Exemplos e *Homework* sobre Codificação de Fonte

Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1120 – TELECOMUNICAÇÕES II

Profa. Candice Müller   Prof. Fernando DeCastro

Exemplo 1

A sequência $m_q(n)$ mostrada na Figura 2 é aplicada à entrada do Preditor Linear do codificador DPCM mostrado na Figura 1.

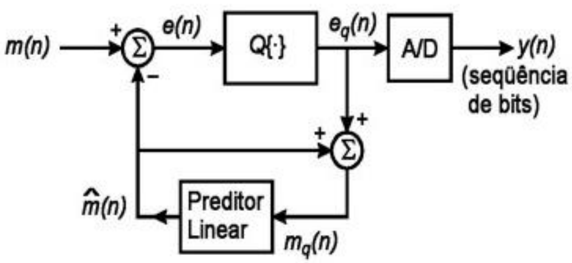

Figura 1: Codificador DPCM do TX digital.

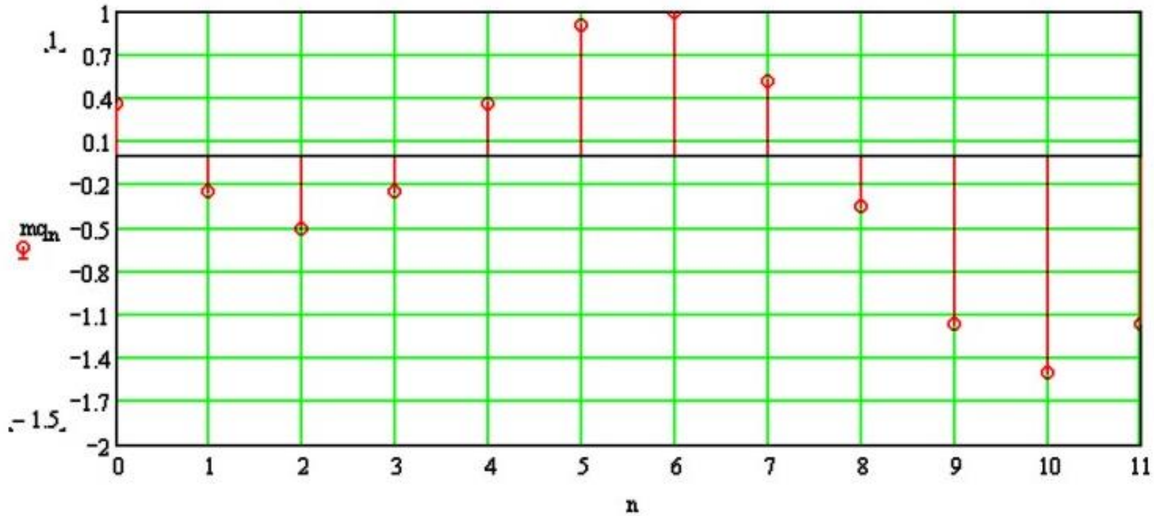

Figura 2: Seqüência

$$m_q(n) = \{0.3536,-0.2452,-0.5,-0.2452,0.3536,0.8984,1,0.5158,-0.3536,-1.169,-1.5,-1.169,...\}$$

(a) Determine $\hat{m}(n)$ sabendo que o Preditor Linear é de ordem **2** e utiliza **6** amostras consecutivas de $m_q(n)$ para a definição da matriz de correlação.

(b) Determine $e(n)$ para $\hat{m}(n)$.

Nota: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r00 & r01 \\ r10 & r11 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{R}^{-1} = \dfrac{1}{(r00 \cdot r11 - r01 \cdot r10)} \begin{bmatrix} r11 & -r01 \\ -r10 & r00 \end{bmatrix}$

$\mathbb{R}^2$, Nº. DE AMOSTRAS A CONSIDERAR = 6

Nº. DE VETORES = 5

AMOSTRAS $\left\{ \cdots \overbrace{1}^{u(n-5)}, \underbrace{0{,}5158}_{u(n-4)}, \overbrace{-0{,}3536}^{u(n-3)}, \underbrace{-1.169}_{u(n-2)}, \overbrace{-1{,}5}^{u(n-1)}, \underbrace{-1.169}_{u(n)}, \cdots ? \right\}$

VETORES EM $\mathbb{R}^2$

$$\underline{u}(n) = \begin{bmatrix} -1.169 \\ -1.5 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}(n-1) = \begin{bmatrix} -1.5 \\ -1.169 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}(n-2) = \begin{bmatrix} -1.169 \\ -0.3536 \end{bmatrix}$$

$$\underline{u}(n-3) = \begin{bmatrix} -0.3536 \\ 0.5158 \end{bmatrix} \qquad \underline{u}(n-4) = \begin{bmatrix} 0.5158 \\ 1 \end{bmatrix}$$

DETERMINAÇÃO DA MX DE AUTOCORRELAÇÃO (R):

$$R = \frac{1}{NUMVET} \sum_{k=0}^{(NUMVET-1)} \underline{u}(n-k)\,\underline{u}^T(n-k) =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} 1.3665 & 1.7535 \\ 1.7535 & 2.26 \end{bmatrix}}_{k=0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2.25 & 1.7535 \\ 1.7535 & 1.3665 \end{bmatrix}}_{k=1} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1.3665 & 0.4133 \\ 0.4133 & 0.125 \end{bmatrix}}_{k=2} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.125 & -0.1823 \\ -0.1823 & 0.266 \end{bmatrix}}_{k=3} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0.266 & 0.5158 \\ 0.5158 & 1 \end{bmatrix}}_{k=4} \right\} = \begin{bmatrix} 1.0742 & 0.8508 \\ 0.8508 & 1.0016 \end{bmatrix}$$

DETERMINAÇÃO DO VETOR DE CORRELAÇÃO CRUZADA $(\underline{P})$:

$$\underline{P} = \frac{1}{(NUMVET-1)} \sum_{k=0}^{(NUMVET-2)} \underbrace{u(n-k)}_{\text{SAÍDA DESEJADA PARA}} \underline{u}(n-k-1) =$$

$$= \frac{1}{4}\left\{ \underbrace{(-1.169)\begin{bmatrix}-1.5\\-1.169\end{bmatrix}}_{k=0} + \underbrace{(-1.5)\begin{bmatrix}-1.169\\-0.3536\end{bmatrix}}_{k=1} + \underbrace{(-1.169)\begin{bmatrix}-0.3536\\0.5158\end{bmatrix}}_{k=2} + \right.$$

$$\left. + \underbrace{(-0.3536)\begin{bmatrix}0.5158\\1\end{bmatrix}}_{k=3} \right\} = \begin{bmatrix}0.9344\\0.2351\end{bmatrix}$$

DETERMINAÇÃO DO VETOR DE PESOS $(\underline{w})$:

$$\underline{w} = R^{-1}.\underline{P} = \begin{bmatrix} 2.8456 & -2.4173 \\ -2.4173 & 3.0521 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9344 \\ 0.2351 \end{bmatrix} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 2.0906 \\ -1.5411 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} w_0 \\ w_1 \end{array} \end{array}$$

DETERMINAÇÃO DO VALOR PREDITO $(\hat{u}(n+1))$:

$$\hat{u}(n+1) = w_0 . u(n) + w_1 . u(n-1) = 2.0906(-1.169) - 1.5411(-1.5) = -0.1322$$

DETERMINAÇÃO DO ERRO DE PREDIÇÃO $(e(n))$:

$e(n) =$ OBSERVADA $-$ PREDITA $= -0.3536 - (-0.1322) = -0.2214$

Exemplo 2

Observou-se e registrou-se em disco as sequências PCM na saída de um conversor A/D de 3 bits no codificador de fonte de um transmissor digital, sequências que são resultantes da digitalização de um sinal analógico $v(t)$. A contagem das sequências é mostrada na Tabela 1.

Tabela 1	
Sequência PCM	Contagem do número de ocorrências das sequências PCM durante o intervalo de observação:
000	2.5×10^8
001	2.5×10^8
010	1.5×10^8
011	1×10^8
100	1×10^8
101	8×10^7
110	4×10^7
111	3×10^7

No. Total de ocorrências = 1×10^9

(a) Construa um código por entropia ótimo para a compressão de $v(t)$.

(b) Qual a eficiência do código construído?

(a) CÓDIGO ÓTIMO BINÁRIO

0.25	01	0.25	01	0.25	01	0.25	01	0.3	00	0.45	1	0.55	0
0.25	10	0.25	10	0.25	10	0.25	10	0.25	01	0.3	00	0.45	1
0.15	000	0.15	000	0.15	000	0.2	11	0.25	10	0.25	01		
0.1	110	0.1	110	0.15	001	0.15	000	0.2	11				
0.1	111	0.1	111	0.1	110	0.15	001						
0.08	0010	0.08	0010	0.1	111								
0.04	00110	0.07	0011										
0.03	00111												

(b) EFICIÊNCIA DO CÓDIGO ÓTIMO

$$H(X) = 2\left(-0.25\log_2 0.25\right) - 0.15\log_2 0.15 + 2\left(-0.1\log_2 0.1\right) +$$

$$- 0.08\log_2 0.08 - 0.04\log_2 0.04 - 0.03\log_2 0.03 = 2.704$$

$$\bar{L}(\theta) = (0.25\times 2) + (0.25\times 2) + (0.15\times 3) + (0.1\times 3) + (0.1\times 3) + (0.08\times 4) +$$

$$+ (0.04\times 5) + (0.03\times 5) = 2.72$$

$$\eta = 2.704 / 2.72 = 0.9941 \rightarrow 99.41\%$$

Exemplo 3

Verifique se o código $\theta\{\cdot\}$, cujas palavras são $\{x,\ z,\ x\,y,\ x\,y\,z\}$ é Univocamente Decodificável, e justifique a resposta.

Conforme tabela abaixo,

s_0	s_1
x	y
z	$y\ z$
$x\ y$	z
$x\ y\ z$	

θ não é UD, pois a palavra z em S_1 está presente em S_0 (pertence ao código).

Homework 1

A seqüência

$$m_q(n) = \{\, u(n-9), u(n-8),\ u(n-7),\ u(n-6),\ u(n-5), u(n-4), u(n-3), u(n-2), u(n-1), u(n)\cdots\}$$

é aplicada à entrada do Preditor Linear do codificador DPCM mostrado na Figura 1.

Para $m_q(n) = \{-0.707, 0, 0.707, 1, 0.707, 0, -0.707, -1, -0.707, 0, \cdots\}$, determine $\hat{u}(n+1)$, sabendo que o Preditor Linear é de ordem 2 e utiliza 10 amostras consecutivas de $m_q(n)$ para a definição da matriz de correlação.

A Figura 2 apresenta uma ilustração da série temporal $m_q(n)$. Note que a série $m_q(n)$ é periódica, de onde se pode, por inspeção, verificar o valor que será observado para a amostra $u(n+1)$. Determine $e(n)$ para $\hat{u}(n+1)$

Lembre que:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} r00 & r01 \\ r10 & r11 \end{bmatrix} \rightarrow \mathbf{R}^{-1} = \frac{1}{(r00 \cdot r11 - r01 \cdot r10)} \begin{bmatrix} r11 & -r01 \\ -r10 & r00 \end{bmatrix}$$

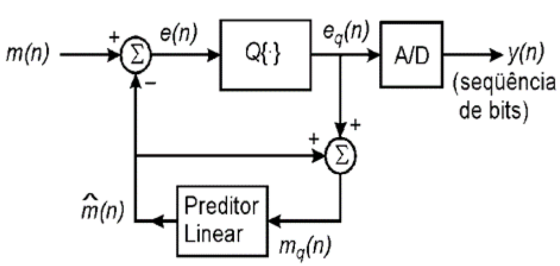

Figura 1: Codificador DPCM do TX digital.

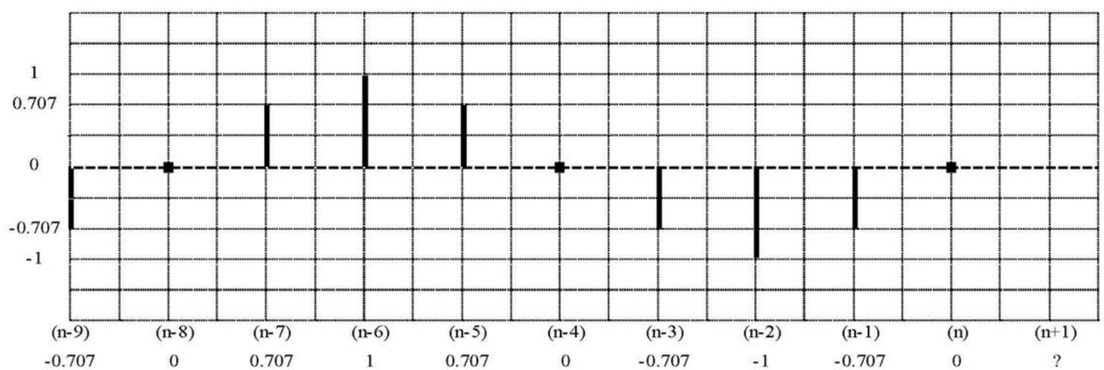

Figura 2: $m_q(n)$ - gráfico fora de escala, apenas ilustrativo.

Respostas Homework 1:

$$\mathbb{R} = \begin{bmatrix} 0.444 & 0.3142 \\ 0.3142 & 0.499 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mathrm{P}} = \begin{bmatrix} 0.3535 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}(n+1) = 0.6363$$

$$e(n) = 0.0707$$

Homework 2

Seja uma fonte de informação representada pela variável aleatória discreta *X*, com espaço de amostras definido pelo conjunto $\mathbf{\Omega} = \{x_i\} = \{x_0, x_1, \cdots, x_{M-1}\}$ de $M = 8$ eventos estatisticamente independentes x_i com probabilidades de ocorrência p_i , $i = 0,1,\cdots, M-1$, conforme apresenta a **Tabela 1**.

Para esta fonte de informação, foi construído o código $\mathbf{\theta}\{\cdot\}$ apresentado na terceira coluna da referida Tabela.

Tabela 1

x_i	p_i	$s_i = \mathbf{\theta}\{x_i\}$	
		θ {.}	θ*{.}
x_0	0.25	011	
x_1	0.25	0101	
x_2	0.15	0110	
x_3	0.1	1100	
x_4	0.1	00011	
x_5	0.08	00110	
x_6	0.04	11010	
x_7	0.03	101011	

Pede-se:

a) Determine a Eficiência de $\mathbf{\theta}\{\cdot\}$ sob o ponto de vista da Entropia.

b) A partir do resultado obtido em (a), conclua se o código $\mathbf{\theta}\{\}$ é um Código Ótimo, sob o ponto de vista da Entropia, e apresente a justificativa, com base no Teorema da Codificação de Fonte.

c) A partir da análise efetuada em (b), se $\mathbf{\theta}\{\}$ não for um código ótimo, construa um código ótimo binário (θ*{.}) para a fonte de informação especificada na **Tabela 1**, sob o ponto de vista da Entropia.

d) Determine a Eficiência de θ*{.}.

e) A partir do resultado obtido em (d), conclua se o código θ*{.} obtido é <u>absolutamente ótimo</u> ou <u>quase absolutamente ótimo</u>, e apresente a justificativa, com base no Teorema da Codificação de Fonte.

Respostas Homework 2:

(a) $\eta = 67\%$

(b) Θ não é ótimo, pois não atende à relação $H(X) < \bar{L}_{\Theta} \leq H(X) + 1$

(c) $\Theta^{*}\{\cdot\} = \{01, 10, 000, 110, 111, 0010, 00110, 00111\}$

(d) $\eta_{\Theta^{*}} = 99.41\%$

(e) Θ^{*} é Quase Absolutamente Ótimo, pois $H(X) < \bar{L}_{\Theta^{*}} \leq H(X) + 1$

Homework 3

Verifique se os códigos $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}\{\cdot\}$ e $\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{II}}\{\cdot\}$ descritos na **Tabela 2** são UD e/ou Instantâneos.

Tabela 2

Mensagem	$s_i = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}\{x_i\}$	$s_i = \boldsymbol{\theta}_{\mathrm{II}}\{x_i\}$
x_0	0	0
x_1	1	01
x_2	00	011
x_3	11	0111

Respostas Homework 3

$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{I}}\{\cdot\} \Rightarrow$ Não Instantâneo e Não U.D.

$\boldsymbol{\theta}_{\mathrm{II}}\{\cdot\} \Rightarrow$ Não Instantâneo e U.D.

Homework 4

Seja um sistema para transmissão digital que utilize no Codificador de Fonte um conjunto Ω com M = 4 possíveis mensagens, $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$.

As probabilidades de ocorrência das amostras na saída X do quantizador são:

$$P(X = x_0) = 0.36,\ \ P(X = x_1) = P(X = x_2) = 0.24\ \ e\ \ P(X = x_3) = 0.16.$$

Pede-se:

a) Determine a Entropia desta Fonte. Lembre que $H(X) = -\sum_{k=0}^{M-1} p_k log_2(p_k);\ log_2(y) = \frac{log_{10} y}{log_{10} 2}$.

b) Considerando que o intervalo de amostragem do sinal fonte $m(t)$ é $T_s = 7.58\mu s$, determine a taxa de informação (R) gerada por $m(t)$ na saída X do quantizador. Lembre que R = rH [bits/s], onde r é a quantidade de amostras geradas por segundo, e H é a entropia da fonte.

Respostas Homework 4

(a) $H(X) = 1.94$ bits/mensagem

(b) Taxa de Informação $\Longrightarrow$ R = 256 kbps

Homework 5

Observou-se por 34 horas e 43 minutos e registrou-se em disco as sequências PCM na saída de um conversor A/D de 3 bits no codificador de fonte de um transmissor digital, sequências que são resultantes da digitalização de um sinal analógico $v(t)$. A contagem das sequências é mostrada na **Tabela 3**. Sabe-se que o receptor digital recupera $v(t)$ sem *aliasing*.

Tabela 3

Sequência PCM	Contagem do número de ocorrências das sequências PCM durante o intervalo de observação de 34 horas e 43 minutos:
000	4×10^{8}
001	3×10^{8}
010	1×10^{8}
011	6×10^{7}
100	5×10^{7}
101	5×10^{7}
110	2×10^{7}
111	2×10^{7}

(a) Qual a máxima frequência no espectro de $v(t)$?

(b) Construa um código ótimo sob o ponto de vista da entropia para compressão de $v(t)$.

(c) Qual a eficiência do código construído?

(d) Avalie a compressão obtida.

Respostas Homework 5

(a) $f_M = 4\ kHz$

(b) $\Theta = \{1, 00, 0100, 0110, 0111, 01010, 010110, 010111\}$

(c) $\eta = 98\%$

(d) $taxa = 1 - \left(\frac{2.33}{3}\right) = 0.22\ \ ou\ \ 22\%$