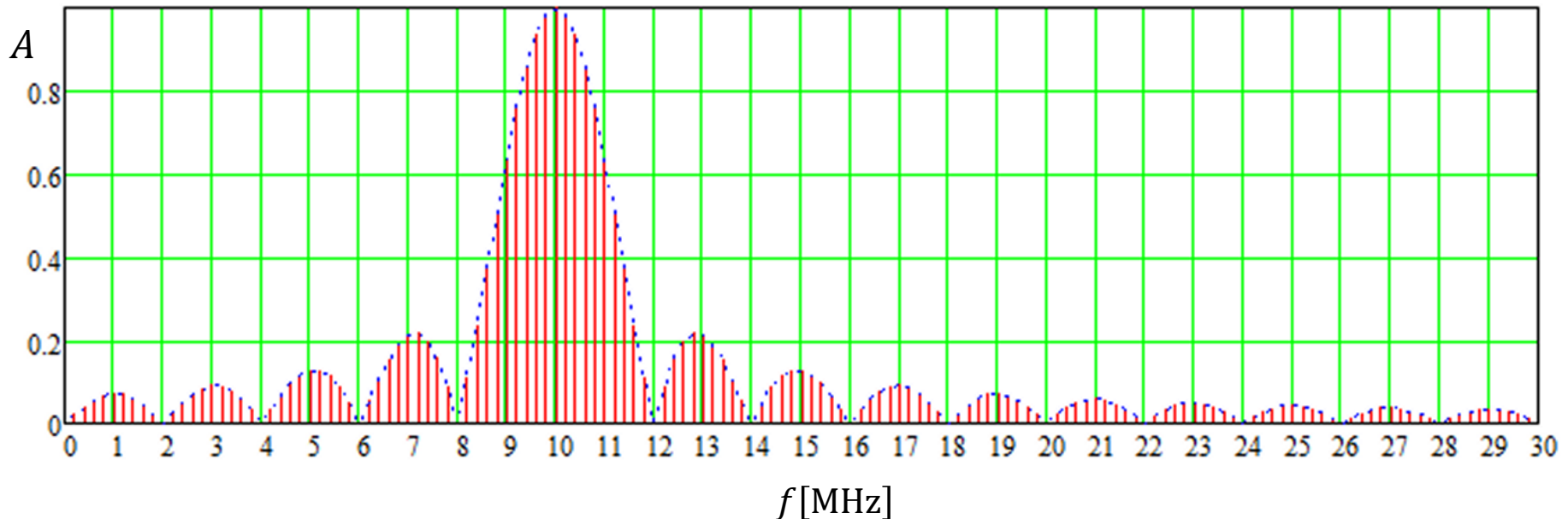
(c) De (41) para $f_c = 2\pi/\omega_c = 1$ MHz e para $-4\mu s < t < 4\mu s$:



Note do gráfico acima que a resposta ao impulso $h(t)$ é não-nula para instantes de tempo anteriores à excitação impulso $\delta(t)$ que ocorre em $t = 0$. Portanto um filtro passa-baixa ideal é um sistema não-causal.

Exemplo – Análise espectral para EMC (*Electromagnetic Compatibility*)

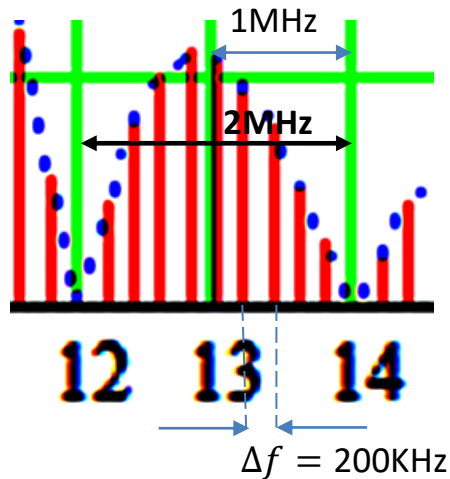
Exemplo : Uma empresa precisa submeter um sistema eletrônico por ela desenvolvido a um conjunto de testes de conformidade da emissão irradiada pelo sistema para efeito de atender normas de EMC demandadas por um determinado nicho de mercado. A pré-avaliação de conformidade feita pela equipe de engenharia da referida empresa descobriu, através de um analisador de espectro conectado a uma antena nas proximidades do sistema sob teste, que há uma intensa irradiação eletromagnética com amplitude A máxima em torno de 10MHz, conforme mostra a figura abaixo:



Pede-se: Para efeito de determinar qual módulo do hardware do sistema está irradiando este sinal indesejável e para efeito de corrigir o problema (que, se não for solucionado inviabiliza o atendimento das normas de EMC) estime a partir do espectro acima qual forma de onda no domínio tempo corresponde a este espectro.

Exemplo – Análise espectral para EMC (*Electromagnetic Compatibility*)

Solução: O sinal é periódico porque o espectro é discreto, estando as componentes espectrais separadas de $\Delta f = 200\text{kHz}$ conforme mostra a figura abaixo, e, portanto, o período do sinal é $T = 1/\Delta f = 5\mu\text{s}$.



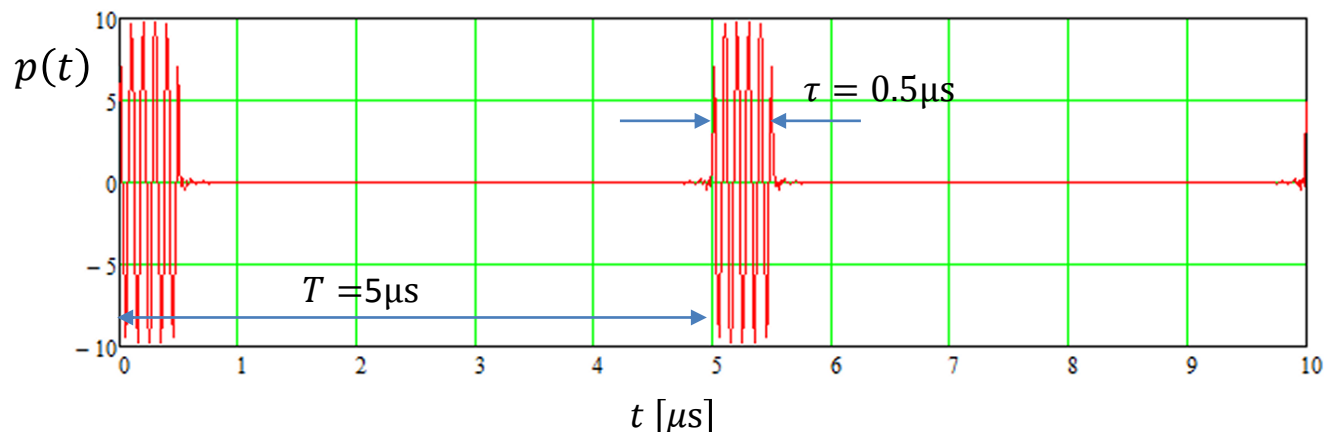
O espectro do sinal é uma função $\text{sinc}(\cdot)$ no domínio frequência (vide figura slide anterior) com lóbulo principal centrado em $f_c = 10\text{ MHz}$. A separação entre dois nulos adjacentes não pertencentes ao lóbulo principal é 2 MHz conforme a figura à esquerda. Então infere-se que o sinal é um pulso de largura $\tau = 1/2\text{MHz} = 0.5\mu\text{s}$.

Dado que a frequência central do lóbulo principal da $\text{sinc}(\cdot)$ não é $f_c = 0\text{ Hz}$ (DC) infere-se que o pulso no tempo não é um pulso retangular. A pergunta a ser respondida é então: Qual é a forma funcional do pulso de largura $\tau = 0.5\mu\text{s}$?

Para responder esta pergunta, considere a propriedade *frequency shifting* no slide 26, i.e., $e^{j\omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$.

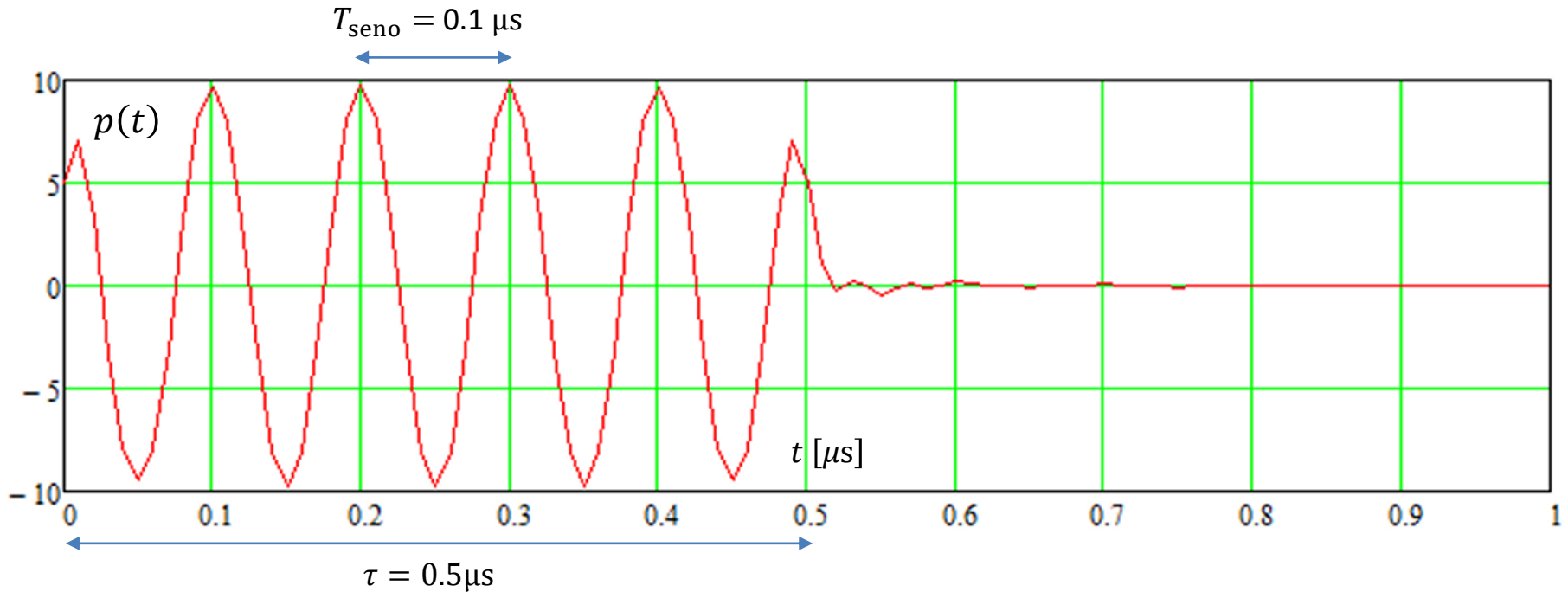
Esta propriedade estabelece que o deslocamento ω_0 de um espectro no domínio

frequência implica na multiplicação da função no domínio tempo que o espectro representa por um sinal senoidal de frequência ω_0 (e vice-versa). Então infere-se que a função $\text{sinc}(\cdot)$ no slide anterior deslocada de $f_c = 10\text{ MHz}$ implica que o trem de pulsos periódicos $p(t)$ de período $T = 1/\Delta f = 5\mu\text{s}$ e de largura $\tau = 1/2\text{MHz} = 0.5\mu\text{s}$ resulta da multiplicação de um pulso retangular de largura $\tau = 0.5\mu\text{s}$ por uma função senoidal de frequência $f_c = 10\text{ MHz}$ conforme a figura abaixo:



Exemplo – Análise espectral para EMC (*Electromagnetic Compatibility*)

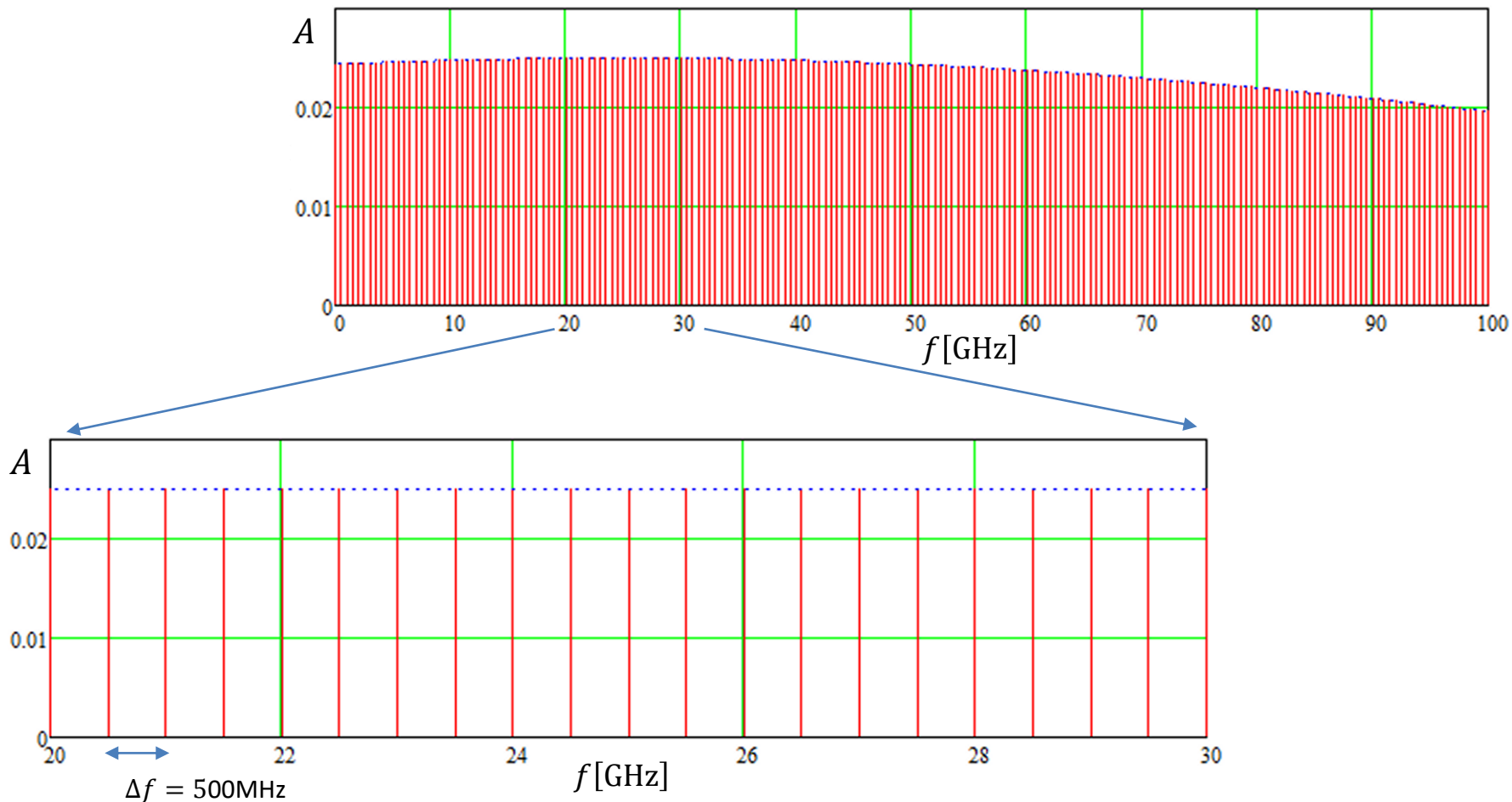
Em particular note que, pela propriedade *frequency shifting* $e^{j\omega_0 t} x(t) \longleftrightarrow X(\omega - \omega_0)$, o *burst* senoidal que forma cada pulso de largura $\tau = 0.5\mu\text{s}$ deve ser um seno (ou cosseno) de período $T_{\text{seno}} = 1/f_c = 0.1\mu\text{s}$, conforme mostra a figura:



Não é possível determinar a fase do seno (ou cosseno) de período T_{seno} porque a fase do espectro não é dada no enunciado.

Exemplo – Análise espectral para EMI (*Electromagnetic Interference*)

Exemplo : Uma empresa provedora de enlaces de dados (*data links*) em microondas recebeu chamada de clientes de uma determinada localidade geográfica informando que a BER (*bit error rate* - taxa de erro de bits) de determinados enlaces não está atendendo o QoS (*Quality of Service*) contratado no SLA (*Service Level Agreement*). Um *site survey* (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Wireless_site_survey) feito pela equipe de engenharia da empresa utilizando um analisador de espectro portátil conectado a uma antena mostrou que há uma forte interferência eletromagnética no local , de magnitude A significativa se estendendo até 100GHz, conforme mostra a figura abaixo:



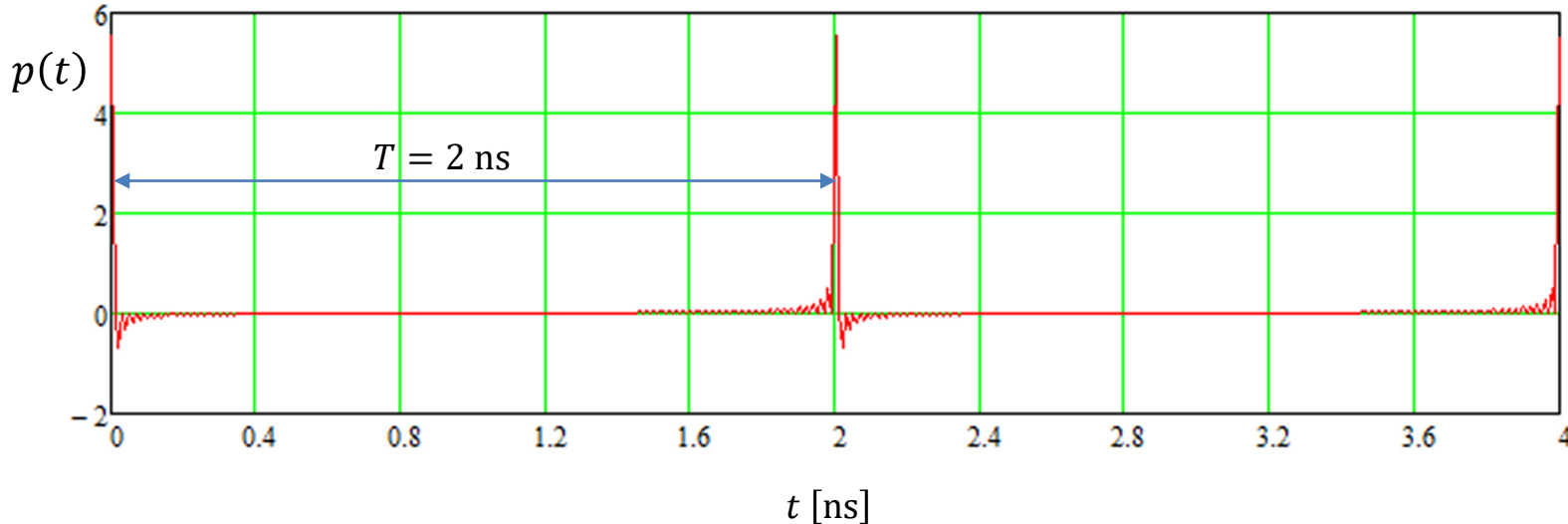
Exemplo – Análise espectral para EMI (*Electromagnetic Interference*)

Pede-se: Para efeito de tentar identificar a origem da interferência estime a partir do espectro no slide anterior qual forma de onda no domínio tempo corresponde ao espectro.

Solução: O espectro da interferência é quase plano (constante no domínio frequência) e as componentes espectrais são discretas e separadas de $\Delta f = 500\text{MHz}$ no domínio frequência. Então podemos considerar o espectro da interferência como uma sequencia de infinitos impulsos separados de $\Delta f = 500\text{MHz}$.

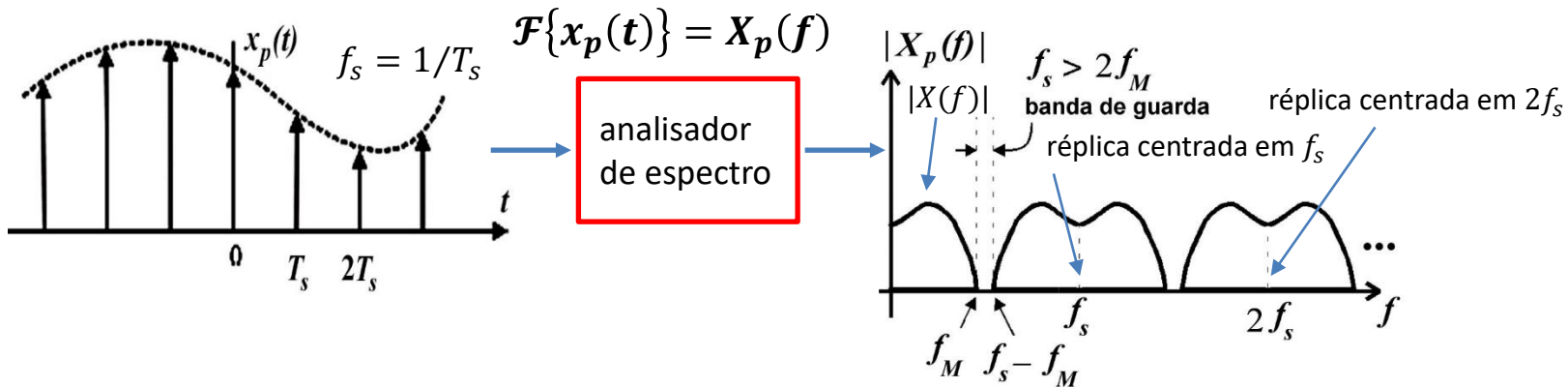
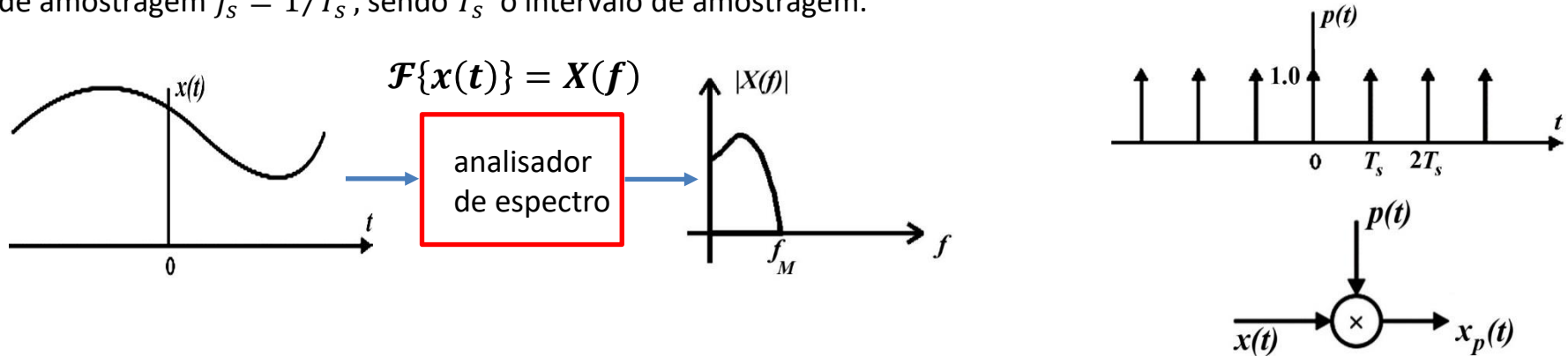
Daí, podemos utilizar o par de transformadas $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \longleftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (ver slide 29) para estimar o sinal no domínio tempo.

Dado que o espectro da interferência é aproximado por um trem de infinitos impulsos separados de $\Delta f = 500\text{MHz}$, resulta do par de transformadas acima que o sinal no domínio tempo é um trem de impulsos periódicos de período $T = 1/\Delta f = 2\text{ns}$, conforme mostra a figura:



Homework

No Cap II.1 das notas de aula discutimos o processo de amostragem de um sinal $x(t)$ conforme mostrado abaixo. O sinal $x_p(t)$ amostrado resulta da amostragem do sinal $x(t)$ por um trem de impulsos periódicos $p(t)$ a uma frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$, sendo T_s o intervalo de amostragem.



Utilizando o par de transformadas $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \longleftrightarrow \omega_0 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ (ver slide 29) e utilizando a

propriedade da multiplicação (*Multiplication* slide 27) demonstre analiticamente que o espectro $X_p(f)$ é formado do espectro $X(f)$ superposto com múltiplas réplicas de $X(f)$ espelhadas em banda e centradas em múltiplos inteiros de f_s no domínio frequência f .

Apêndice A

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	