



Modulação FSK (frequency shift keying)



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

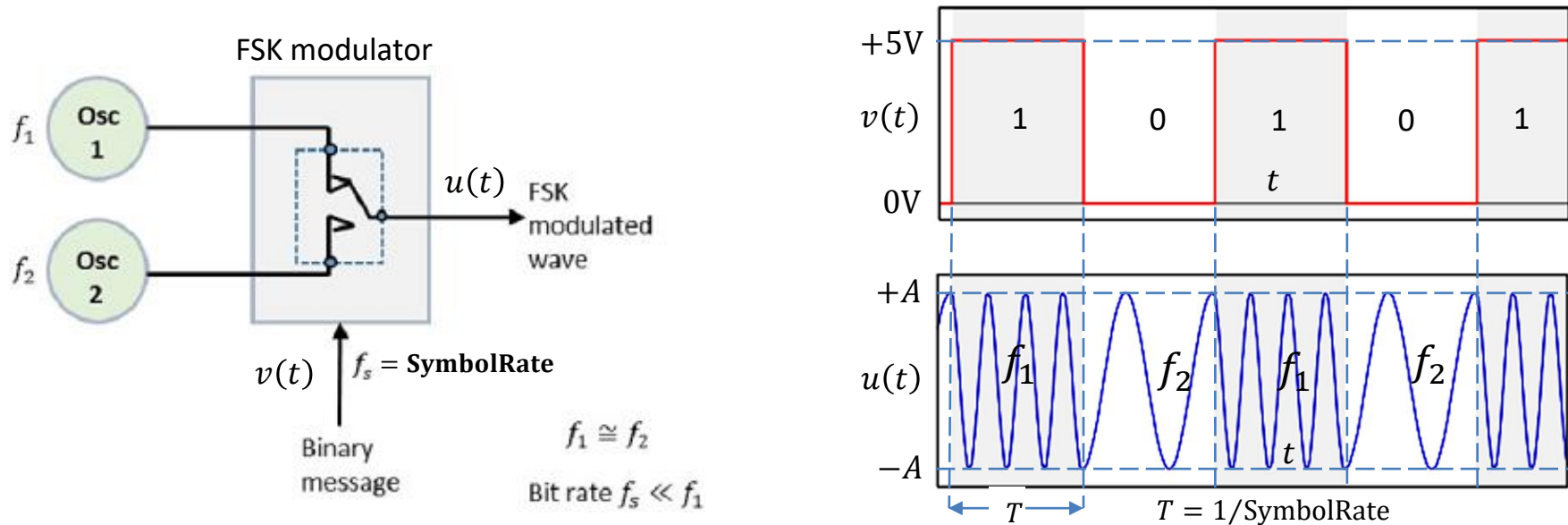
ELC1120 – Telecomunicações II

Profa. Candice Müller Prof. Fernando DeCastro

Modulação M-FSK

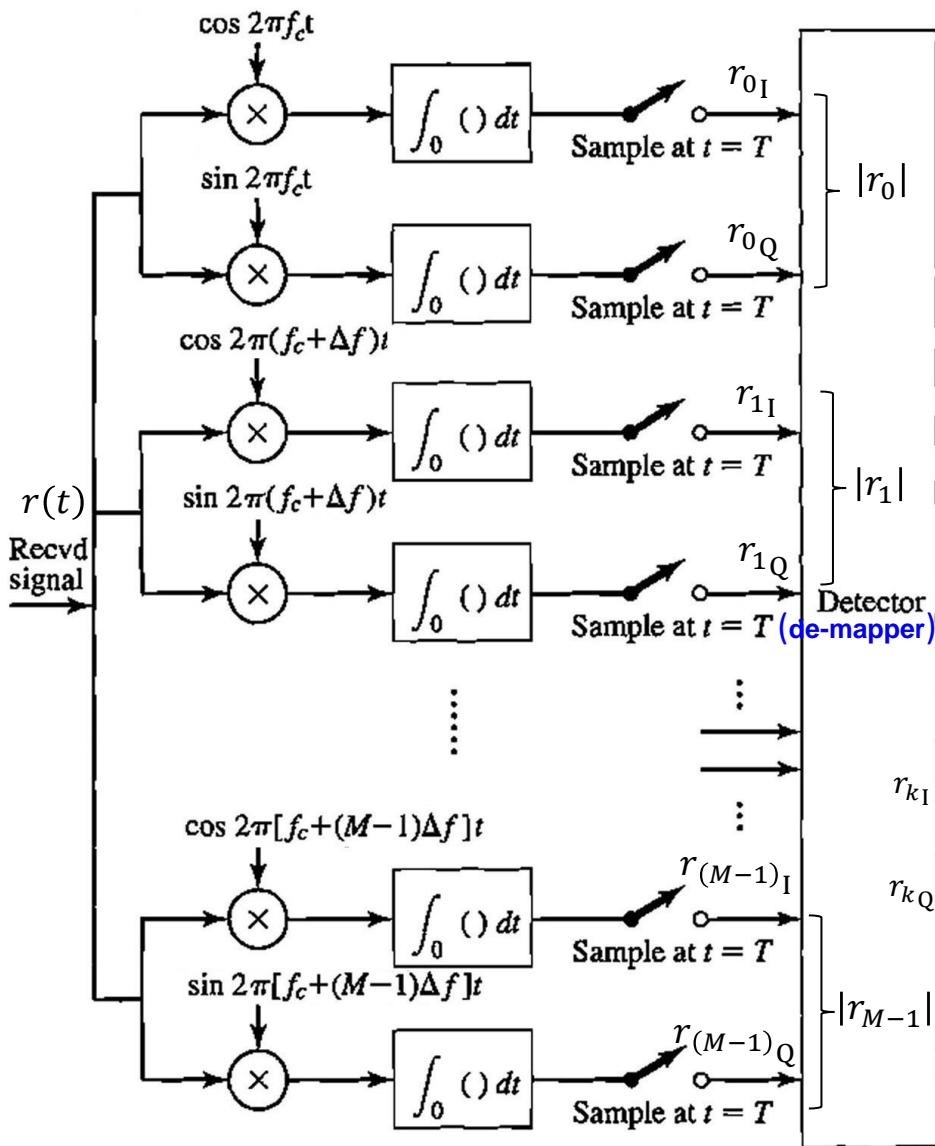
No Cap VIII.1 das notas de aulas estudamos as modulações M -QAM, M -PSK e M -PAM, sendo M o número de símbolos IQ da modulação. Para estas modulações a cossenóide $u(t)$ na saída do modulador tinha sua amplitude A e/ou fase θ variadas em correspondência ao símbolo IQ de duração T (e palavra binária associada) a ser transmitido, mas a frequência f da cossenóide era mantida constante, sendo f a frequência central do canal de transmissão (ver slide 3 Cap VIII.1).

No caso da modulação M -FSK (*frequency shift keying*) a cossenóide $u(t)$ na saída do modulador tem sua amplitude A e fase θ constantes, mas f varia em correspondência a cada uma das M palavras binárias de duração T a serem transmitidas. Especificamente, a frequência da cossenóide é tal que $f \in \{f_1, f_2, \dots, f_M\}$, sendo gerada durante um período de símbolo T em correspondência à palavra binária. A separação entre duas frequências adjacentes f_n e f_{n+1} no conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ é $f_n - f_{n+1} = \Delta f$, separação que idealmente seria a menor possível para efeito de eficiência espectral, mas que deve obedecer a condição $\Delta f = 1/T$ para manter a ortogonalidade entre as cossenóides geradas, conforme veremos no slide 4. A cada frequência do conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ é associada uma palavra binária de tamanho $N = \log_2(M)$ bits, portanto cada tom transmitido do conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ representa uma palavra binária de N bits. Por exemplo, a figura abaixo representa um sistema FSK binário (2-FSK), que transmite palavras binárias de $N = \log_2(2) = 1$ bit de tamanho. Especificamente, quando o modulador transmite $v_1(t) = A \cos(2\pi f_1 t)$ o bit "1" é transmitido e quando o modulador transmite $v_2(t) = A \cos(2\pi f_2 t)$ o bit "0" é transmitido.



Demodulação M-FSK

Para um sistema M -FSK transmitindo um conjunto de tons $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ separados de $\Delta f = f_n - f_{n+1}$, a demodulação é feita conforme mostra a figura.



Note que são necessários 2 correladores p/ identificar cada tom do conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$, sendo $f_1 = f_c$ e $f_M = f_c + (M - 1)\Delta f$. O sinal recebido é correlacionado com cada um dos $2M$ osciladores locais em quadratura $\cos(2\pi[f_c + k\Delta f]t)$ e $\sin(2\pi[f_c + k\Delta f]t)$, sendo $k = 0, 1, \dots, M - 1$. A saída de cada um dos $2M$ correladores são amostrados ao final do intervalo de símbolo T e o resultado é entregue à lógica combinacional do *de-mapper* de forma a que se obtenha em sua saída a estimativa da palavra binária transmitida.

Desta maneira, se o m -ésimo tom $f_c + m\Delta f$ é transmitido, $m = 0, 1, \dots, M - 1$, então o sinal recebido é $r(t) = A \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \phi)$, sendo A e ϕ a amplitude e a fase com que o sinal é recebido do canal.

Nesta situação, no instante de amostragem T , as saídas r_{kI} e r_{kQ} dos respectivos $2M$ samplers após a integração efetuada pelos respectivos $2M$ correladores, com $k = 0, 1, \dots, M - 1$, resultam em:

$$r_{kI} = A \left[\frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (1)$$

$$r_{kQ} = A \left[\frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (2)$$

O *de-mapper* estima a palavra binária transmitida com base no maior valor dentre os valores $|r_k|$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$, sendo r_k dado por

$$r_k = r_{kI} + jr_{kQ} \quad (3)$$

Demodulação M-FSK

$$r_{kI} = A \left[\frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (1)$$

$$r_{kQ} = A \left[\frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (2)$$

$$r_k = r_{kI} + jr_{kQ} \quad (3)$$

$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} \quad (3A)$$

Note de (1) e (2) que o m -ésimo tom $f_c + m\Delta f$ transmitido (e portanto, recebido) resulta para $k = m$ um valor máximo nas saídas r_{kI} e r_{kQ} :

$$r_{mI} = A \left[\frac{\sin(2\pi(m-m)\Delta f T)}{2\pi(m-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(m-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(m-m)\Delta f T} \sin \phi \right] = A \cos \phi$$

$$r_{mQ} = A \left[\frac{\cos(2\pi(m-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(m-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(m-m)\Delta f T)}{2\pi(m-m)\Delta f T} \sin \phi \right] = A \sin \phi$$

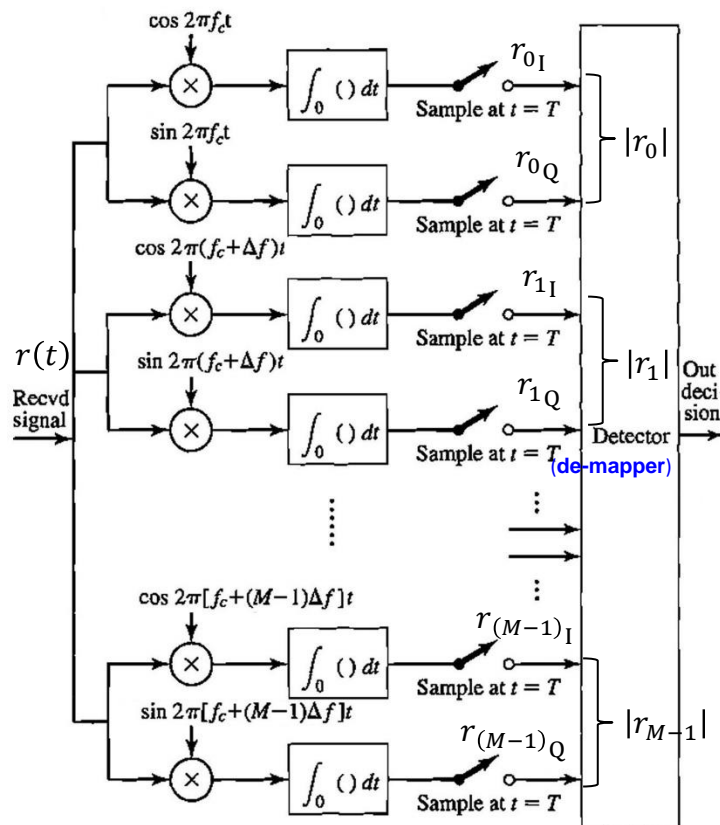
Daí, o *de-mapper* calcula de (3) o módulo de $r_m = r_{mI} + jr_{mQ}$ resultando em $|r_m| = \sqrt{(r_{mI})^2 + (r_{mQ})^2} = \sqrt{(A \cos \phi)^2 + (A \sin \phi)^2} = A$. (4)

Note ainda de (1) e (2) que se a condição $\Delta f = 1/T$ é obedecida os tons do conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ tornam-se ortogonais entre si para $k \neq m$:

$$r_{kI} = A \left[\frac{\sin(2\pi(k-m))}{2\pi(k-m)} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)) - 1}{2\pi(k-m)} \sin \phi \right] = 0$$

$$r_{kQ} = A \left[\frac{\cos(2\pi(k-m)) - 1}{2\pi(k-m)} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m))}{2\pi(k-m)} \sin \phi \right] = 0$$

$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} = \sqrt{(0)^2 + (0)^2} = 0 \quad \text{p/ } k \neq m \text{ e } \Delta f = 1/T. \quad (5)$$



Demodulação M-FSK

$$r_{kI} = A \left[\frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi - \frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (1)$$

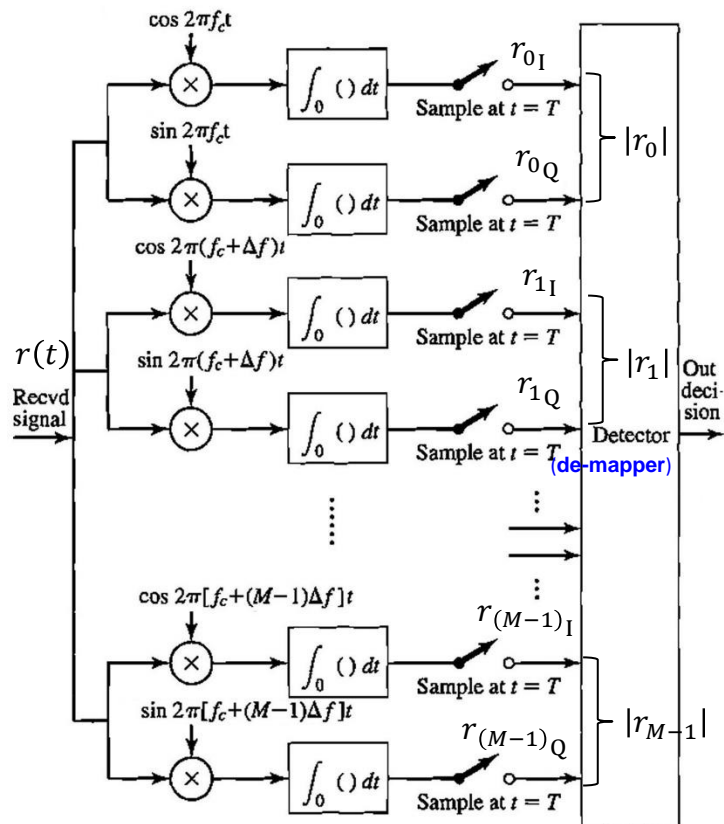
$$r_{kQ} = A \left[\frac{\cos(2\pi(k-m)\Delta f T) - 1}{2\pi(k-m)\Delta f T} \cos \phi + \frac{\sin(2\pi(k-m)\Delta f T)}{2\pi(k-m)\Delta f T} \sin \phi \right] \quad (2)$$

$$r_k = r_{kI} + jr_{kQ} \quad (3)$$

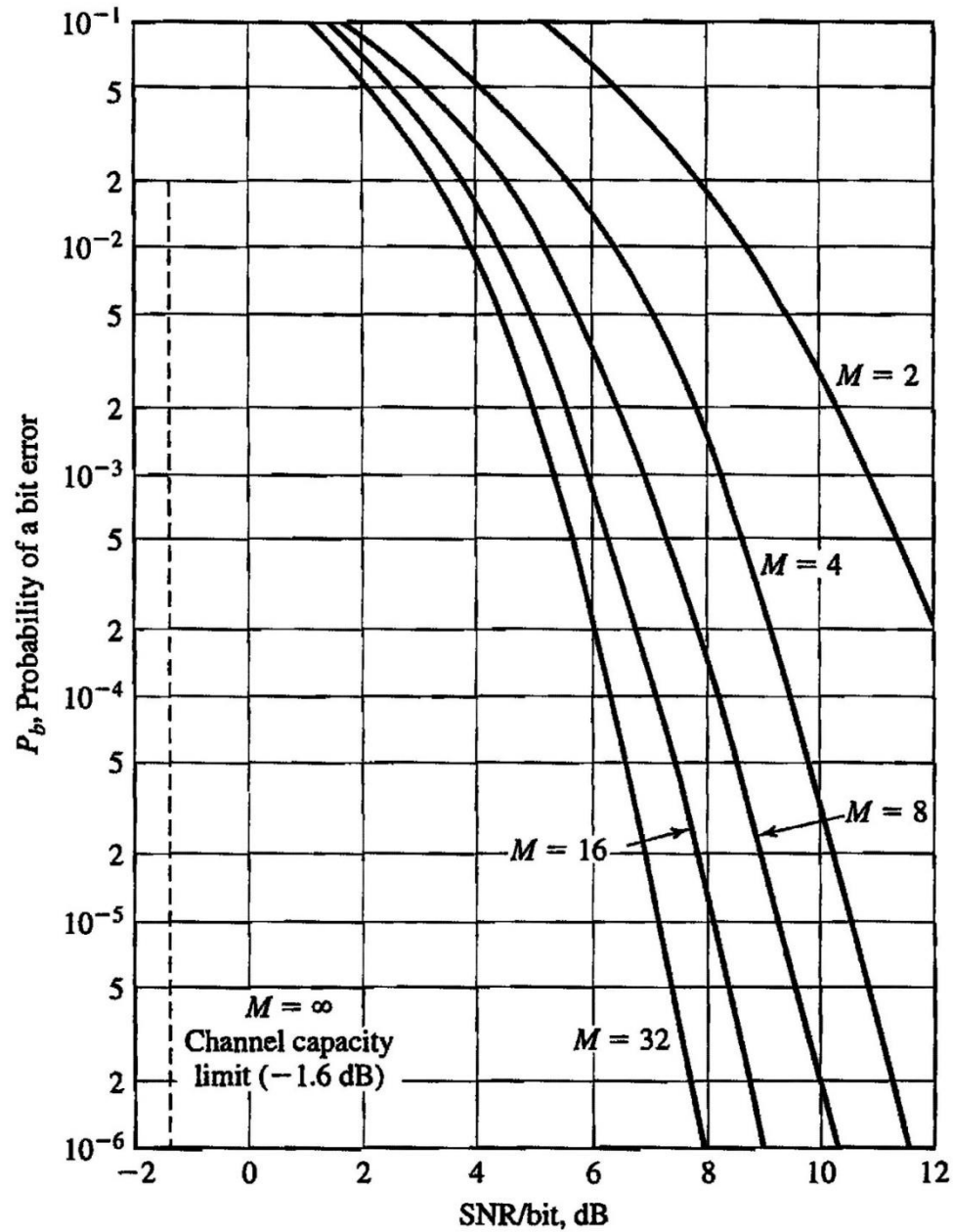
$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} \quad (3A)$$

Portanto, de acordo com o discutido nos slides anteriores, para o sinal recebido $r(t) = A \cos(2\pi f_c t + 2\pi m \Delta f t + \phi)$ a saída $|r_k|$ resulta A para $k = m$ e todas as demais saídas $|r_k|$ resultam 0 para $k \neq m$ desde que a condição $\Delta f = 1/T = \text{SymbolRate}$ seja obedecida (fazendo os tons do conjunto $\{f_1, f_2, \dots, f_M\}$ ortogonais entre si para $k \neq m$):

$$|r_k| = \sqrt{(r_{kI})^2 + (r_{kQ})^2} = \begin{cases} A & k = m \\ 0 & k \neq m \end{cases} \quad \rho / \Delta f = 1/T \text{ e } \forall \phi \quad (6)$$

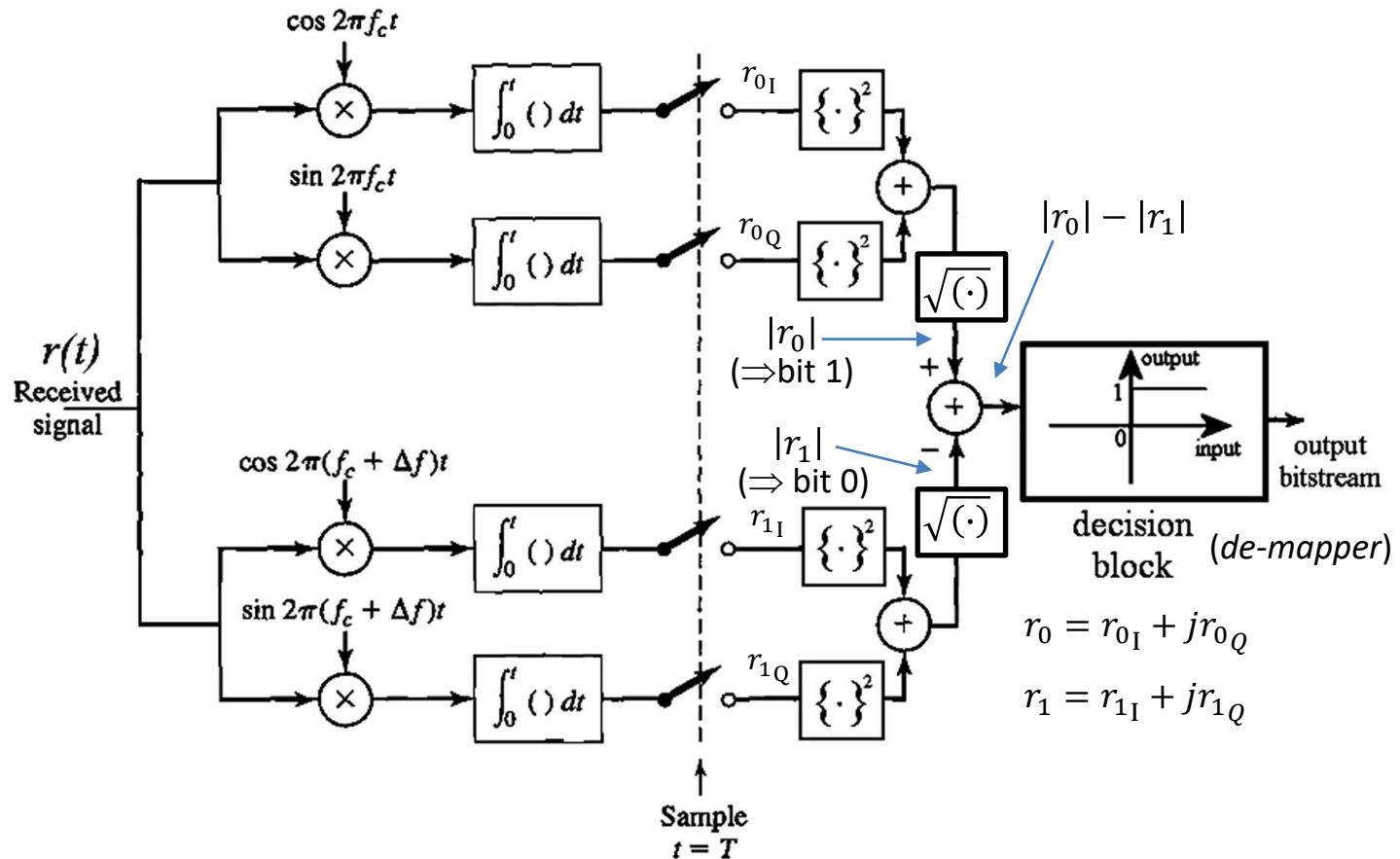


Desempenho da modulação M-FSK $p/\Delta f = 1/T$



Demodulação M-FSK - exemplo

Exemplo: Um satélite LEO (*Low Earth Orbit* – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Low_Earth_orbit) utiliza um *link* de telemetria operando em $f_c = 137$ MHz e modulação FSK binária. O diagrama abaixo mostra o demodulador do RX do referido *link*.



O sinal recebido na entrada do demodulador é da forma $r(t) = 0.1 \cos(2\pi f_r t + \phi)$, onde $f_r \in \{f_c, f_c + \Delta f\}$ assume um dos dois valores de frequência em correspondência com a respectiva transmissão do “bit 1” ou do “bit 0” pelo TX. O *bitrate* (taxa de bits) no *output bitstream* é 5 Kbps. O ângulo ϕ representa a fase com que a frente da onda eletromagnética é recebida na antena do RX.

Demodulação M-FSK - exemplo

Pede-se:

(a) Assumindo que o satélite esteja no zênite da estação RX em terra, de modo que a velocidade v relativa entre RX e TX pode ser considerada desprezível, plote $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$ e $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$ em um mesmo gráfico no intervalo $0 < \Delta f < 4\text{SymbolRate}$ para a situação em que o “bit 0” é transmitido, isto é, para a situação em que o sinal recebido é $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi)$. Quais valores de Δf maximizam a capacidade do *decision block* discriminar entre o “bit 0” e o “bit 1? Dentre estes valores de Δf , qual o que minimiza a banda passante ocupada no canal de transmissão?

(b) Assuma que o satélite esteja despontando na linha do horizonte e com linha de visada com a estação RX em terra (se aproximando da estação RX), de modo que a velocidade v relativa entre RX e TX pode ser aproximada pela velocidade orbital $v = 28000$ Km/h. Nesta situação operacional os tons f_c e $f_c + \Delta f$ emitidos pelo TX incidem na antena do RX acrescidos de um desvio de frequência $f_{\text{doppler}} = v \frac{f_c}{c}$, de modo que $f_{c\text{TX}} = f_{c\text{RX}} + f_{\text{doppler}}$, sendo, $c = 2.997925 \times 10^8$ m/s a velocidade de propagação da onda entre as antenas TX e RX. Para esta situação operacional plote $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$ e $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$ em um mesmo gráfico no intervalo $0 < \Delta f < 4\text{SymbolRate}$ para a situação em que o “bit 0” é transmitido, isto é, para a situação em que o sinal recebido é $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f + f_{\text{doppler}})t + \phi)$. Qual o efeito do desvio de frequência f_{doppler} na capacidade do *decision block* discriminar entre o “bit 0” e o “bit 1 para uma separação entre tons $\Delta f = \text{SymbolRate}$?

(c) Para o conjunto de velocidades $v \in \{0.25c, 0.5c, 0.75c, c\}$ plote $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$ e $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$ em um mesmo gráfico no intervalo $0 < \Delta f < 4\text{SymbolRate}$ para a situação em que o “bit 0” é transmitido, isto é, para a situação em que o sinal recebido é $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f + f_{\text{doppler}})t + \phi)$. Para cada uma das velocidades e respectivos desvio de frequência f_{doppler} , qual é a capacidade do *decision block* discriminar entre o “bit 0” e o “bit 1 para uma separação entre tons $\Delta f = \text{SymbolRate}$?

(d) Para uma separação entre tons $\Delta f = \text{SymbolRate}$, qual valor de velocidade relativa v entre TX e RX a partir do qual a capacidade δ do *decision block* discriminar entre o “bit 0” e o “bit 1 é reduzida a 70% de seu máximo? Esta redução de δ reduz o desempenho do enlace? Se sim, quantifique esta redução de desempenho em termos da SNR necessária no canal de transmissão para que seja mantida uma determinada BER na saída do *de-mapper (decision block)*.

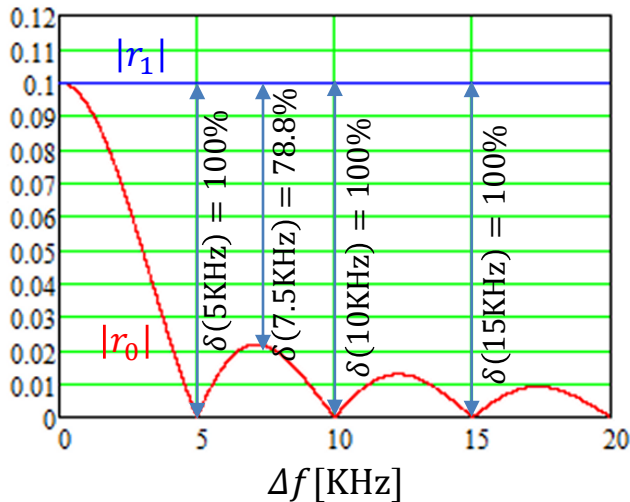
Demodulação M-FSK - exemplo

Solução:

(a) Dado que o FSK é binário (1 bit/símbolo) o *bitrate* do *bitstream* na saída do demodulador define o valor do SymbolRate – portanto SymbolRate = 5000 symbols/s. Daí o intervalo de símbolo é $T = 1/\text{SymbolRate} = 0.2$ ms. Ainda, do enunciado, é dado que $A = 0.1$.

Para plotar $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$, $0 < \Delta f < 20\text{KHz}$, na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e, $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi)$, vamos usar as equações (1), (2) e (3) com $k = 0$ (representando a saída r_0 do correlator que detecta o tom f_c) e com $m = 1$ (representando que a frequência do tom $r(t)$ recebido é $f_c + \Delta f$).

Para plotar $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$, $0 < \Delta f < 20\text{KHz}$, na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e, $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + \Delta f)t + \phi)$, vamos usar as equações (1), (2) e (3) com $k = 1$ (representando a saída r_1 do correlator que detecta o tom $f_c + \Delta f$) e com $m = 1$ (representando que a frequência do tom $r(t)$ recebido é $f_c + \Delta f$).



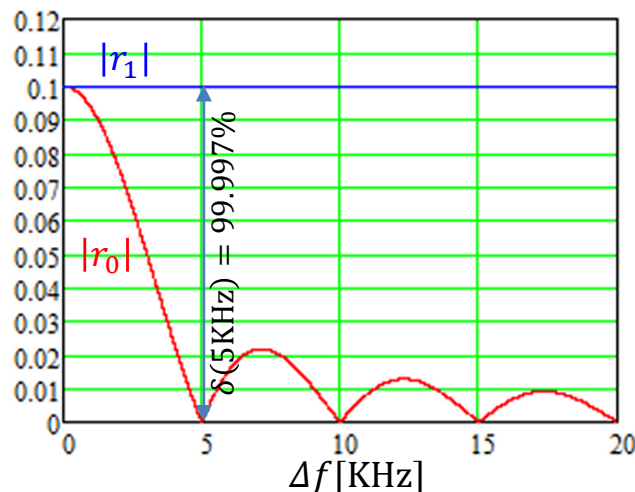
A capacidade de discriminação do *decision block* (em %) para uma determinada separação Δf entre tons adjacentes é dada por $\delta(\Delta f) = 100 \frac{|r_1(\Delta f)| - |r_0(\Delta f)|}{A}$. Note no gráfico ao lado que a capacidade de discriminação δ é máxima quando Δf é um múltiplo inteiro do SymbolRate, situação que ortogonaliza os tons transmitidos. Para efeito de minimizar a banda passante ocupada no canal de transmissão é usual adotar a menor separação dada por $\Delta f = 1/T = \text{SymbolRate}$.

Demodulação M-FSK - exemplo

(b) Dado que o enlace de telemetria opera em $f_c = 137$ MHz, que a velocidade orbital é $v = 28000$ Km/h e que o satélite está despontando na linha do horizonte então os tons f_c e $f_c + \Delta f$ emitidos pelo TX incidem na antena do RX acrescidos de um desvio de frequência $f_{\text{doppler}} = v \frac{f_c}{c} = 3.554$ KHz.

Se os tons f_c e $f_c + \Delta f$ recebidos do TX estão deslocados de f_{doppler} então o índice m nas equações (1) e (2) (que é o índice associado à frequência do tom $r(t)$ recebido) não será mais um índice inteiro, mas sim será dado por $m_d = m \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right)$.

Para plotar $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$, $0 < \Delta f < 20$ KHz, na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e, $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f)t + \phi)$ vamos usar as equações (1), (2) e (3) com $k = 0$ (representando a saída r_0 do correlator que detecta o tom f_c) e com $m = 1 \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right) = 1.000026$ (representando que a frequência do tom $r(t)$ recebido é $f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f$). E para plotar $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$, $0 < \Delta f < 20$ KHz, na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e, $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f)t + \phi)$ vamos usar as equações (1), (2) e (3) com $k = 1$ (representando a saída r_1 do correlator que detecta o tom $f_c + \Delta f$) e com $m = 1 \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right) = 1.000026$ (representando que a frequência do tom $r(t)$ recebido é $f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f$):



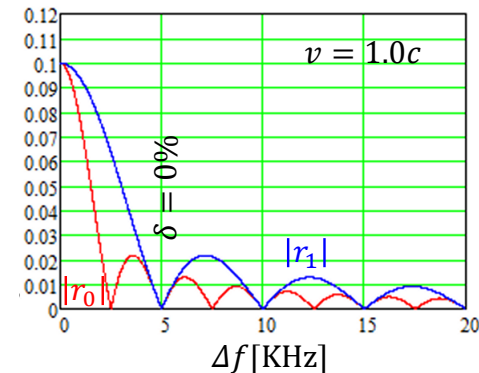
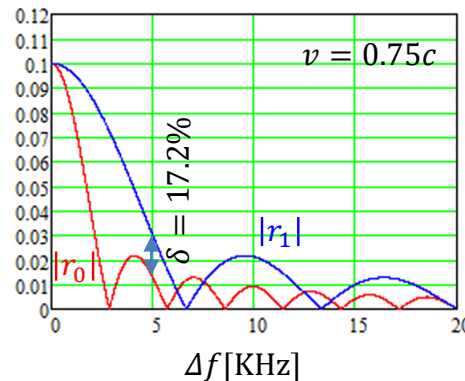
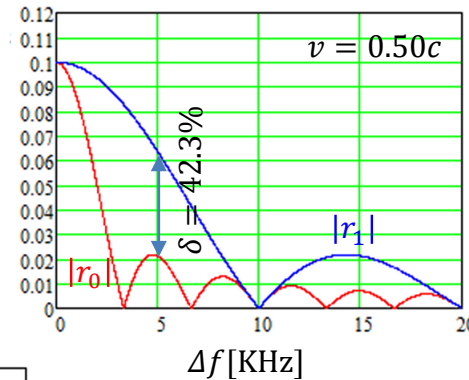
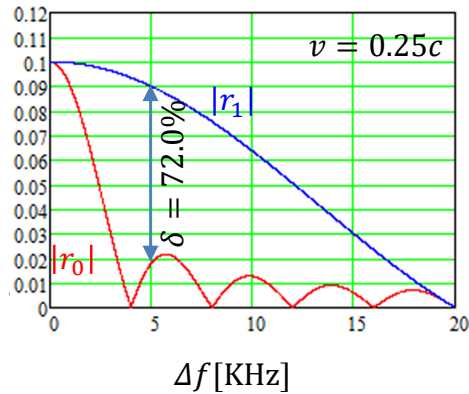
A capacidade de discriminação do *decision block* (em %) $\delta(\Delta f) = 100 \frac{|r_1(\Delta f)| - |r_0(\Delta f)|}{A}$, para uma separação $\Delta f = \text{SymbolRate}$ entre tons, resulta $\delta(5\text{KHz}) = 99.997\%$.

Comparando com $\delta(5\text{KHz}) = 100\%$ obtida em (a) quando o satélite estava no zênite ($v = 0$), observa-se que a capacidade de discriminação do *decision block* é minimamente afetada pela velocidade relativa $v = 28000$ Km/h entre TX e RX quando o satélite está despontando no horizonte, não sendo necessário ação do sub-sistema de sincronismo de portadora para efeito de correção do desvio Doppler.

De fato, FSK binário é basicamente imune ao efeito Doppler para todos os fins práticos na faixa de VHF.

Demodulação M-FSK - exemplo

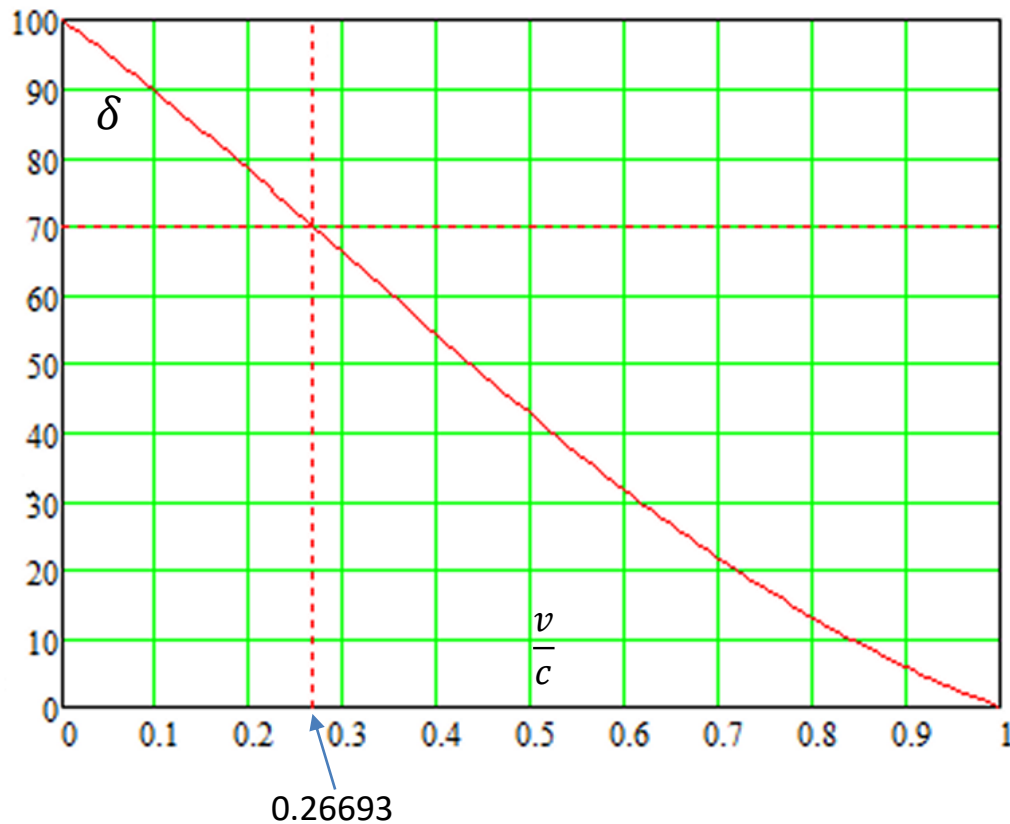
(c) Para cada uma das velocidades do conjunto $v \in \{0.25c, 0.5c, 0.75c, c\}$ os tons f_c e $f_c + \Delta f$ recebidos do TX estarão respectivamente deslocados de $f_{\text{doppler}} = v \frac{f_c}{c}$. Conforme visto no item (b), o índice m nas equações (1) e (2), que é o índice associado à frequência do tom $r(t)$ recebido, passa a ser dado por $m_d = m \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right)$. Para plotar $|r_0(\Delta f)| \times \Delta f$, $0 < \Delta f < 20\text{KHz}$, na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e, $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f)t + \phi)$ vamos usar as equações (1), (2) e (3) com $k = 0$ (representando a saída r_0 do correlator que detecta o tom f_c) e com $m = 1 \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right)$ (representando que a frequência do tom $r(t)$ recebido é $f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f$). E para plotar $|r_1(\Delta f)| \times \Delta f$, $0 < \Delta f < 20\text{KHz}$, na situação em que o “bit 0” é transmitido, i.e, $r(t) = 0.1 \cos(2\pi(f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f)t + \phi)$ vamos usar as equações (1), (2) e (3) com $k = 1$ (representando a saída r_1 do correlator que detecta o tom $f_c + \Delta f$) e com $m = 1 \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right)$ (representando que a frequência do tom $r(t)$ recebido é $f_c + f_{\text{doppler}} + \Delta f$):



$$\delta(\Delta f) = 100 \frac{|r_1(\Delta f)| - |r_0(\Delta f)|}{A}$$

Demodulação M-FSK - exemplo

(d) Para determinar valor de velocidade relativa v entre TX e RX a partir da qual a capacidade de *decision block* discriminar entre o “bit 0” e o “bit 1 é reduzida a 70% de seu máximo, adotando uma separação entre tons $\Delta f = \text{SymbolRate}$, vamos plotar a capacidade de discriminação do decision block $\delta = 100 \frac{|r_1| - |r_0|}{A}$ a partir das equações (1), (2) e (3), para uma separação $\Delta f = \text{SymbolRate}$ entre tons, e para $m_d = m \left(\frac{f_c + f_{\text{doppler}}}{f_c} \right) = 1 \left(\frac{f_c + v \frac{f_c}{c}}{f_c} \right) = 1 + \frac{v}{c}$, com $\frac{v}{c}$ variando na faixa $0 < \frac{v}{c} < 1$:



Note no gráfico que para $\frac{v}{c} = 0.26693$ a capacidade de discriminação do *decision block* é reduzida para $\delta = 70\%$.

Sob operação normal do enlace, ruído gaussiano do canal de transmissão é adicionado ao sinal recebido $r(t) = A \cos(2\pi f_r t + \phi)$. Para $\delta = 100\%$ é necessário uma amplitude instantânea de ruído igual a A para o *decision block* decidir erroneamente, mas para $\delta = 70\%$ é necessário apenas uma amplitude de ruído igual a $0.7A$ para que ocorra erro de decisão no *decision block*.

Então, para operação sob $\delta = 70\%$, é como se amplitude do sinal fosse multiplicado por um fator 0.7 fazendo com que a SNR necessária no canal para que uma determinada BER seja mantida deva ser $-20 \log(0.7) = 3\text{dB}$ maior do que a SNR necessária para obter a mesma BER para operação sob $\delta = 100\%$.

Homework

Refaça o exemplo do slide 6 p/ $f_c = 470$ MHz e *bitrate* 50 Kbps.

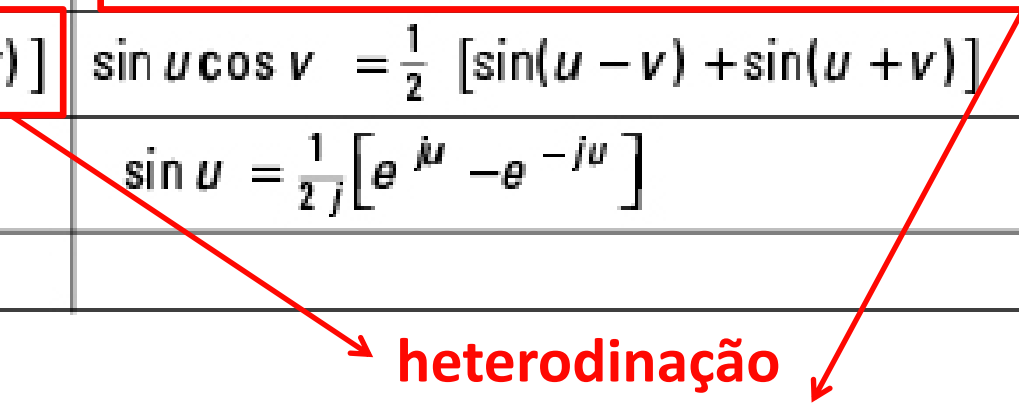
Apêndice A:

Operation	Formula
Rectangular to Polar Conversion	$z = x + jy = re^{j\theta}$ where $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ and $\theta = \arctan(y/x)$
Polar to Rectangular Conversion	$z = re^{j\theta} = r [\cos(\theta) + j\sin(\theta)] = x + jy$ where $x = r \cos(\theta)$ and $y = r \sin(\theta)$
Add: $z_3 = z_1 + z_2$	$(x_1 + x_2) + j(y_1 + y_2)$
Subtract: $z_3 = z_1 - z_2$	$(x_1 - x_2) + j(y_1 - y_2)$
Multiply: $z_3 = z_1 z_2$ (polar form)	$(x_1 x_2 - y_1 y_2) + j(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ $r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$
Divide: $z_3 = z_1 / z_2$ (polar form)	$\frac{(x_1 x_2 - y_1 y_2) - j(x_1 y_2 - y_1 x_2)}{x_2^2 + y_2^2}$ $\frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$

Apêndice B:

Sejam $u = 2\pi f_1 t$ e $v = 2\pi f_2 t$. Valem as seguintes relações (*relationships*) trigonométricas:

<i>Relationship</i>	<i>Relationship</i>
$\sin u = \cos(u - \pi/2)$	$\cos u = \sin(u + \pi/2)$
$\cos(-u) = \cos u$	$\sin(-u) = -\sin(u)$
$\sin^2 u + \cos^2 u = 1$	$\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$
$\sin^2 u = \frac{1}{2}(1 - \cos 2u)$	$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$
$\sin(u \pm v) = \sin u \cos v \pm \cos u \sin v$	$\cos u \cos v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) + \cos(u + v)]$
$\sin u \sin v = \frac{1}{2}[\cos(u - v) - \cos(u + v)]$	$\sin u \cos v = \frac{1}{2}[\sin(u - v) + \sin(u + v)]$
$\cos u = \frac{1}{2}[e^{ju} + e^{-ju}]$	$\sin u = \frac{1}{2j}[e^{ju} - e^{-ju}]$
$e^{ju} = \cos u + j \sin u$	



heterodinação
 das frequências f_1 e f_2