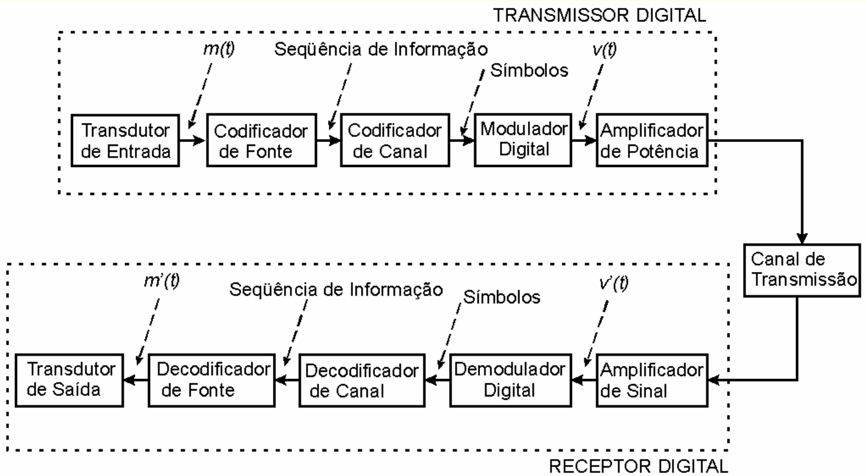
Codificação de Fonte

A Codificação de Fonte é o processo que visa reduzir o máximo possível a informação redundante da Seqüência de Informação em sua saída, seqüência esta obtida a partir do processamento do sinal de entrada $m(t)$.



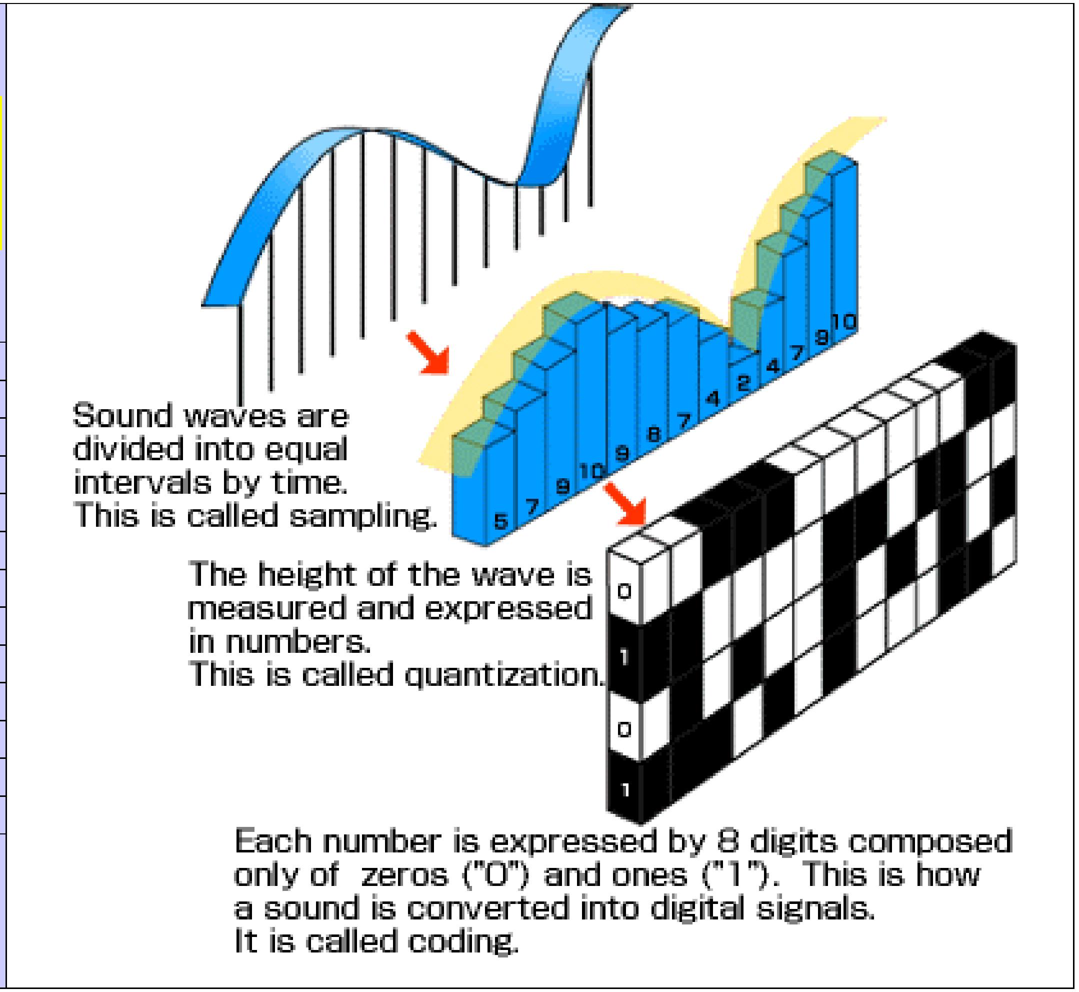
1. Amostragem: Processo através do qual o sinal contínuo no tempo $m(t)$ é transformado em um sinal discreto no tempo, representado por $m(n)$, onde n é interpretado como o instante de tempo no qual o valor do sinal $m(t)$ é levado à saída do processo de amostragem.

2. Quantização: Processo através do qual o sinal discreto no tempo $m(n)$ contínuo em amplitude é transformado em um sinal $m_q(n)$ discreto em amplitude (valor). Ou seja, dado $m(n)$ no instante n, $m_q(n)$ assumirá um dos M possíveis valores, denominados <u>níveis de quantização</u>, do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \cdots, m_{M-1}\}$. Quanto menor o nº M de níveis de quantização utilizados para representar $m(n)$, menos fiel será a representação e maior será o ruído de quantização.

3. Codificação: Processo através do qual cada um dos M possíveis valores de $m_q(n) \in \Theta$, $\Theta = \{m_0, m_1, \cdots, m_{M-1}\}$, é mapeado em uma seqüência (ou bloco) de $N = \log_2 M$ dígitos binários (ou bits). Cada um dos elementos do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \cdots, m_{M-1}\}$ é associado a um nº representado por N bits. O tipo de mapeamento a ser utilizado é dependente do código adotado.

4. Compressão: Processo no qual cada uma das M possíveis seqüências de N bits, representativas de cada um dos M possíveis valores de $m_q(n) \in \Theta$, tem o seu nº de bits N reduzido para um valor menor como decorrência da eliminação da informação redundante em $m_q(n) \in \Theta$, através de um <u>Algoritmo de Compressão.</u>

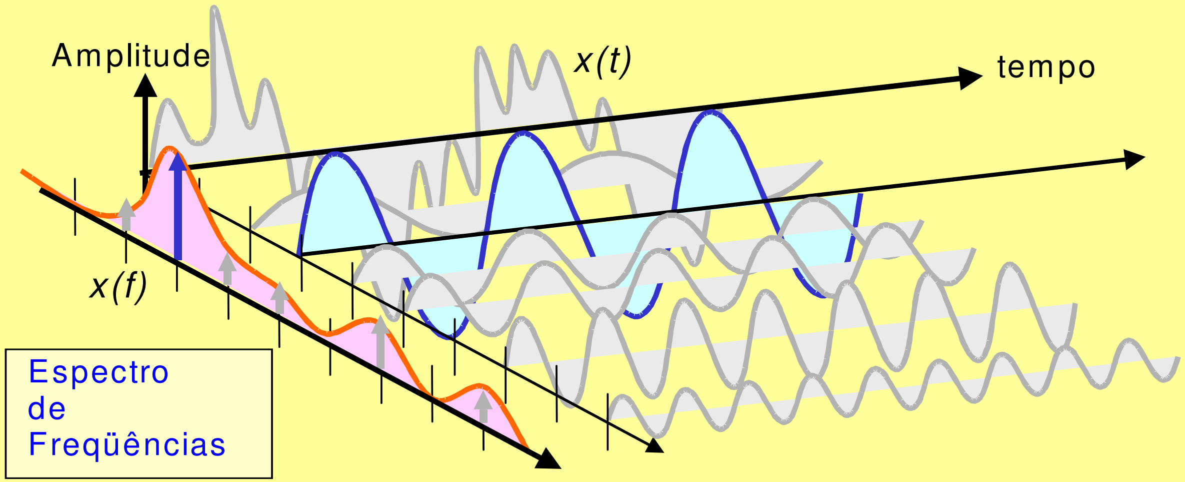
Amostra quantizada	Codificação original	Nº. de Ocorrências	Nº. de Bits Necessários	Compressão (Código)	Nº. de Bits Necessários
0	1111	0	0	001	0
1	0110	0	0	010	0
2	0010	1	4	10	2
3	1110	0	0	100	0
4	0100	2	8	00	4
5	0101	1	4	11	2
6	0001	0	0	111	0
7	0111	3	12	0	3
8	0000	1	4	000	3
9	1001	3	12	1	3
10	1010	2	8	01	4
...	...	...	...	...	...
15	1000	0	0		0
		(13)	(13x4 =52)		(21)



(explo.: sinal de voz $f_M = 3.3k$ Hz , $f_s = 8.0k$ Hz)

Teorema da Amostragem

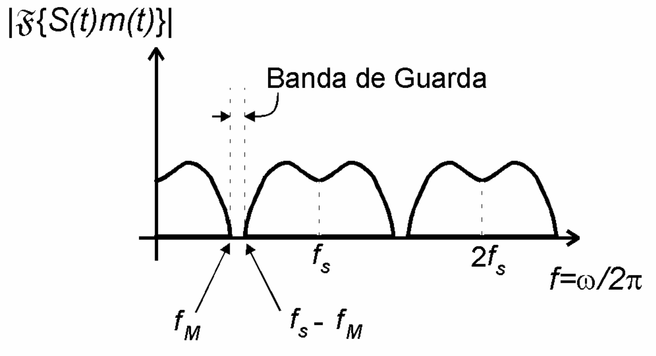
- "Seja $m(t)$ um sinal limitado em banda, tal que f_M seja a freqüência mais alta de seu espectro, freqüência a partir da qual as componentes espectrais de $m(t)$ podem ser consideradas de magnitude desprezível.
- Sejam os valores de $m(t)$ determinados a intervalos constantes de T_s segundos, tais que $T_s \le 1/2f_M$, isto é, $m(t)$ é periodicamente <u>amostrado</u> a cada $T_s \le 1/2f_M$ segundos.
- Desta forma, a freqüência de amostragem será maior ou igual a $2f_M$ ($f_s = 1/T_s \ge 2f_M$).
- Então as <u>amostras</u> $m(nT_s)$ de $m(t)$, $n = 0,1,\cdots$, univocamente determinam $m(t)$. Em decorrência deste fato, o sinal $m(t)$ pode ser reconstruído a partir do sinal amostrado $m(nT_s)$, através de um filtro adequado".



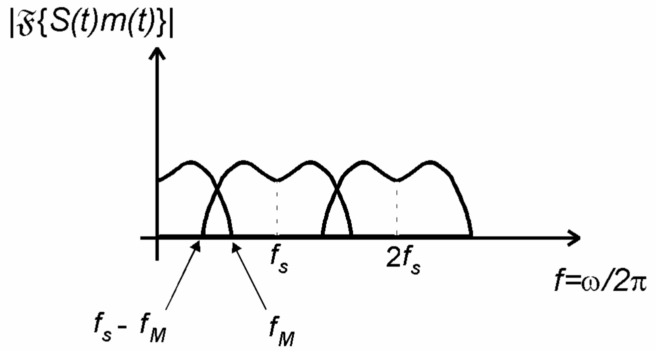
f_s = freqüência de amostragem

f_M = componente espectral de $m(t)$ de maior freqüência

Se $f_s = 1/T_s \ge 2f_M$, após o processo de amostragem, o sinal $m(t)$ original pode ser recuperado sem distorção, na saída de um filtro passa-baixa com freqüência de corte f_M, próximo do filtro ideal.



(a) $f_s > 2f_M$



(b) $f_s < 2f_M$

A Figura (a) mostra a banda de guarda que é obtida quando $f_s > 2f_M$.

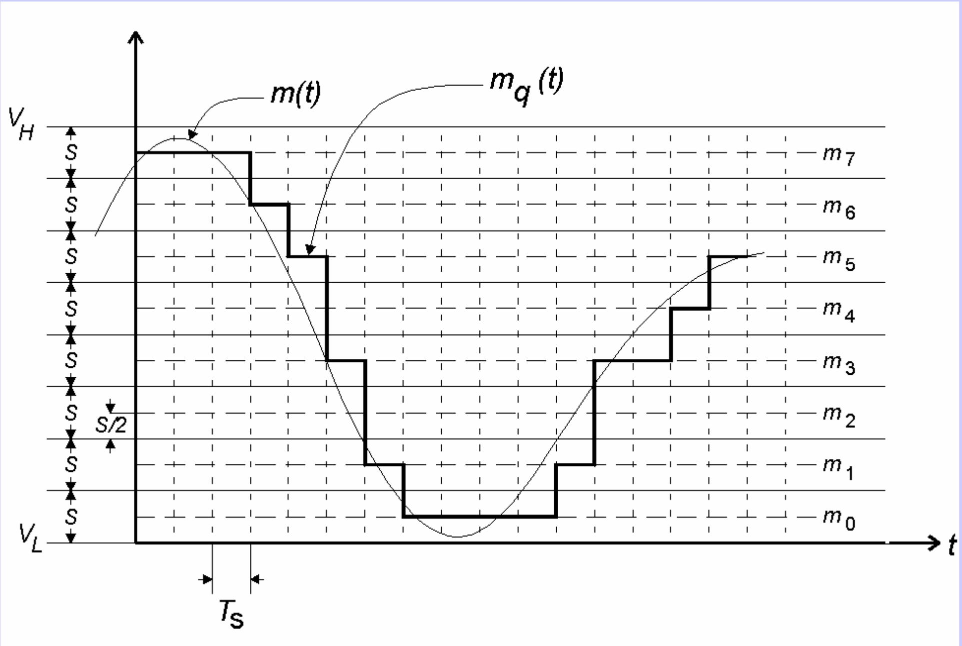
A banda de guarda sempre é utilizada na prática porque elimina a necessidade do filtro passa-baixa ser ideal (i.e., o filtro não necessita apresentar declividade infinita na freqüência de corte). (sinal de voz $f_M = 3.3k\,\text{Hz}$, $f_s = 8.0k\,\text{Hz}$).

A Figura (b) mostra a superposição das réplicas do espectro $m(t)$ original, que ocorre quando $f_s < 2f_M$.

Para esta situação, não há forma de filtragem que consiga recuperar o sinal original $m(t)$ sem distorção. Tal distorção é denominada *aliasing* (*alias*: pseudônimo – em inglês), porque o espectro original sofre interferência de uma réplica dele mesmo com "outro nome", isto é, sofre interferência dele mesmo, só que transladado em freqüência.

A freqüência de amostragem mínima $f_s = 2f_M$ para que não haja ocorrência de *aliasing* é também denominada de **Freqüência de Nyquist**.

Quantização



- $m_q(t) = Q\{m(t)\}$, ou $m_q(n) = Q\{m(n)\}$ se considerarmos que, antes de ser quantizado, $m(t)$ é amostrado a intervalos T_s.
- O sinal original $m(t)$ varia entre os limites V_L e V_H.
- $(V_H - V_L)$ = excursão do sinal.
- M é o número de valores que o sinal quantizado poderá assumir.
- $S = (V_H - V_L)/M$ é denominado passo de quantização ou *quantizer step*.
- A qualquer instante, o erro de quantização $e_q(t) = m(t) - m_q(t)$ é tal que $|e_q| \le S/2$.
- Quanto maior M, mais $m_q(t)$ assemelha-se a $m(t)$ e, portanto, menor será $e_q(t)$.

O erro de quantização pode ser considerado um ruído superposto ao sinal após a quantização, e é denominado **ruído de quantização**.

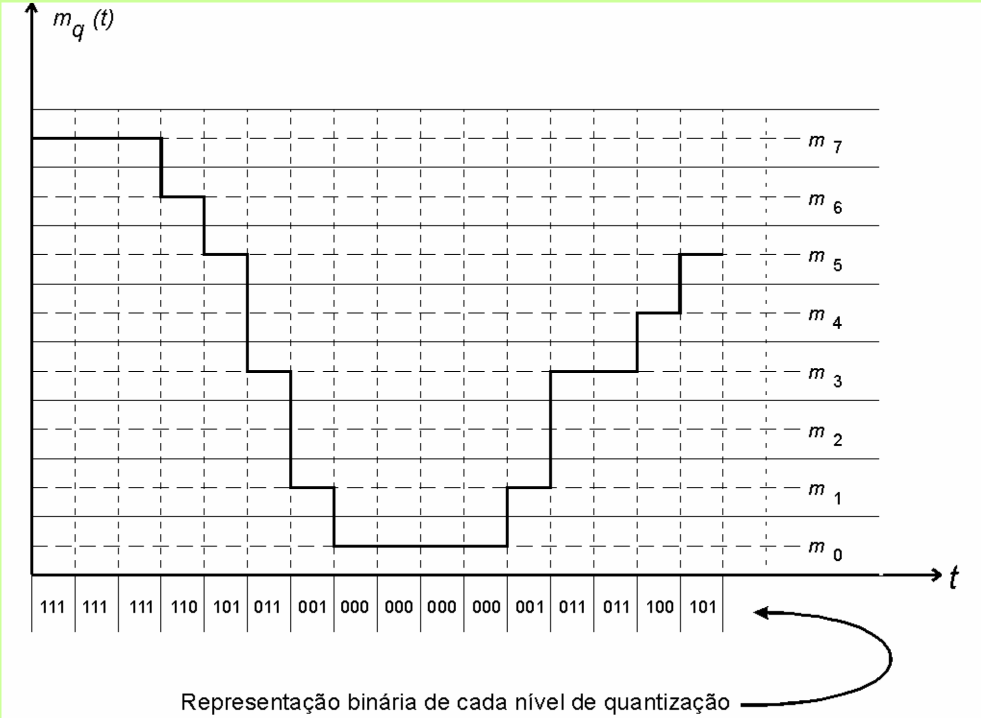
A média quadrática do ruído de quantização é uma medida da potência do ruído de quantização (potência do ruído aditivo gerado pelo processo de quantização).

Potência de ruído de quantização: $\overline{e_q^{\,2}} = \left[\dfrac{S^2}{12}\right]$ **SNR de quantização:** $\mathrm{SNR_Q} = 6N \ [\mathrm{dB}]; \ \mathrm{N} = \log_2 M$

Se $M = 8$; $N = 3$; $\mathrm{SNR_Q} = 18\,\mathrm{dB}$ (representação menos fiel do sinal)	Se $M = 16$; $N = 4$; $\mathrm{SNR_Q} = 24\,\mathrm{dB}$ (representação mais fiel do sinal)

Codificação PCM

- O sinal $m_q(t)$ (ou $m_q(n)$) (resultante do processo de amostragem + quantização) é transformado em uma seqüência numérica em base binária.
- Cada amostra $m_q(n) \in \Theta$ é mapeada em uma seqüência (ou bloco) de $N = \log_2 M$ dígitos binários (ou bits).
- Na Figura, $M = 8$, sendo $\Theta = \{m_0, m_1, \cdots, m_7\}$ o conjunto dos 8 possíveis valores de $m_q(n)$ ou níveis de quantização.
- O processo de codificação do sinal $m_q(t)$ em uma seqüência numérica em base binária muitas vezes é referido como modulação (ou codificação) PCM (*pulse code modulation*).



No processo ilustrado, utilizou-se uma representação de $N = 3$ bits para cada um dos $M = 8$ possíveis níveis (ou patamares) de quantização.

Mapeamento realizado:

$$m_0 \leftarrow 000;\ m_1 \leftarrow 001;\ m_2 \leftarrow 010;\ m_3 \leftarrow 011;\ m_4 \leftarrow 100;\ m_5 \leftarrow 101;\ m_6 \leftarrow 110;\ m_7 \leftarrow 111.$$

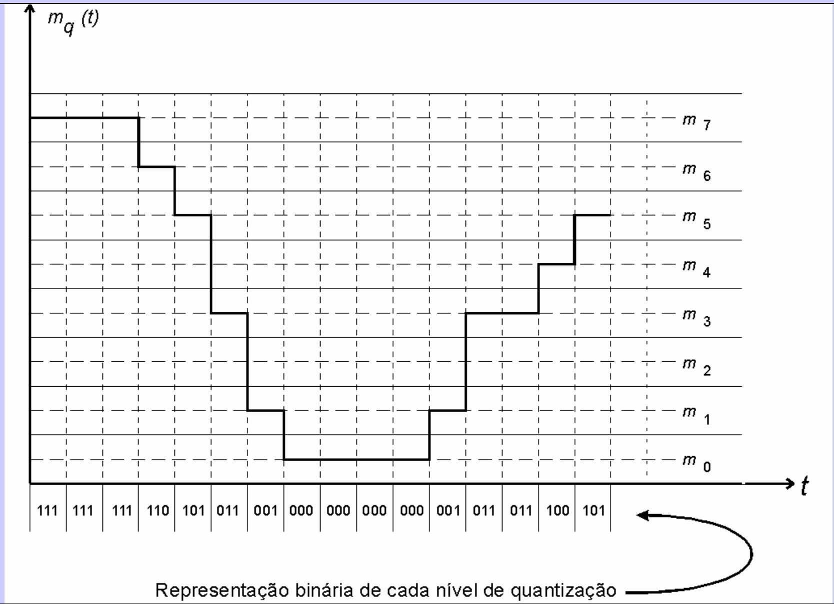
Compressão

→No processo de compressão, cada uma das M possíveis seqüências de N bits ($N = \log_2 M$) resultantes da codificação PCM, representativas de cada um dos M possíveis valores de $m_q(n) \in \Theta$, têm o seu número de bits reduzido para um valor menor como decorrência da **eliminação da informação redundante** em $m_q(n) \in \Theta$, através de um código para compressão de dados.

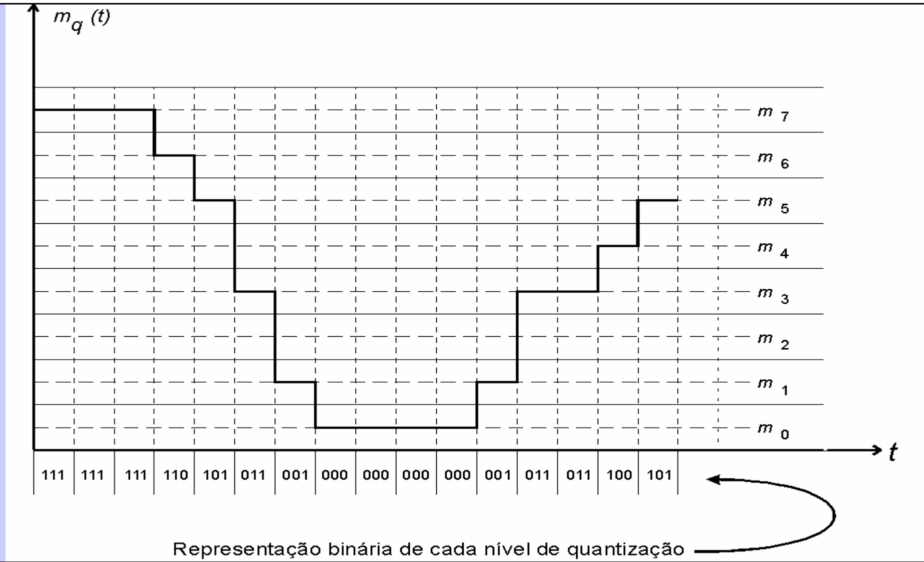
→O código para compressão de dados considera cada uma das seqüências resultante da codificação PCM como uma mensagem de N bits e associa a cada uma delas uma palavra-código cujo número de bits depende da probabilidade de ocorrência da mensagem.

→Palavras-código com menos bits são atribuídas a mensagens com maior probabilidade de ocorrência, e palavras-código com mais bits são atribuídas a mensagens com menor probabilidade de ocorrência.

→Códigos obtidos com base no princípio $probabilidade \uparrow \;\Rightarrow\; bits \downarrow$ decorrem de processos para Codificação por Entropia.



Seqüência PCM Original (bits PCM)	**N°. de Ocorrências das Seqüências PCM**	**Possível Compressão (Código)**
$m_0 \leftarrow 000$	4	0
$m_1 \leftarrow 001$	2	01
$m_2 \leftarrow 010$	0	-
$m_3 \leftarrow 011$	3	1
$m_4 \leftarrow 100$	1	11
$m_5 \leftarrow 101$	2	10
$m_6 \leftarrow 110$	1	000
$m_7 \leftarrow 111$	3	00

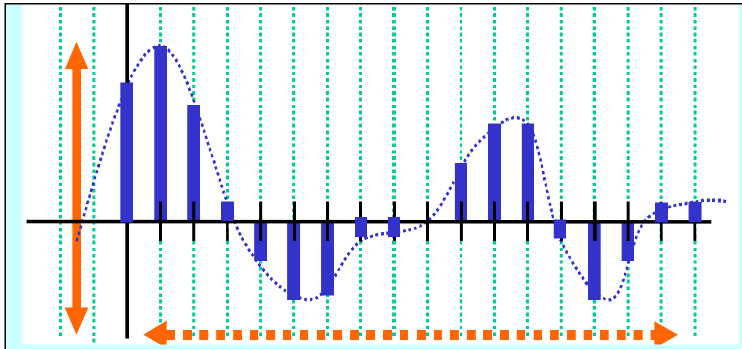


Codificação por Entropia

Palavras-código com menor número de bits são atribuídas a mensagens mais freqüentes.

Seqüência PCM Original (bits PCM)	Nº. de Ocorrências das Seqüências PCM	Nº. de Bits Necessários	Possível Compressão (Código)	Nº. de Bits Necessários
$m_0 \leftarrow 000$	4	12	0	4
$m_1 \leftarrow 001$	2	6	01	4
$m_2 \leftarrow 010$	0	-	-	-
$m_3 \leftarrow 011$	3	9	1	3
$m_4 \leftarrow 100$	1	3	11	2
$m_5 \leftarrow 101$	2	6	10	4
$m_6 \leftarrow 110$	1	3	000	3
$m_7 \leftarrow 111$	3	9	00	6
	Nº. total de ocorrências = 16	Nº. total de bits utilizados = 3x16 = 48		Nº. total de bits utilizados = 26

Codificação PCM Diferencial (DPCM)



→ Se $f_s \geq 2f_M$, o sinal amostrado poderá ser recuperado sem distorção na saída de um filtro passa-baixa com freqüência de corte f_M (Teorema da amostragem).

→ Se $f_s >> 2f_M$, o sinal **amostrado a uma razão maior que a Freqüência de Nyquist** passa a exibir uma **alta correlação** entre amostras adjacentes.

- O significado desta alta correlação é que o sinal não varia rapidamente de uma amostra para a outra.
- Quando amostras altamente correlacionadas são codificadas em um codificador PCM padrão, as mensagens ou seqüências de bits resultantes apresentarão informação redundante.
- Isto significa que mensagens que não são absolutamente essenciais à transmissão de informação são geradas como resultado do processo de codificação.
- Remover esta redundância implica em um aumento da eficiência do sinal codificado, em transportar informação.

Se conhecemos uma parcela suficiente de um sinal redundante podemos inferir o resto do sinal, ou pelo menos tentar fazer uma estimativa provável.

Em particular, se conhecemos o comportamento passado de um sinal até um determinado ponto no tempo, então é possível fazer alguma inferência sobre seus valores futuros.

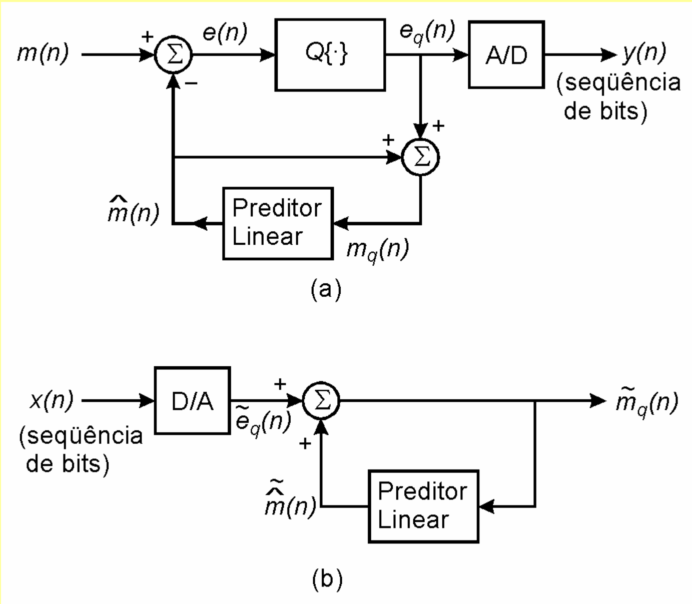
Tal processo de inferência é conhecido como **predição**.

Embora existam inúmeros métodos de predição, no contexto de codificação DPCM nos limitaremos à denominada Predição Linear.

Na Predição Linear uma amostra futura é obtida como uma combinação linear de um conjunto de amostras passadas.

→ Suponhamos, então, que um sinal $m(t)$ seja amostrado a uma razão $f_s >> f_{Nyquist}$ produzindo uma seqüência de amostras correlacionadas espaçadas no tempo de um intervalo T_s.

→ O fato de que é possível predizer valores futuros de $m(n)$ provê motivação para a implementação do esquema de quantização diferencial mostrado abaixo - DPCM.



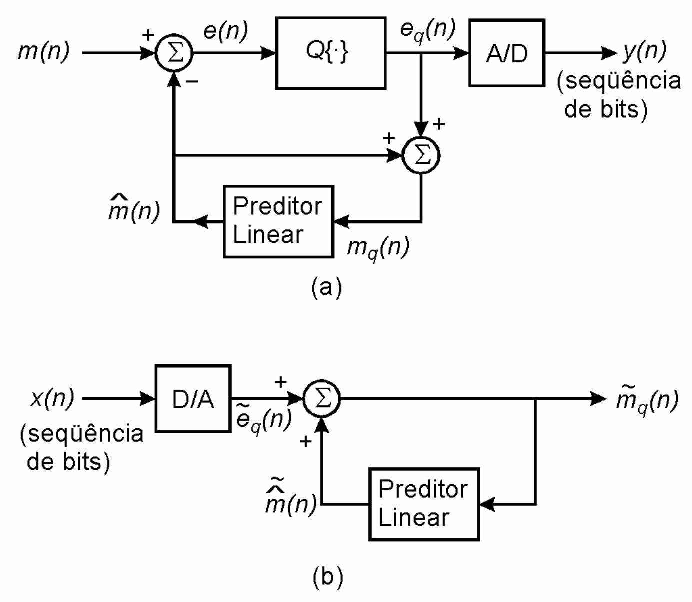
Sistema DPCM.
(a) Codificador (no transmissor digital)
(b) Decodificador (no receptor digital).

- No sistema DPCM, a entrada do quantizador $Q\{\cdot\}$ não é o sinal a ser codificado e, sim, o **sinal de erro** $e(n) = m(n) - \hat{m}(n)$, o qual é a diferença entre o sinal amostrado $m(n)$ e a predição $\hat{m}(n)$ do mesmo.

- O sinal $\hat{m}(n)$ é o resultado do processo de predição linear aplicado sobre um conjunto de amostras passadas do sinal $m_q(n)$, este último sendo uma versão quantizada do sinal $m(n)$.

- O sinal de erro $e(n)$ é denominado de erro de predição visto que seu valor representa a incapacidade do Preditor Linear em prever $m(n)$ com exatidão.

- Ao aplicarmos a saída do quantizador $e_q(n) = Q\{e(n)\}$ ao conversor A/D obtemos a seqüência $y(n)$ de bits DPCM ou mensagens codificadas em DPCM .



Sistema DPCM

- O <u>erro de quantização pode ser considerado um ruído superposto ao sinal após a quantização</u>, e é denominado ruído de quantização.
- A saída do quantizador pode ser decomposta, portanto, em $e_q(n) = Q\{e(n)\} = e(n) + q_e(n)$ onde $q_e(n)$ representa o ruído ou erro de quantização superposto ao sinal.
- A saída do quantizador $e_q(n) = Q\{e(n)\}$, isto é, o erro de predição quantizado, é adicionado ao valor predito $\hat{m}(n)$ para formar o sinal de entrada $m_q(n)$ do Preditor Linear $m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n)$.

A interpretação de $m_q(n)$ é a seguinte:

- $m(n) = \hat{m}(n) + e(n)$, logo,

se ao invés de $e(n)$, acrescentarmos à predição $\hat{m}(n)$ a versão quantizada de $e(n)$, $e_q(n)$, então o resultado será a versão quantizada $m_q(n)$ do sinal original $m(n)$,

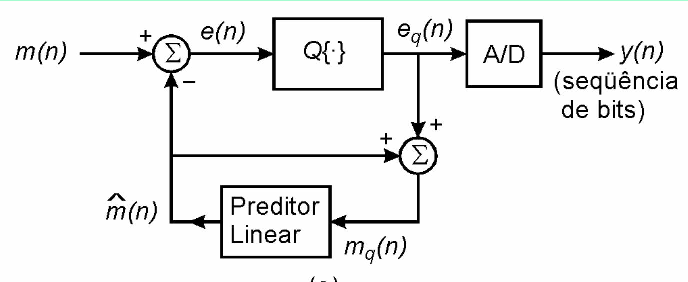
- $m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n)$.

- Substituindo $e_q(n) = e(n) + q_e(n)$ em $m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n)$, temos que $m_q(n) = \hat{m}(n) + (e(n) + q_e(n))$. Mas, temos que $\hat{m}(n) = m(n) - e(n)$, de onde $m_q(n) = m(n) + q_e(n)$, que representa a versão quantizada $m_q(n)$ do sinal original $m(n)$ através da decomposição do sinal quantizado $m_q(n)$ em sinal original $m(n)$ e ruído de quantização $q_e(n)$.

- Não importando a capacidade de predição do Preditor Linear, o sinal quantizado $m_q(n)$, na entrada do Preditor Linear, difere do sinal original $m(n)$ apenas do valor do ruído ou erro de quantização $q_e(n)$.

Vantagem do sistema DPCM sobre o sistema PCM:

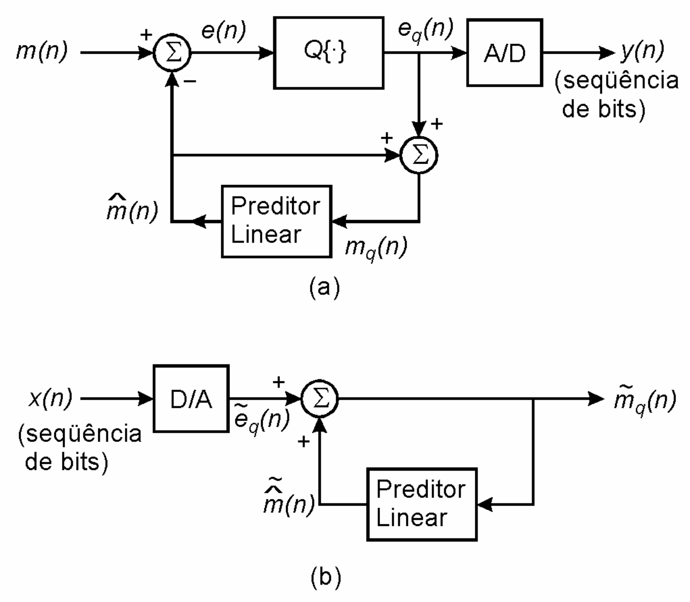
- Seja $Q\{\cdot\}$ um quantizador com M níveis de quantização e passo de quantização $S = (V_H - V_L)/M$, sendo $V_H - V_L$ a faixa dinâmica do sinal em sua entrada.
- No caso do sistema DPCM, se o Preditor Linear prevê $m(n)$ com exatidão, então a **faixa dinâmica** $V_H - V_L$ **do sinal** $e(n)$ **na entrada de** $Q\{\cdot\}$ **será muito menor do que a faixa dinâmica do sinal** $m(n)$ **na entrada de** $Q\{\cdot\}$ para o caso do sistema PCM.
- Portanto, para um mesmo M, $S = (V_H - V_L)/M$ será menor para o sistema DPCM do que para o sistema PCM, o que implica que a potência do erro de quantização $\overline{q_e^{\,2}} = S^2/12$ menor no sistema DPCM do que no sistema PCM.



(a)

- Considere um sistema PCM operacional, de N bits. Ao ligar o preditor, a potência do erro de quantização cairá em função da diminuição da excursão do sinal a ser quantizado $(V_H - V_L)$.
- Com a diminuição da potência do erro de quantização, a SNR de quantização aumentará grandemente, permitindo a redução do número de bits do codificador.
- A SNR de quantização é proporcional ao número N de bits ($\mathrm{SNR_Q} = 6N\ [\mathrm{dB}]$) portanto, se pudermos reduzir a SNR, poderemos reduzir o número de bits utilizados, de tal forma que o codificador DPCM poderá trabalhar com número de bits reduzido com respeito ao sistema PCM, atingindo desempenho comparável ou superior (A/D de menos bits).

Decodificador DPCM



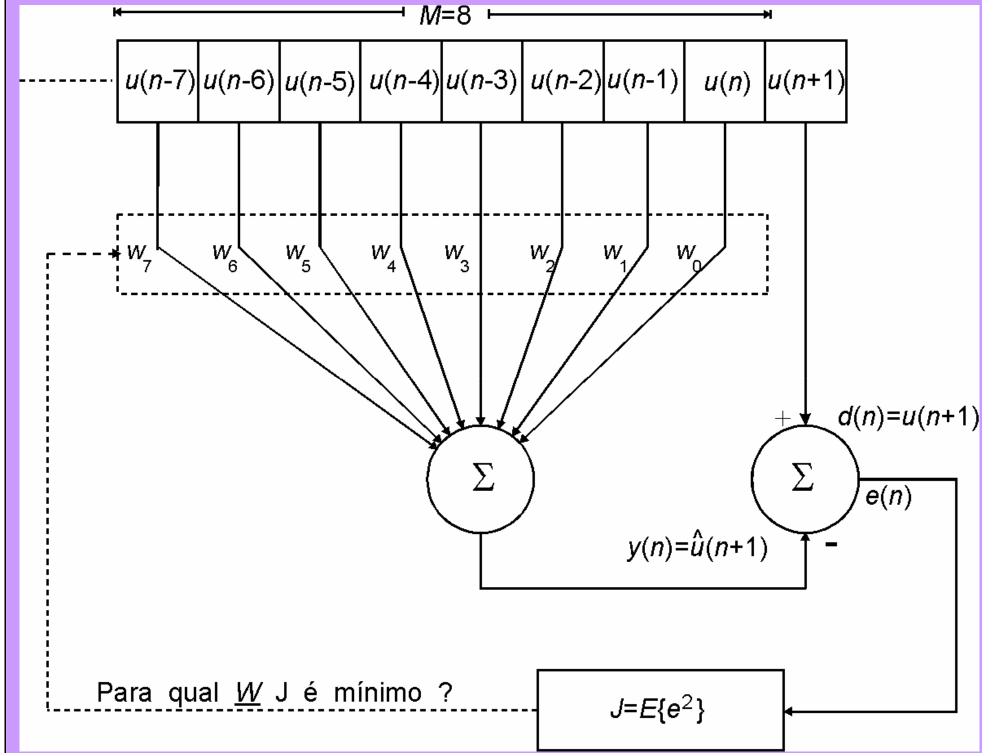
– No transmissor digital, a soma da predição $\hat{m}(n)$ com a versão quantizada $e_q(n) = Q\{e(n)\}$ do erro de predição $e(n)$ resulta no sinal quantizado $m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n)$.

– O D/A gera em sua saída o sinal $\tilde{e}_q(n)$, que é uma aproximação do sinal $e_q(n)$ no transmissor, aproximação resultante da eventual degradação de $e_q(n)$ pela transmissão através do canal.

– Mas, quanto ao processo de predição, o fluxo de sinal no receptor é o mesmo do transmissor, de modo que $\tilde{m}_q(n) = \tilde{\hat{m}}(n) + \tilde{e}_q(n)$.

– De fato, se o canal de transmissão não introduzir nenhuma degradação no sinal transmitido, então $\tilde{m}_q(n) \rightarrow m_q(n)$.

Predição Linear



$$\hat{u}(n+1) = y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} W_k \, u(n-k) = \underline{W}^T \underline{u}\,; \qquad \underline{W} = \mathbf{R}^{-1}\underline{P}$$

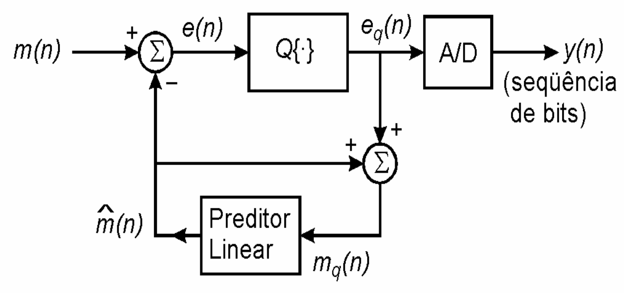
- No contexto de codificação DPCM, utiliza-se para construir $\mathbf{R}$ e $\underline{P}$ um conjunto suficientemente grande formado pela amostras passadas mais recentes de $m_q(n)$, de forma que $\mathbf{R}$ e $\underline{P}$ são reavaliados a cada N_p predições.

- A cada nova reavaliação de $\mathbf{R}$ e $\underline{P}$ os coeficientes do filtro $\underline{W}$ são obtidos por $\underline{W} = \mathbf{R}^{-1}\underline{P}$ e são enviados ao filtro do receptor através do canal de transmissão.

- Note ainda que, a partir da inicialização de um sistema DPCM, devido à saída do preditor ser realimentada para sua entrada, tanto o preditor do transmissor como o do receptor necessitam de um razoável número de amostras até que consigam reduzir o erro de predição a níveis aceitáveis.

Exemplo de predição linear:

A seqüência $m_q(n)$ é aplicada à entrada do Preditor Linear do codificador DPCM mostrado na figura ao lado.



Codificador DPCM do TX digital.

Para

$$m_q(n) = \{-2,\ -1.414,\ 0,\ 1.414,\ 2,\ 1.414, 0, -1.414, -2, -1.414,\ 0\cdots\}$$

determine $\hat{m}(n)$ sabendo que o Preditor Linear é de ordem 2 e utiliza 11 amostras consecutivas de $m_q(n)$ para a definição da matriz de correlação.

Determine $e(n)$ para $\hat{m}(n)$.

Nota: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r00 & r01 \\ r10 & r11 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{R}^{-1} = \dfrac{1}{(r00 \cdot r11 - r01 \cdot r10)} \begin{bmatrix} r11 & -r01 \\ -r10 & r00 \end{bmatrix}$

$$\hat{m}(n) = \hat{u}(n+1) = y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} W_k\, u(n-k) = \underline{W}^T \underline{u}$$

$$\underline{W} = \mathbf{R}^{-1} \underline{P}$$

Solução:

Estrutura de dados para a predição:

$$m_q(n) = \{-2,\ -1.414,\ 0,\ 1.414,\ 2,\ 1.414, 0, -1.414, -2, -1.414,\ 0\cdots\} =$$

$$= \{u(n-10),\ u(n-9), u(n-8),\ u(n-7),\ u(n-6),\ u(n-5), u(n-4), u(n-3), u(n-2), u(n-1), u(n)\cdots\}$$

$$\underline{u}(n) = \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(n-1) = \begin{bmatrix} u(n-1) \\ u(n-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(n-2) = \begin{bmatrix} u(n-2) \\ u(n-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1.414 \end{bmatrix}$$

...

$$\underline{u}(n-9) = \begin{bmatrix} u(n-9) \\ u(n-10) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz de auto-correlação R :

$$\underline{u}(n)\underline{u}^T(n) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.9994 \end{bmatrix}_0$$

$$\underline{u}(n-1)\underline{u}^T(n-1) = \begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.414 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9994 & 2.8280 \\ 2.8280 & 4 \end{bmatrix}_1$$

$$\underline{u}(n-2)\underline{u}^T(n-2) = \begin{bmatrix} -2 \\ -1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2.8280 \\ 2.8280 & 1.9994 \end{bmatrix}_2$$

$$\underline{u}(n-3)\underline{u}^T(n-3) = \begin{bmatrix} -1.414 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.414 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9994 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_3$$

$$\underline{u}(n-4)\underline{u}^T(n-4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.9994 \end{bmatrix}_4$$

$$\underline{u}(n-5)\underline{u}^T(n-5) = \begin{bmatrix} 1.414 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.414 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9994 & 2.8280 \\ 2.8280 & 4 \end{bmatrix}_5$$

$$\underline{u}(n-6)\underline{u}^T(n-6) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2.8280 \\ 2.8280 & 1.9994 \end{bmatrix}_6$$

$$\underline{u}(n-7)\underline{u}^T(n-7) = \begin{bmatrix} 1.414 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.414 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9994 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}_7$$

$$\underline{u}(n-8)\underline{u}^T(n-8) = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1.9994 \end{bmatrix}_8$$

$$\underline{u}(n-9)\underline{u}^T(n-9) = \begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1.414 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.9994 & 2.8280 \\ 2.8280 & 4 \end{bmatrix}_9$$

$$\Rightarrow \mathbf{R} = \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 17.9970 & 14.1400 \\ 14.1400 & 21.9970 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.7997 & 1.4140 \\ 1.4140 & 2.1997 \end{bmatrix}$$

Determinação do vetor de correlação cruzada $\underline{P}$:

$$p/\underline{u}(n) \rightarrow d(n)\underline{u}(n) = \hat{u}(n+1)\underline{u}(n) = \hat{u}(n+1)\begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} = ?$$

$$p/\underline{u}(n-1) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-1) = u(n)\underline{u}(n-1) = 0\begin{bmatrix} -1.414 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_0$$

$$p/\underline{u}(n-2) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-2) = u(n-1)\underline{u}(n-2) = -1.414\begin{bmatrix} -2 \\ -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 1.9994 \end{bmatrix}_1$$

$$p/\underline{u}(n-3) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-3) = u(n-2)\underline{u}(n-3) = -2\begin{bmatrix} -1.414 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 0 \end{bmatrix}_2$$

$$p/\underline{u}(n-4) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-4) = u(n-3)\underline{u}(n-4) = -1.414\begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9994 \end{bmatrix}_3$$

$$p/\underline{u}(n-5) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-5) = u(n-4)\underline{u}(n-5) = 0\begin{bmatrix} 1.414 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_4$$

Determinação do vetor de correlação cruzada $\underline{P}$ (continuação):

$$p/\underline{u}(n-6) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-6) = u(n-5)\underline{u}(n-6) = 1.414\begin{bmatrix} 2 \\ 1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 1.9994 \end{bmatrix}_5$$

$$p/\underline{u}(n-7) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-7) = u(n-6)\underline{u}(n-7) = 2\begin{bmatrix} 1.414 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.8280 \\ 0 \end{bmatrix}_6$$

$$p/\underline{u}(n-8) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-8) = u(n-7)\underline{u}(n-8) = 1.414\begin{bmatrix} 0 \\ -1.414 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1.9994 \end{bmatrix}_7$$

$$p/\underline{u}(n-9) \rightarrow d(n)\underline{u}(n-9) = u(n-8)\underline{u}(n-9) = 0\begin{bmatrix} -1.414 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_8$$

$$\Rightarrow \underline{P} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 11.3120 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.2569 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Determinação do vetor de pesos $\underline{W}$ do preditor linear:

$$\underline{W} = \mathbf{R}^{-1}\underline{P} = \begin{bmatrix} 1.7997 & 1.4140 \\ 1.4140 & 2.1997 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1.2569 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.1226 & -0.7216 \\ -0.7216 & 0.9185 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2569 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.4110 \\ -0.9070 \end{bmatrix}$$

Determinação do valor estimado $\hat{u}(n+1)$ para a 1ª. amostra subseqüente à série conhecida:

$$\hat{u}(n+1) = y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} W_k \, u(n-k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{1} W_k \, u(n-k) = W_0 u(n) + W_1 u(n-1) = (1.4110)(0) + (-0.9070)(-1.414) = 1.2825$$

Determinação do erro de predição $e(n)$:

$$m_q(n) = \{-2,\ -1.414,\ 0,\ 1.414,\ 2,\ 1.414,\ 0,\ -1.414,\ -2,\ -1.414,\ 0,\ \underline{1.414}, \cdots\}$$

$$e(n) = 1.414 - 1.2825 = 0.1315$$