Canal AWGN , Capacidade de canal - Teorema de Shannon. Canal com degradação da curva de resposta em frequência (canal com *multipath*).

Departamento de Eletrônica e Computação

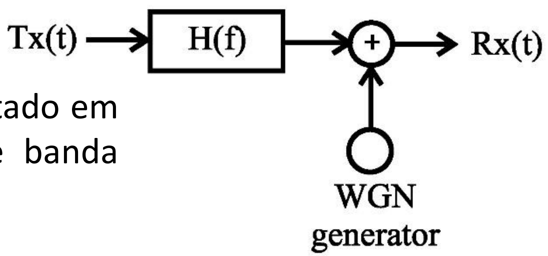
Centro de Tecnologia

ELC1120 – Telecomunicações II

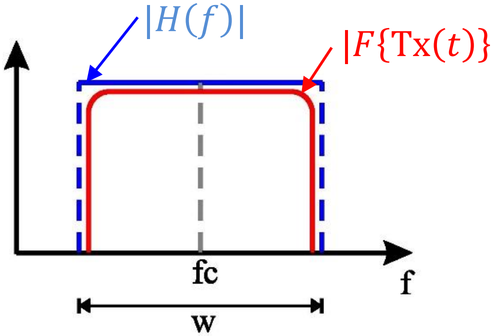
Profa. Candice Müller   Prof. Fernando DeCastro

Canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) $\times$ canal com *multipath*

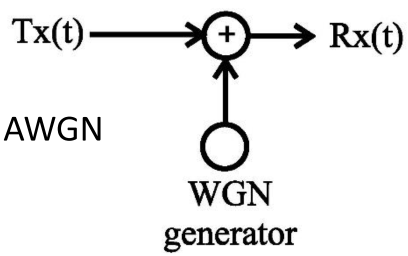
O canal de transmissão do enlace entre TX e RX é modelado por um filtro passabanda com função de transferência $H(f)$ que idealmente apresenta uma curva de magnitude $|H(f)|$ plana ao longo de toda largura W do espectro $F\{\mathrm{Tx}(t)\}$ do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ do transmissor, sendo $F\{\cdot\}$ o operador que retorna a Transformada de Fourier do argumento $\{\cdot\}$. Na saída do filtro é acrescido um gerador de ruído branco (WGN – *White Gaussian Noise*), conforme mostra a figura abaixo, para efeito de modelar o conjunto de todas as fontes de ruído cujo ruído se somam ao sinal $\mathrm{Tx}(t)$ ao longo do canal de transmissão, e que, pelo teorema do limite central (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Additive_white_Gaussian_noise), resulta em um ruído com distribuição Gaussiana de amplitudes.



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.



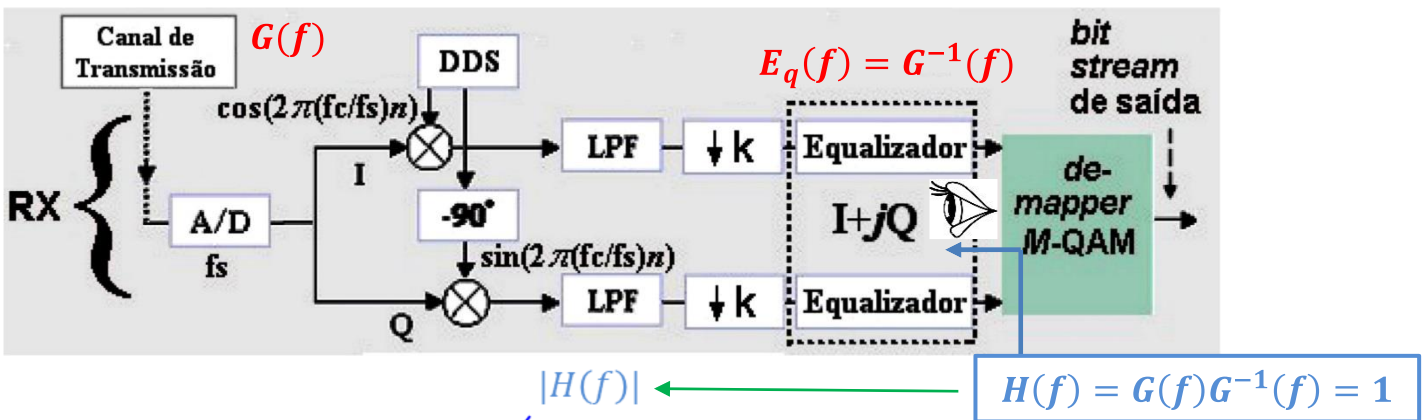
Dado que, idealmente, a curva de magnitude $|H(f)|$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|F\{\mathrm{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\mathrm{Tx}(t)$, então a função de transferência $H(f)$ do filtro que representa o canal deixa passar sem qualquer alteração de magnitude ou fase a totalidade das componentes espectrais do sinal $\mathrm{Tx}(t)$. Portanto a única degradação do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ em um canal cuja $H(f)$ do filtro deixa passar “intocáveis” (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $\mathrm{Tx}(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN. Assim, por não interagir com as componentes espectrais do sinal $\mathrm{Tx}(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal acima, simplificando o modelo de canal ideal limitado em banda para o modelo de canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*), em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:

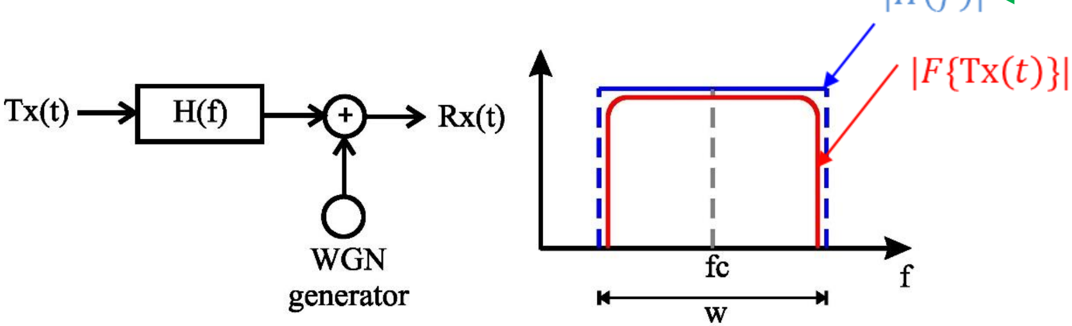


Modelo de canal AWGN

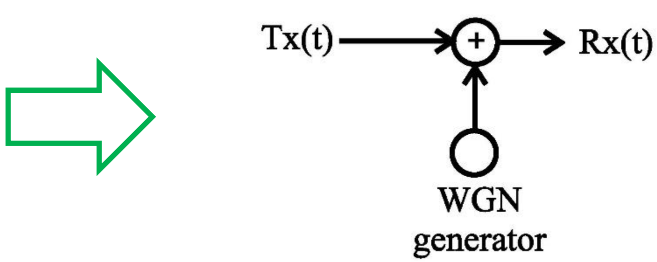
Canal AWGN (*Additive White Gaussian Noise*) × canal com *multipath*

Ocorre que o modelo de canal ideal limitado em banda só existe na prática por ação do equalizador do RX, cujo hardware implementa um filtro adaptativo com função de transferência $E_q(f)$ que idealmente aproxima a função de transferência inversa $G^{-1}(f)$ da função de transferência $G(f)$ do canal (equalizadores serão estudados adiante na disciplina) . Como o bloco do canal de transmissão está em série com o bloco do equalizador no diagrama do RX (vide abaixo), então a função de transferência conjunta dos dois blocos, que é o que o *de-mapper* "vê" na sua entrada, é $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$. Especificamente, o equalizador é um sistema adaptativo que busca identificar as frequências dos zeros da $G(f)$ que são estabelecidos pelo cenário de *multipath* no canal, tentando fazer com que os pólos de sua função de transferência $E_q(f) \cong G^{-1}(f)$ ocorra nas frequências dos zeros de $G(f)$, de modo que os polos do equalizador anulem os zeros do canal, e a função de transferência resultante $H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$ "vista" pelo *de-mapper* seja a função de transferência de um canal ideal limitado em banda, e, em consequência, o canal seja "visto" pelo RX como um canal AWGN:





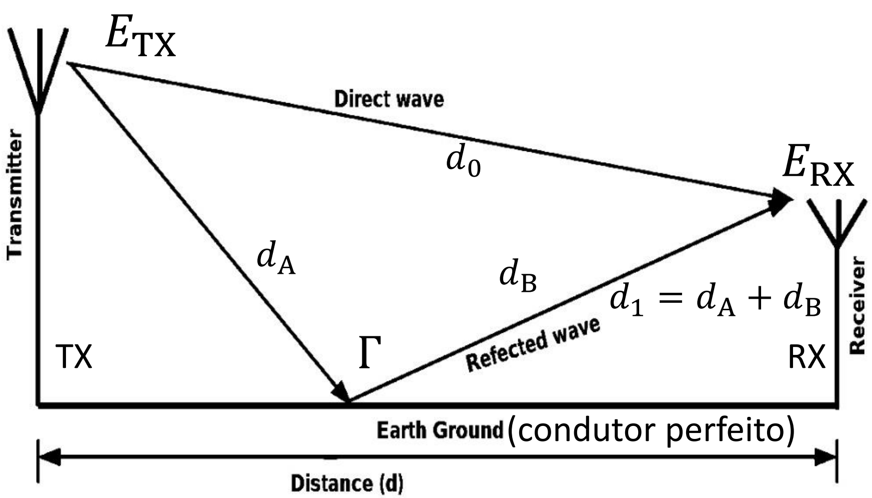
Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.



Modelo de canal AWGN

Canal com *multipath*

O motivo pelo qual o cenário de *multipath* estabelece zeros na função de transferência $G(f)$ do canal decorre da interferência destrutiva que ocorre no RX entre as diversas frente de onda que nele incidem, e que dependendo da fase e amplitude relativa entre elas, podem apenas se atenuarem mutuamente em determinadas frequências e em outras frequências podem totalmente se cancelar com resultante nula. Por exemplo, consideremos um caso simples de multipercurso (*multipath*) em que a onda do campo elétrico E_{TX} irradiado pela antena transmissora se propaga apenas em dois percursos (percurso = raio de propagação): uma onda direta que se propaga em um percurso direto cujo comprimento é d_0 e uma onda refletida que se propaga em um percurso com reflexão em condutor perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180°} = -1$) e cujo comprimento é $d_1 = d_{\text{A}} + d_{\text{B}}$. As duas ondas, direta e refletida, incidem e se superpõe na antena do RX, distante d da antena TX, de modo a formar o campo E_{RX} , conforme figura a abaixo.



O campo elétrico $E(r)$ de uma onda eletromagnética de frequência f que se propaga no espaço livre na direção $\underline{\hat{r}}$ do raio de propagação, com valor $E(r_0)$ medido na posição $r = r_0$, resultará em um campo elétrico $E(r_0 + d) = E(r_0)\left(\frac{r_0}{r_0+d}\right)e^{j\frac{2\pi d}{\lambda}}$ medido na posição $\mathrm{r} = r_0 + d$, onde $\lambda = \frac{c}{f}$ é o comprimento de onda e $c = 2.998 \times 10^8$ m/s é a velocidade da luz. Ou seja, a amplitude do campo E de uma onda que se propaga no espaço livre varia inversamente com a distância d percorrida e sua fase gira 360° (= 2π rad) a cada distância d percorrida equivalente a um comprimento de onda λ.

Portanto, sendo r_0 a posição em que se mede o campo E_{TX} , a superposição das duas ondas, direta e refletida, que incidem na antena do RX, resultam em um campo elétrico E_{RX} dado por:

$$E_{\text{RX}} = E_{\text{TX}}\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi d_0}{\lambda}} + E_{\text{TX}}\Gamma\frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi d_1}{\lambda}} = E_{\text{TX}}\left(\overbrace{\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}}}^{\boldsymbol{G(f)}\ \textbf{do canal}}\right)$$

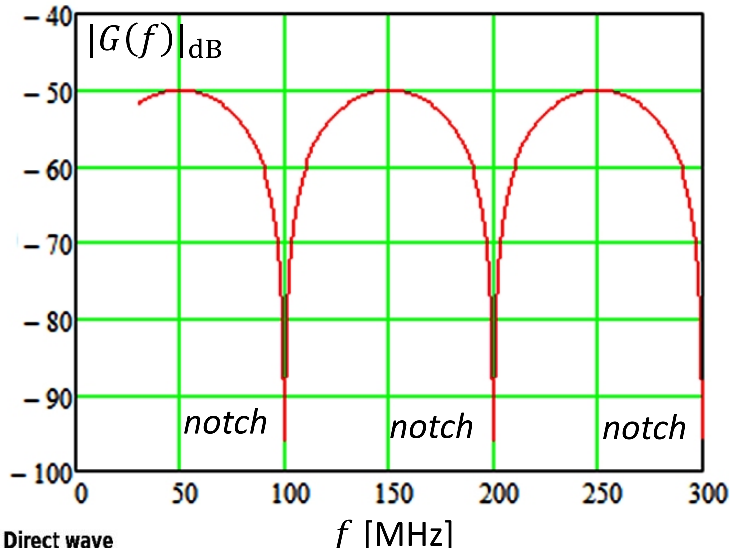
Ocorre Interferência destrutiva entre as ondas direta e refletida quando $\left(\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}}\right) \cong 0$, que é equivalente à condição $\frac{(r_0+d_0)}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f(d_1-d_0)}{c}} \cong 1$.

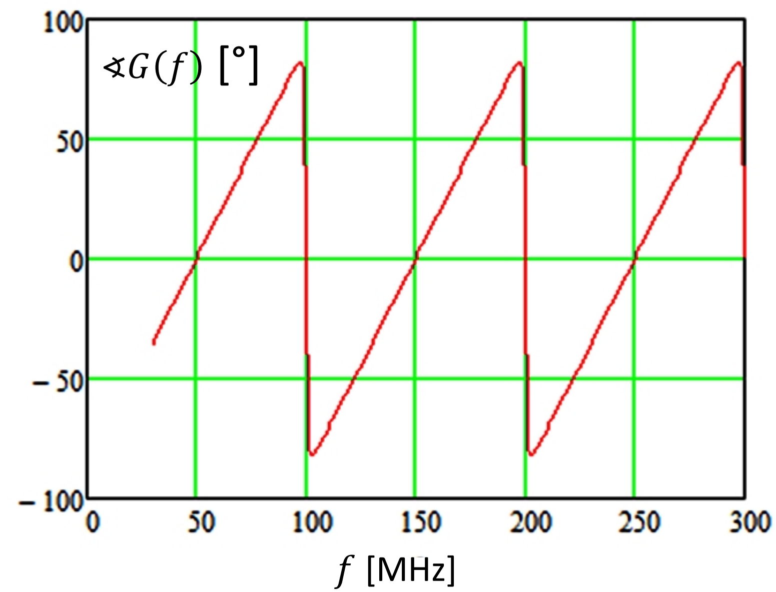
Exemplo: Considere um enlace com um percurso direto e um percurso com reflexão em condutor perfeito, operando em $f_c = 100$ MHz ($\lambda = \frac{c}{f_c} = 2.998$ m), com $r_0 = \lambda/2\pi = 47.713$ cm, $d_0 = 100\lambda = 299.792$ m , $d_1 = 101\lambda = 302.790$ m.
Plote os gráficos de magnitude (em dB) e fase (em graus) de $G(f)$ na faixa 30MHz < f < 300 MHz. Identifique as frequências dos zeros de $G(f)$ na faixa especificada.

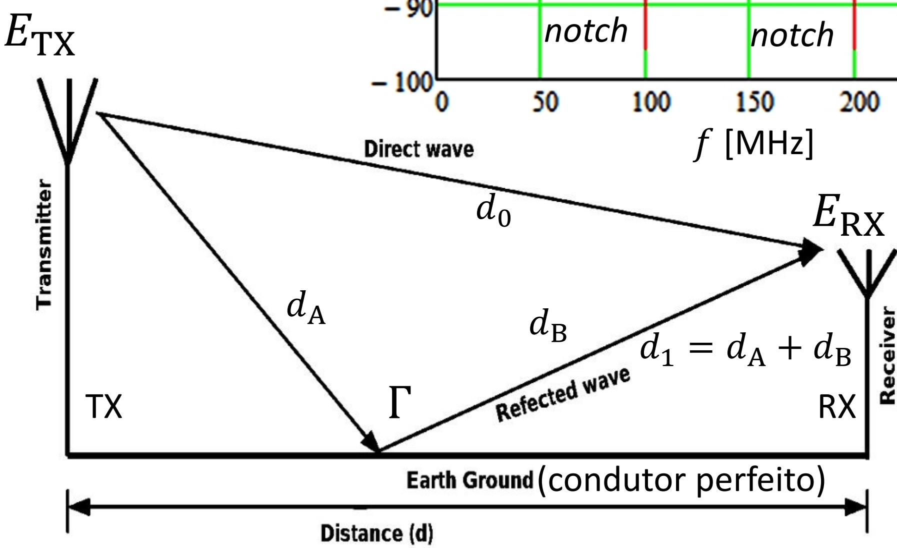
Solução:

$$G(f) = \left(\frac{r_0}{(r_0 + d_0)} e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0 + d_1)} e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}}\right) \quad |G(f)|_{\mathrm{dB}} = 20\log(|G(f)|) \quad \sphericalangle G(f) = \mathrm{atan2}\left(\frac{\mathrm{Im}\{G(f)\}}{\mathrm{Re}\{G(f)\}}\right)$$

Nota: A função atan2() delimita a faixa de variação angular da fase no intervalo [–180°, +180°] (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Atan2).



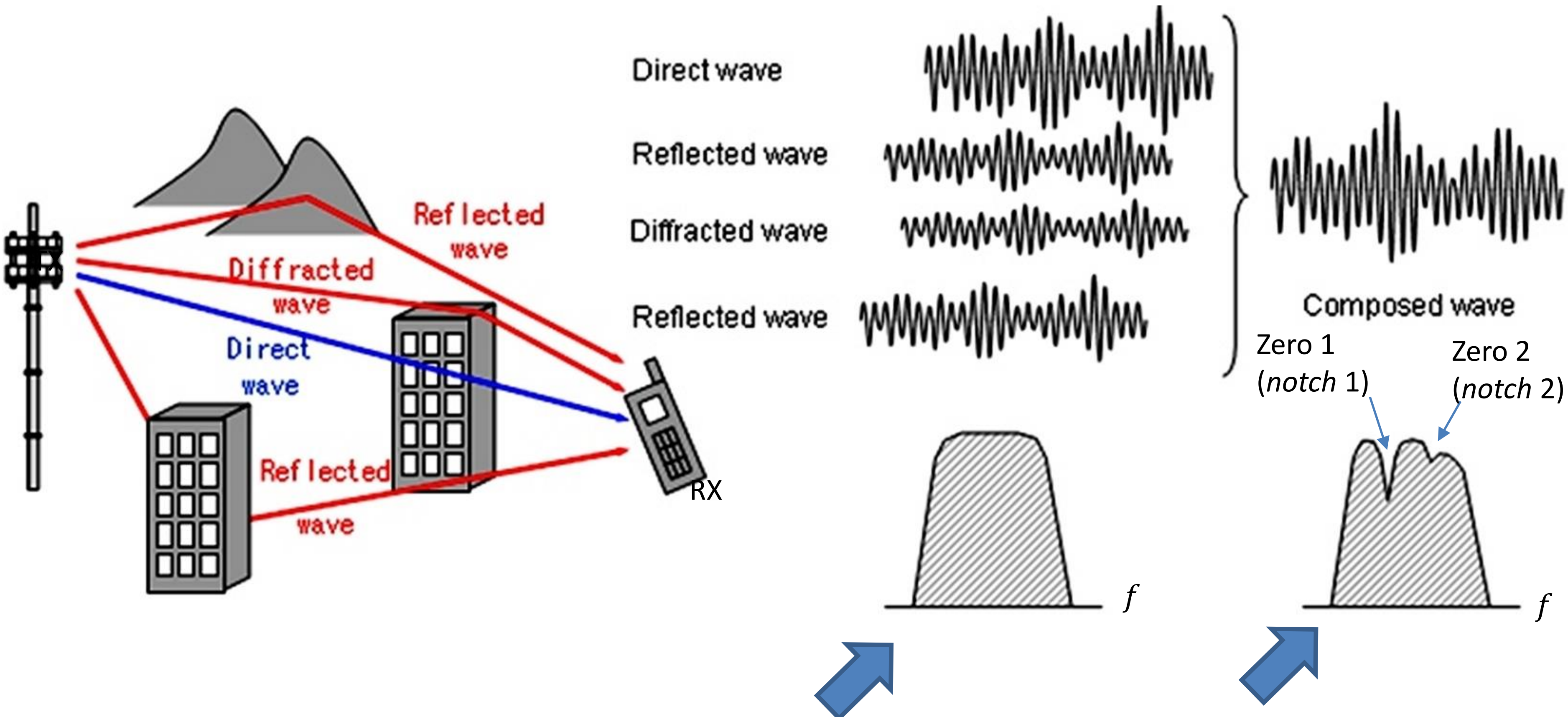




Frequências dos zeros de $G(f)$: 100 MHz, 200MHz e 300MHz, respectivamente correspondendo aos 3 *notches* na curva de $|G(f)|_{\mathrm{dB}}$. Note que o sinal é transmitido em $f_c =$ 100 MHz, portanto o zero de $G(f)$ em $f = 100$ MHz anula o sinal recebido.

Canal com *multipath*

A figura abaixo mostra um cenário de *multipath* com um percurso direto, dois percursos com reflexão e um percurso com difração. Este cenário de multipercurso estabelece múltiplos zeros na função de transferência $G(f)$ do canal decorrentes da interferência destrutiva que ocorre no RX entre as diversas frentes de onda que nele incidem, interferência que depende da fase e amplitude relativa entre as frentes de onda.

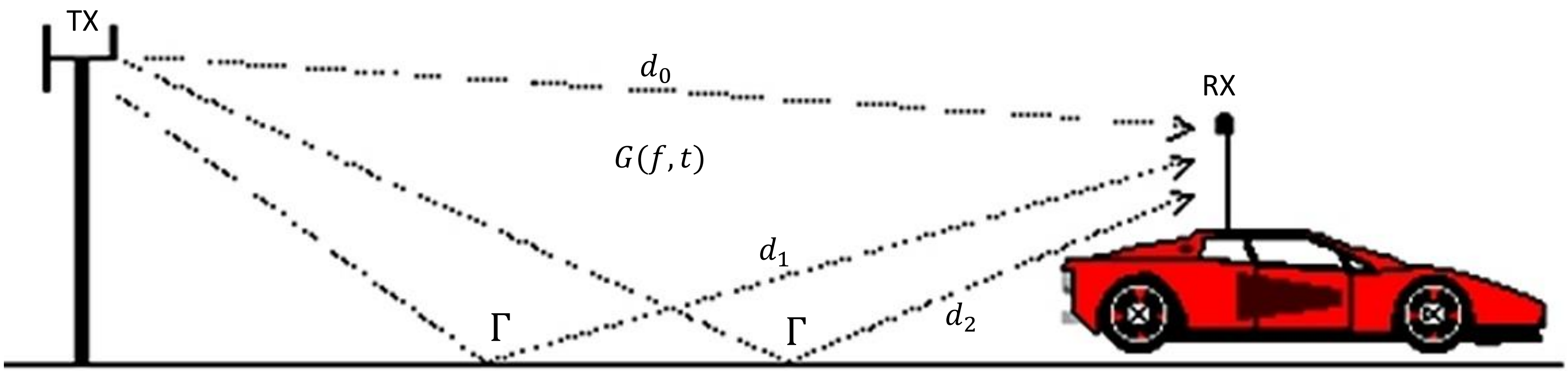


Curva de magnitude do espectro do sinal recebido no RX caso houvesse somente o caminho direto (não há reflexão nem difração).

Curva de magnitude do espectro do sinal recebido no RX degradada pelos *notches* de $G(f)$ resultantes da interferência destrutiva que ocorre em consequência do cenário de multipercurso do canal.

Canal com *multipath*

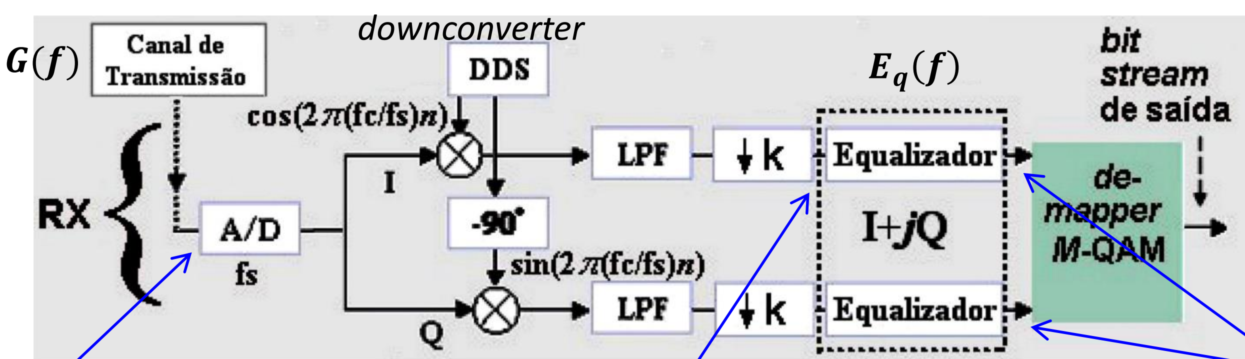
A figura abaixo mostra um cenário dinâmico de *multipath* com um percurso direto e dois percursos com reflexão em solo condutor perfeito (coeficiente de reflexão $\Gamma = 1.0e^{-j180^\circ} = -1$). Os zeros da função de transferência $G(f)$ do canal (decorrentes da interferência destrutiva que ocorre entre as ondas que incidem no RX) variam sua frequência de acordo com a posição do RX que está em movimento. Os zeros variam sua frequência porque, conforme visto no slide 4, ocorre interferência destrutiva entre as ondas direta e refletidas quando $\left(\frac{r_0}{(r_0+d_0)}e^{j\frac{2\pi f d_0}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_1)}e^{j\frac{2\pi f d_1}{c}} - \frac{r_0}{(r_0+d_2)}e^{j\frac{2\pi f d_2}{c}}\right) \cong 0$, condição que depende não somente da frequência f como também depende das distâncias d_0, d_1 e d_2, as quais são função da posição momentânea do RX em movimento:



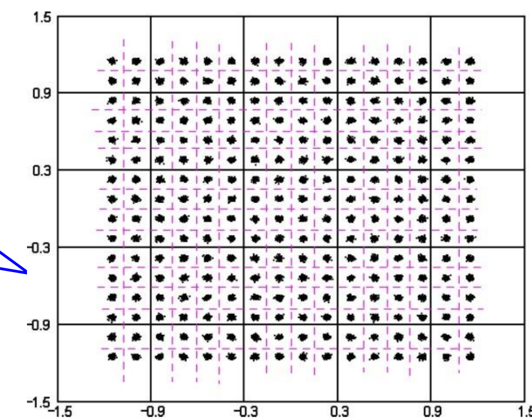
Como os zeros da $G(f)$ do canal variam sua frequência de acordo com a posição do RX em movimento, então a função de transferência $G(f,t)$ do canal será variante no tempo t , o que impõe um custo computacional elevado ao hardware que executa o algoritmo adaptativo do equalizador, dado que o algoritmo necessita não somente implementar a função de transferência inversa $G^{-1}(f,t)$ do canal como também deve ser capaz de se adaptar às variações no tempo de $G(f,t)$. Se o RX se movimenta em uma velocidade muito alta, o algoritmo adaptativo do equalizador pode falhar na tentativa de se adaptar às variações rápidas no tempo de $G(f,t)$, o que inviabiliza a determinação precisa de $G^{-1}(f,t)$.

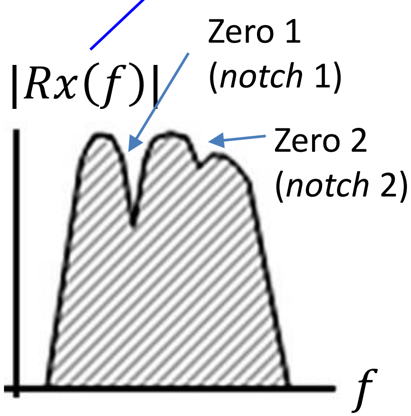
Canal com *multipath*

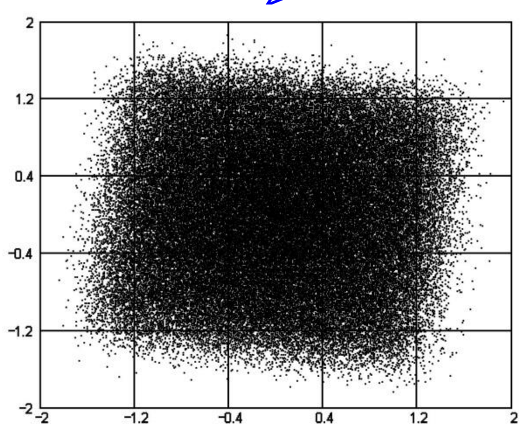
Note na figura abaixo que a degradação da magnitude $|Rx(f)|$ de espectro do sinal recebido (que é uma degradação no domínio frequência f causada pelos zeros na função de transferência $G(f)$ do canal estabelecidos pela superposição de ondas no cenário de *multipath* no canal, causando *notches* em $G(f)$) resulta simultaneamente em uma degradação no domínio tempo do sinal em banda-base após o *downconverter* do RX, dado que a superposição de ondas no canal implica simultaneamente na superposição de símbolos IQ na entrada do equalizador, gerando ISI (*Inter Symbol Interference* – interferência intersimbólica) conforme mostra a figura. Caso o processo adaptativo do equalizador seja apto a ajustar a função de transferência $E_q(f)$ do equalizador de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal , i.e., caso os polos de $E_q(f)$ cancelem os zeros de $G(f)$, então o RX "vê" o canal como um canal AWGN conforme discutido no slide 3:



Símbolos IQ com ISI minimizada por ação de $E_q(f) = G^{-1}(f)$:



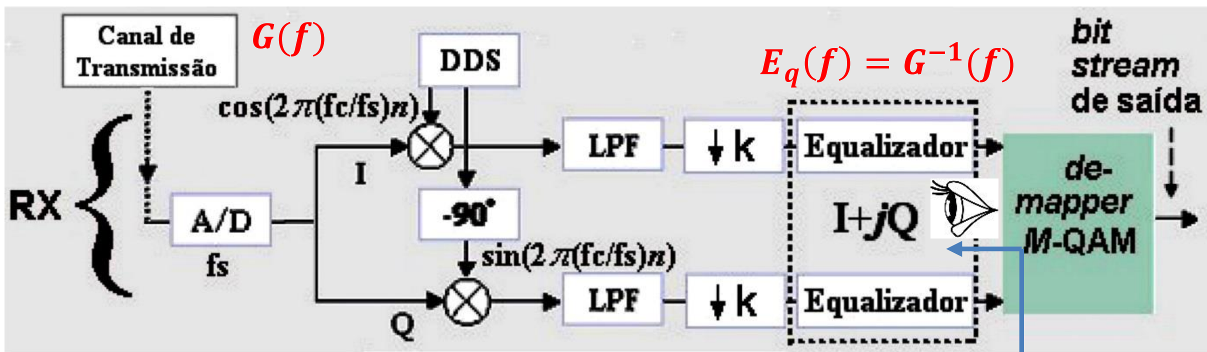




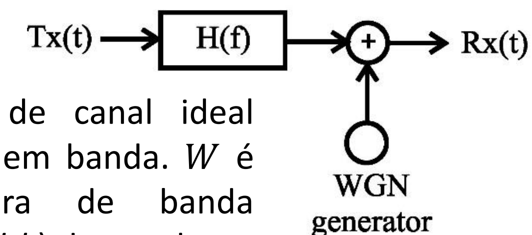
Símbolos IQ recebidos com ISI causada pelo *multipath* no canal. A ISI causa alta BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* caso o filtro adaptativo do equalizador falhe na tentativa de ajustar a sua função de transferência $E_q(f)$ de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon

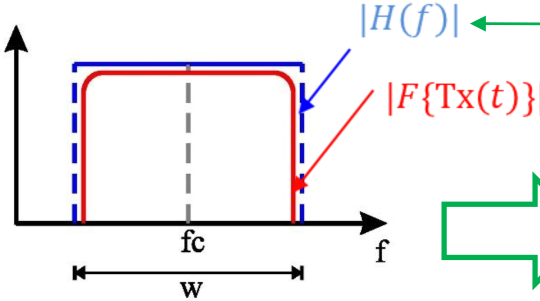
Conforme discutido no slide anterior, quando o filtro adaptativo do equalizador é apto a ajustar a sua função de transferência $E_q(f)$ de modo a que a mesma implemente a função de transferência $G^{-1}(f)$ do canal , i.e., quando os polos de $E_q(f)$ cancelam os zeros de $G(f)$, então o RX "vê" o canal como um canal AWGN. A operação sob canal AWGN é a situação de operação considerada normal para um receptor digital, em que a BER (*Bit Error Rate*) na saída do *de-mapper* é minimizada pelo fato da ISI na entrada do *de-mapper* ter sido minimizada pelo equalizador.

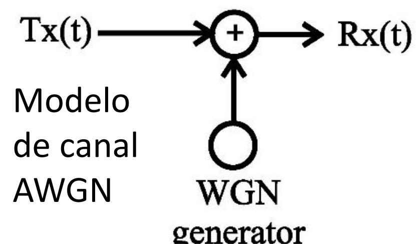


$H(f) = G(f)G^{-1}(f) = 1$



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.

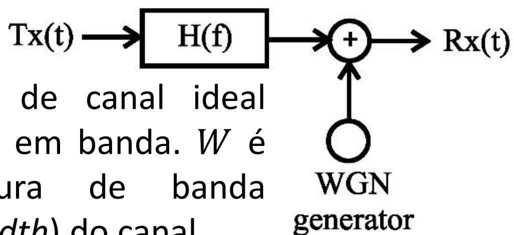




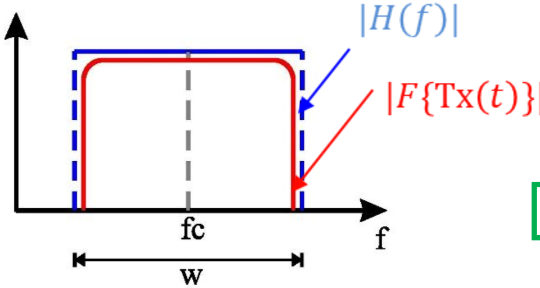
Modelo de canal AWGN

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon

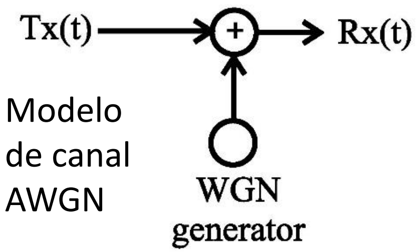
Para um canal AWGN, a única degradação do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ é a degradação causada pela adição do ruído do gerador WGN, porque um canal AWGN é um canal ideal limitado em banda cuja curva de magnitude $|H(f)|$ da sua função de transferência $H(f)$ é plana ao longo de toda largura W da curva de magnitude $|F\{\mathrm{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\mathrm{Tx}(t)$,conforme mostra a figura abaixo. Nesta situação, $|H(f)|$ deixa passar "intocáveis" (sem qualquer alteração de magnitude ou fase) a totalidade das componentes espectrais de $\mathrm{Tx}(t)$. Por não interagir com as componentes espectrais do sinal $\mathrm{Tx}(t)$, o filtro com função de transferência $H(f)$ pode ser retirado do modelo de canal limitado em banda, simplificando para o modelo de canal AWGN, em que a única degradação imposta pelo canal é a adição de ruído branco Gaussiano:



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.



Modelo de canal AWGN



Note que se a curva de magnitude $|F\{\mathrm{Tx}(t)\}|$ do espectro do sinal $\mathrm{Tx}(t)$ não "couber" em banda dentro do retângulo da curva de magnitude $|H(f)|$ ao longo de toda largura W na figura acima, então $|H(f)|$ não deixa passar de modo "intocável" a totalidade das componentes espectrais de $\mathrm{Tx}(t)$, alterando a magnitude e fase das componentes espectrais de $\mathrm{Tx}(t)$ que estão fora da banda de largura W , o que gera ISI e degrada a BER na saída do *de-mapper.*

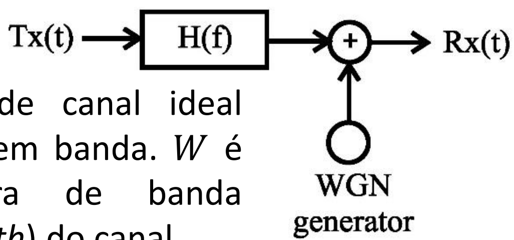
Na década de 40 do século XX, Claude Shannon propôs um desenvolvimento analítico (ver https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Shannon%E2%80%93Hartley) que estabelece a taxa de transmissão máxima C através do canal sem que ocorra degradação da BER **na saída do *channel decoder*** (que corrige os bits em erro na saída do *de-mapper* através de um código corretor de erro, conforme discutido no Cap I das notas de aula). O desenvolvimento de Shannon especificamente aplicado à comunicação digital considera que a degradação da BER na saída do *channel decoder* é causada por:

1) Deterioração do sinal recebido pelo RX em consequência do ruído aditivo branco gaussiano que ocorre no canal.

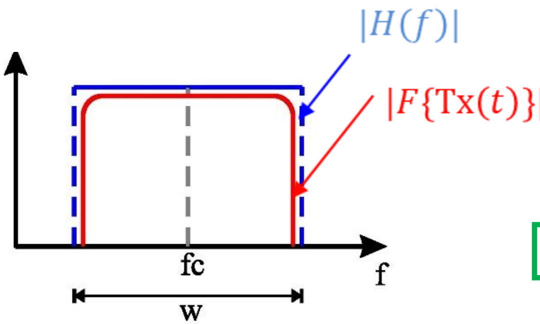
2) ISI na entrada do *de-mapper* caso o espectro do sinal Tx(t) não "couber" em banda dentro do retângulo da curva de magnitude $|H(f)|$ ao longo de toda largura de banda W.

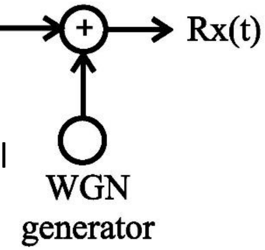
Capacidade de Canal – Teorema de Shannon

O desenvolvimento analítico proposto por Claude Shannon é específico para um canal AWGN, em que o espectro do sinal cabe em banda dentro do retângulo da curva de magnitude da resposta em frequência do canal ao longo de toda largura de banda W, conforme mostra a figura abaixo. Conforme discutido no slide 9, a operação sob canal AWGN é a situação de operação considerada normal para um receptor digital, i.e., o equalizador implementa com sucesso a função de transferência inversa do canal.



Modelo de canal ideal limitado em banda. W é a largura de banda (*bandwidth*) do canal.





Modelo de canal AWGN

O resultado do referido desenvolvimento analítico tornou-se conhecido como **Teorema de Shannon** e estabelece a seguinte relação:

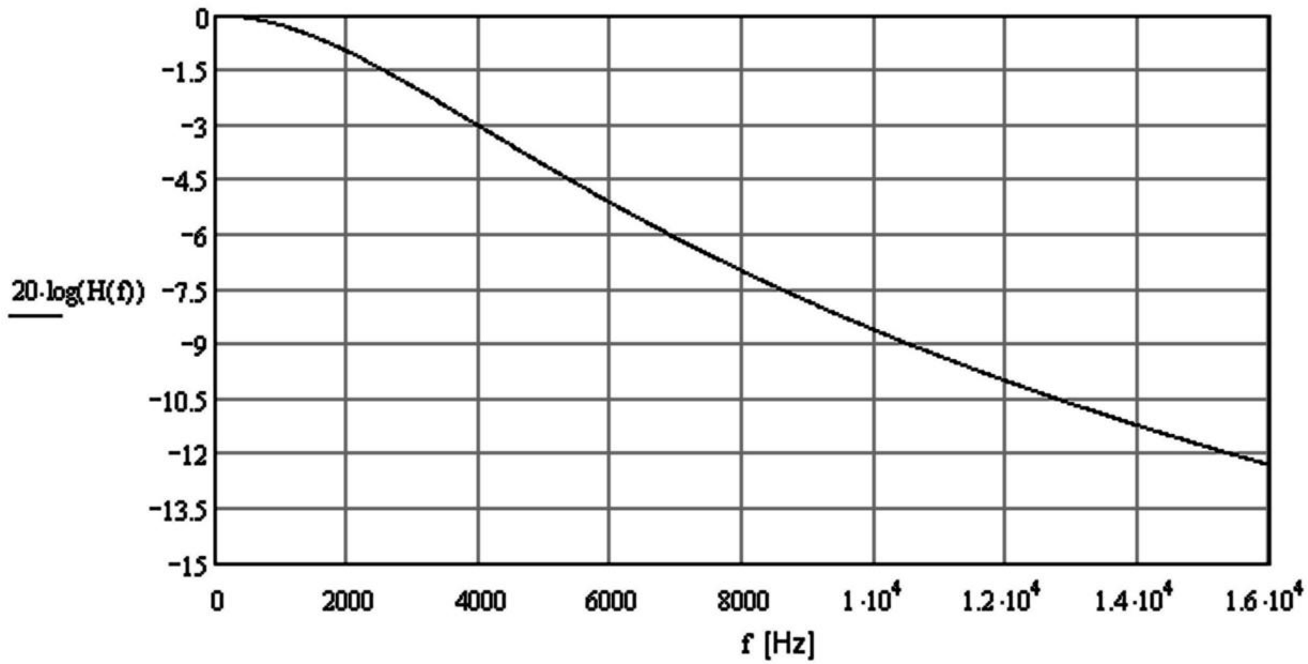
$$C = W\log_2\left(1+\frac{S}{N}\right) = \frac{W}{\ln(2)}\ln\left(1+\frac{S}{N}\right) \quad \text{[bps]}$$

onde C é a capacidade de transmissão em [bps] do canal AWGN de largura de banda W em [Hz], S é a potência [W] do sinal medido **na entrada do RX** e P é a potência [W] do ruído do canal medido **na entrada do RX**.

A capacidade de transmissão C do canal é a taxa máxima em [bps] de transmissão de informação que pode ser transportada através do canal para que o código corretor de erro no "channel decoder" do RX corrija todos os bits errados na saída do *de-mapper*. Para qual código corretor a capacidade C calculado pela equação acima zera a BER na saída do "channel decoder"? Na realidade, o Teorema de Shannon não especifica o código corretor de erro, ele apenas garante que é possível projetar um código corretor de erro que assegura uma taxa de transmissão C com BER zero na saída do "channel decoder". Fica ao encargo do projetista implementar o código corretor. Neste contexto, a real utilidade do Teorema de Shannon reside na seguinte interpretação alternativa: Deve-se evitar transmitir informação a uma taxa de transmissão maior que C porque, caso contrário, teremos a certeza de que, independente do código corretor utilizado no "channel decoder", é certo que a BER na sua saída não será nula.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon - Exemplo

Exemplo: Um TX digital é interligado ao RX digital através do par de fios de uma linha telefônica. O módulo da função de transferência H(f) desta linha telefônica foi medido com um *vector network analyzer*, resultando em



Sabe-se que o ruído na linha telefônica é gaussiano, branco e aditivo resultando em uma SNR de 32 dB medida nos terminais de entrada do RX.

Determine a velocidade máxima (em bps) que o sinal digital pode ser transmitido através desta linha telefônica.

Capacidade de Canal – Teorema de Shannon - Exemplo

Solução:

$W := 4 \cdot 10^3$ [Hz] → banda passante -3dB do canal

$SNR := 32$ [dB] → relação sinal-ruído do canal

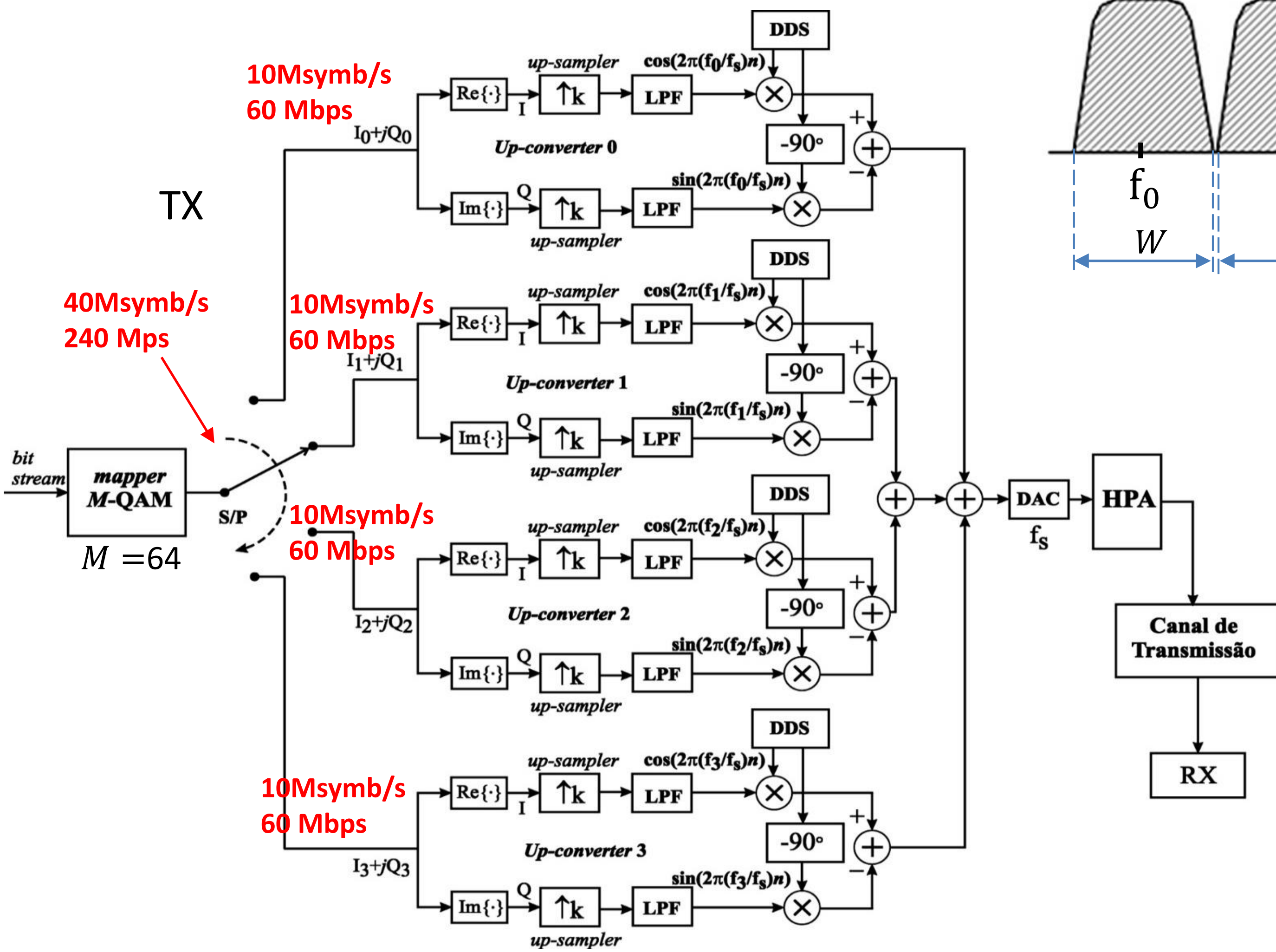
$C := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln\left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}}\right)$ [bps] → Expressão geral da capacidade de transmissão de um canal de banda passante W e relação sinal-ruído SNR

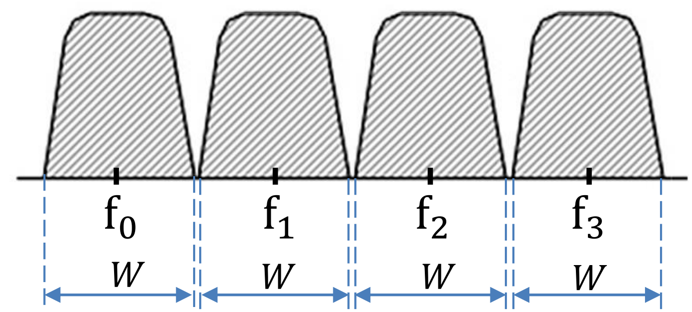
$C = 4.252 \times 10^4$ [bps] → máxima taxa do canal (capacidade de transmissão do canal)

Homework – refazer este exemplo p/ SNR = 10 dB.

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Exemplo: Um sistema *multicarrier* (=multiportadora) coloca em paralelo N_p *upconverters*, com respectivos N_p sub-canais de largura W centrados em N_p frequências de portadora distintas, assim reduzindo o SymbolRate de cada sub-canal de um fator $1/N_p$ e portanto aumentando de um fator N_p a duração dos símbolos IQ em cada sub-canal. Com isto os ecos gerados no cenário de multipercurso no canal tornam-se de duração desprezível em relação à duração dos símbolos IQ, aumentando a inteligibilidade da sequência de símbolos IQ recebidos (ver análogo acústico no slide 4 do Cap I das notas de aula). Abaixo é mostrado um exemplo p/ SymbolRate=40Msymb/s e N_p=4 sub-canais de largura W centrados em f_0, f_1, f_2 e f_3 (N_p=4 portadoras f_0, f_1, f_2 e f_3) com modulação 64-QAM :



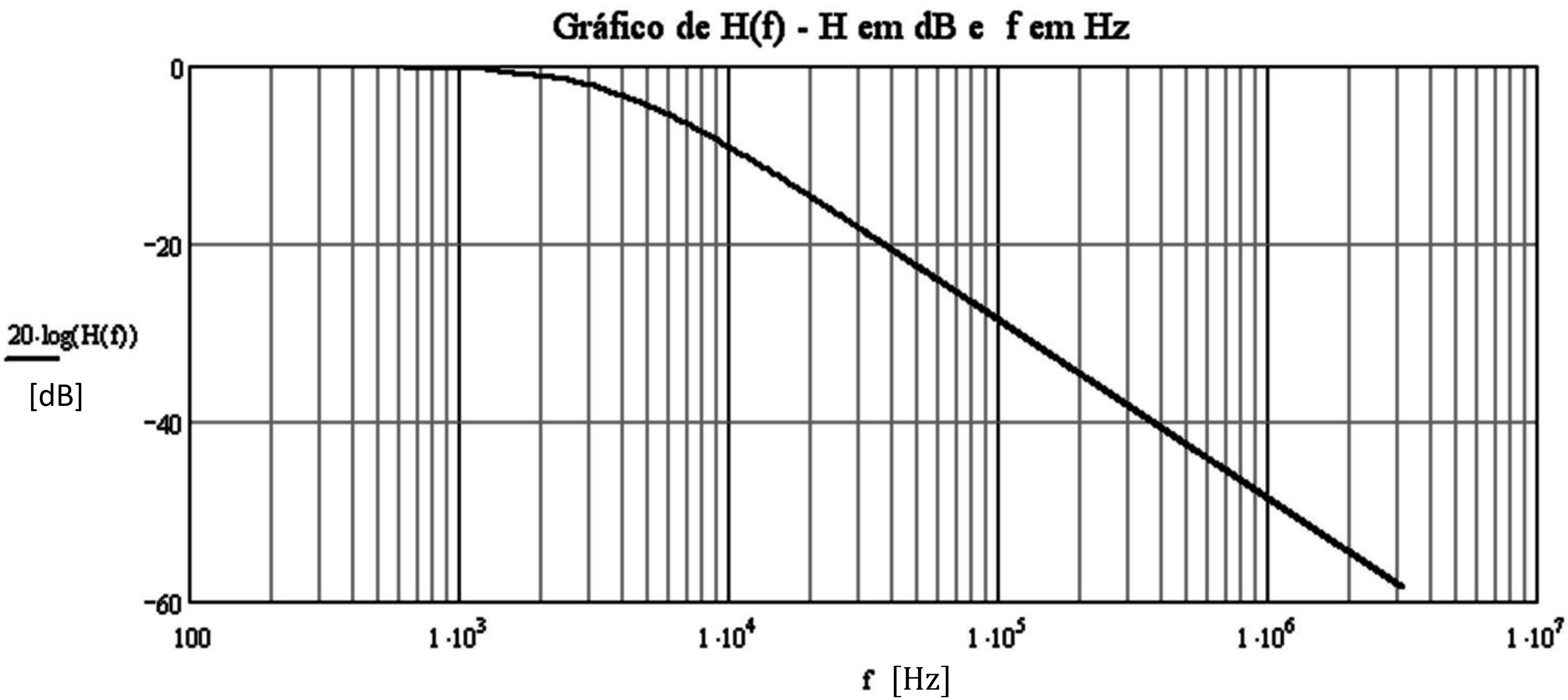


Note que embora cada *upconverter* transmita com um SymbolRate de apenas 10Msymb/s, a taxa de símbolo 40Msymb/s na saída do *mapper* é mantida porque os 4 *upconverters* estão em paralelo. A modulação 64-QAM transporta 6 bits/símbolo, então a taxa de bits na saída do *mapper* de 240 Mbps é dividida entre os 4 *upconverters*, cada um transmitindo a 60 Mbps.

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

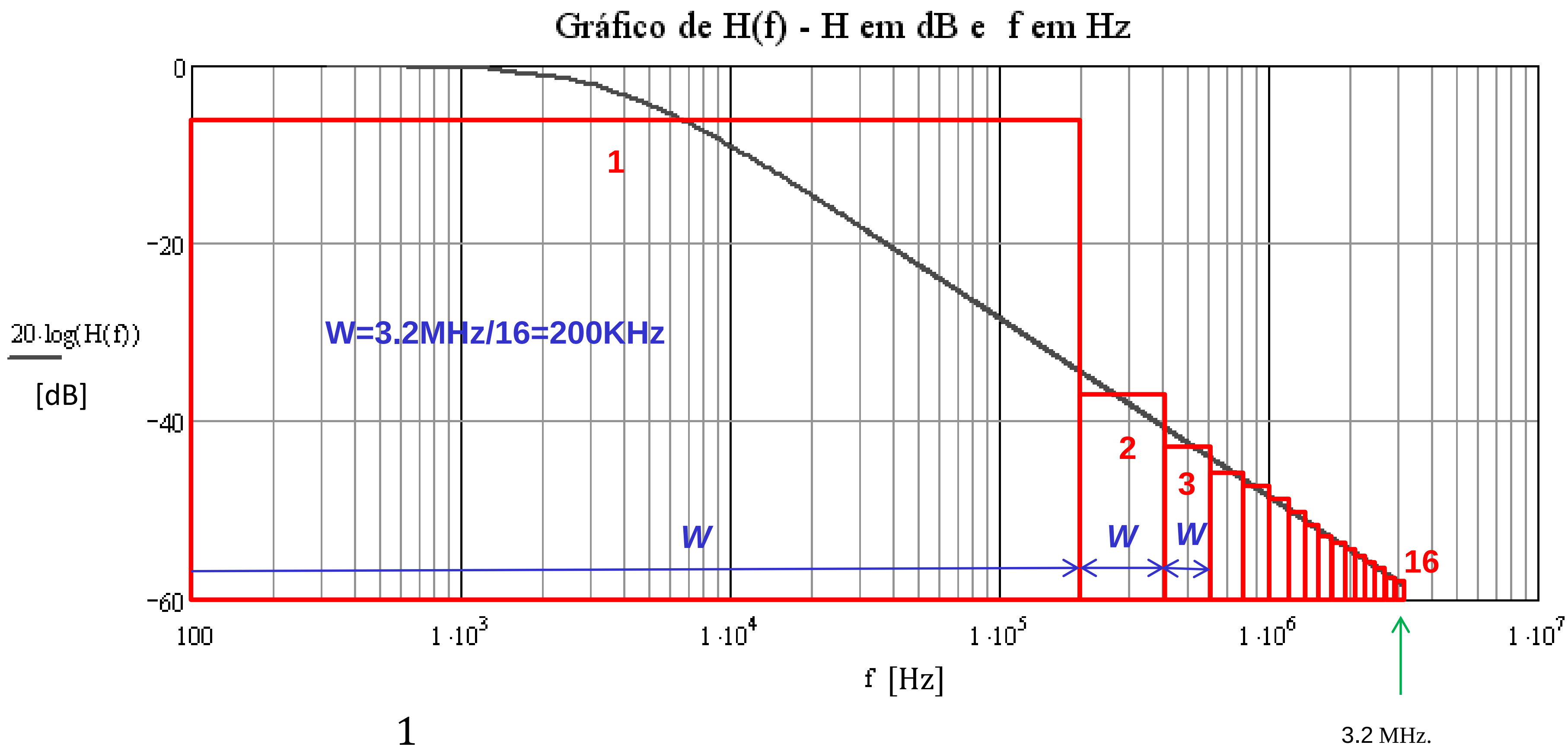
Vamos considerar neste exemplo um sistema digital multiportadora que utiliza N_p= 16 portadoras (16 sub-canais) igualmente espaçadas na faixa de 0 Hz a 3.2 MHz. Sabe-se que o ruído no canal é gaussiano, branco e aditivo resultando em uma SNR de 32 dB, medida para um sinal de referência na frequência f_0 = 100Hz. O canal possui uma função de transferência $H(f)$ conforme expressão analítica e gráfico abaixo:

$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2}} \qquad f_{-3dB} = 3.8 \times 10^3 \text{ Hz}$$



Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

O RX "vê" os N_p= 16 sub-canais transmitidos pelo TX através da $H(f)$ do canal de transmissão, e, portanto, cada sub-canal recebido pelo RX é atenuado pela $H(f)$ do canal calculada na frequência central f_k do respectivo k-ésimo sub-canal dentre os 16 sub-canais , conforme mostra a figura abaixo.



$$H(f) = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2}}$$

$$f_{-3dB} = 3.8 \times 10^3 \text{ Hz}$$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Pede-se: Determine uma estimativa da capacidade máxima de transmissão em bps deste sistema de N_p= 16 portadoras para as seguintes situações.

a) Sem compensação da função de transferência $H(f)$ do canal.
b) Com compensação da função de transferência $H(f)$ do canal.

Solução:

$fcorte := 3.8\cdot10^{3}$ [Hz] → freqüência de corte -3dB do canal

$SNRo := 32$ [dB] → relação sinal-ruído do canal medida em 100Hz

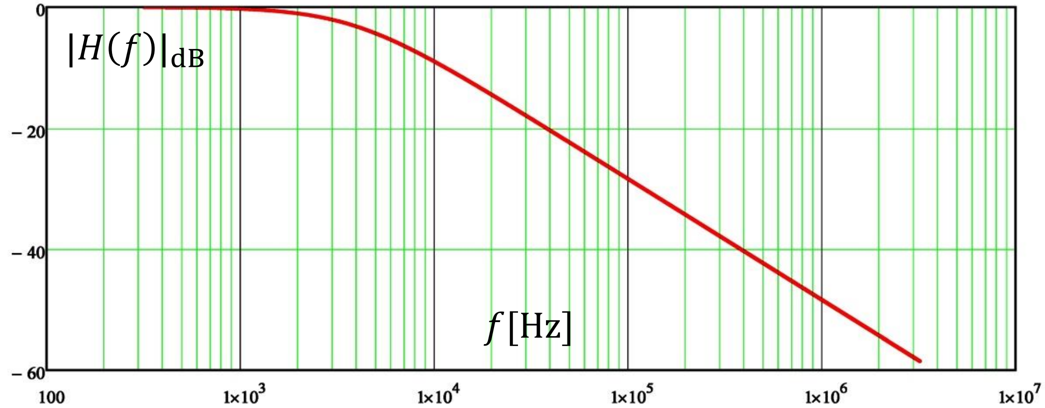
$FMax := 3.2\cdot10^{6}$ [Hz] → frequência máxima da faixa de freqüências a ser transmitida através do canal

$Np := 16$ → número de portadoras = número de sub-canais

$W := \frac{FMax}{Np}$ $\quad W = 2 \times 10^{5}$ [Hz] → banda passante de cada sub-canal

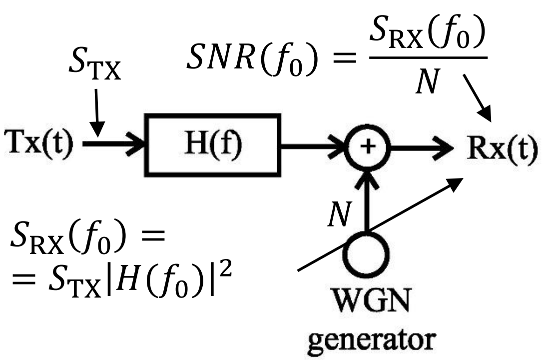
$$H(f) := \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{fcorte}\right)^2}}$$ → expressão analítica da função de transferência H(f) do canal

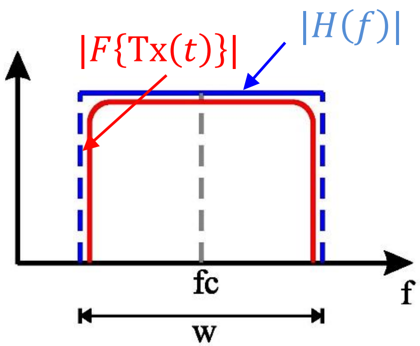
Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo



$$|H(f)|_{\mathrm{dB}} = 20\log|H(f)| = 20\log\left\{\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_{-3dB}}\right)^2}}\right\}$$

$$f_{-3dB} = 3.8\times10^3\ \mathrm{Hz}$$





A relação sinal-ruído SNR (*Signal to Noise Ratio*) medida em uma frequência específica f_0 é a razão entre a potência $S_{\mathrm{RX}}(f_0)$ do sinal de frequência f_0 **na entrada do RX** e a potência N do ruído branco **na entrada do RX**, i.e, $SNR(f_0) = \frac{S_{\mathrm{RX}}(f_0)}{N}$ conforme mostra a figura. Note que a $H(f)$ do canal afeta a amplitude do sinal na entrada do RX **mas não afeta a amplitude do ruído** porque o gerador de ruído está depois do filtro $H(f)$ no modelo do canal. Portanto, se uma $SNR(f_0)$ é medida na entrada do RX em uma frequência específica f_0 então uma $SNR(f_\mathrm{x})$ que se deseja determinar em qualquer outra frequência f_x pode ser obtida através de:

$$SNR(f_x) = \frac{S_{\mathrm{RX}}(f_\mathrm{x})}{N} = \frac{S_{\mathrm{RX}}(f_0)\frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2}}{N} = \frac{S_{\mathrm{RX}}(f_0)}{N}\frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2} = SNR(f_0)\frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2}$$

$$10\log\{SNR(f_x)\} = 10\log\left\{SNR(f_0)\frac{|H(f_x)|^2}{|H(f_0)|^2}\right\} \rightarrow 10\log\{SNR(f_x)\} = 10\log\{SNR(f_0)\} + 20\log\{|H(f_x)|\} - 20\log\{|H(f_0)|\}$$

$$\boxed{S_{\mathrm{RX_{dB}}}(f_\mathrm{X}) = S_{\mathrm{RX_{dB}}}(f_0) + |H(f_x)|_{\mathrm{dB}} - |H(f_0)|_{\mathrm{dB}}}$$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

$C = \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln\left(1 + 10^{\frac{SNR}{10}}\right)$ [bps] → Expressão geral da capacidade de transmissão de um canal de banda passante W e relação sinal-ruído SNR

A equação acima determina a capacidade de canal C de cada *k*-ésimo sub-canal dentre os N_p= 16 sub-canais em função da SNR no respectivo *k*-ésimo sub-canal, SNR que depende da frequência central f_k do *k*-ésimo sub-canal (= frequência da *k*-ésima portadora). Conforme slide anterior e conforme slide 15, temos que

$$SNR(f_\mathrm{k}) = \underbrace{SNR(f_0 = 100\mathrm{Hz})}_{\text{SNRo=32 dB}} + |H(f_x)|_{\mathrm{dB}} - \underbrace{|H(f_0 = 100\mathrm{Hz})|_{\mathrm{dB}}}_{\text{0 dB}}$$

sendo a frequência central f_k do *k*-ésimo sub-canal (= frequência da *k*-ésima portadora) dada por:

$\frac{W}{2} \cdot (2 \cdot k + 1) =$ [Hz] → Freqüência da *k*-ésima portadora = Freqüência central do *k*-ésimo sub-canal de largura W

1·105
3·105
5·105
7·105
9·105
1.1·106
1.3·106
1.5·106
1.7·106
1.9·106
2.1·106
2.3·106
2.5·106
2.7·106
2.9·106
3.1·106

sendo $k = 0,1,\cdots,15$

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

A compensação da função de transferência $H(f)$ do canal é uma funcionalidade de todo RX multiportadora que , basicamente, elimina a dependência da amplitude e fase do sinal recebido em cada sub-canal da magnitude e fase da $H(f)$ do canal (a ser estudada em capítulo posterior das notas de aula). Como neste exemplo $H(f)$ é uma função real (não tem fase), a compensação será apenas em magnitude.

De acordo com o discutido no slide anterior, a capacidade de canal $C(\mathrm{k})$ de cada *k*-ésimo sub-canal dentre os 16 sub-canais em função da SNR no respectivo *k*-ésimo sub-canal, SNR que depende da frequência central f_k do *k*-ésimo sub-canal (= frequência da *k*-ésima portadora), é dada por:

$$C(k) := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln\left[1 + 10^{\frac{SNRo + 20 \cdot \log\left[H\left[\frac{W}{2}\cdot(2\cdot k+1)\right]\right]}{10}}\right]$$

[bps] → Capacidade do sub-canal na freqüência da *k*-ésima portadora **sem** compensação da função de transferência H(f) do canal

A capacidade de canal $Cc(\mathrm{k})$ de cada *k*-ésimo sub-canal dentre os 16 sub-canais estando acionado o bloco do RX que faz compensação da função de transferência $H(f)$ é:

$$Cc(k) := \frac{1}{\ln(2)} \cdot W \cdot \ln\left[1 + 10^{\frac{SNRo + 20 \cdot \log\left[H\left[\frac{W}{2}\cdot(2\cdot k+1)\right]\right] - 20 \cdot \log\left[H\left[\frac{W}{2}\cdot(2\cdot k+1)\right]\right]}{10}}\right]$$

[bps] → Capacidade do sub-canal na freqüência da *k*-ésima portadora **com** compensação da função de transferência H(f) do canal

Capacidade de canal de sistemas *multicarrier* – Exemplo

Portanto, a capacidade total de canal é a soma da capacidade individual de cada um dos N_p sub-canais:

$$CTotC := \sum_{k=0}^{Np-1} C(k)$$

$CTotC = 4.775 \times 10^5$ [bps] → Capacidade total do canal **sem** compensação da função de transferência H(f) do canal

$$CTotCc := \sum_{k=0}^{Np-1} Cc(k)$$

$CTotCc = 3.402 \times 10^7$ [bps] → Capacidade total do canal **com** compensação da função de transferência H(f) do canal

Note a importância da compensação da função de transferência $H(f)$ do canal implementada no RX, que resultou em um aumento de quase duas ordens de grandeza na capacidade de canal do sistema.

Homework – refazer este exemplo p/ N_p= 32 portadoras.