Codificação de Canal: Exemplos e exercícios sobre códigos de bloco e códigos convolucionais.

Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1120 – TELECOMUNICAÇÕES II

Profa. Candice Müller   Prof. Fernando DeCastro

Exemplo 1

Seja o codificador de canal no transmissor de um sistema de comunicação digital que utiliza o código de bloco gerado por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine um possível **Arranjo Padrão** para este código, e a **Tabela de Síndromes** associada, visando o projeto do decodificador no receptor.

b) Suponha que o transmissor digital envie a palavra-código $\underline{c} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ através do canal.

b.1) O canal degrada o sinal de forma que o demodulador no receptor envia para o decodificador a palavra-código $\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique a capacidade do decodificador em detectar e corrigir este erro.

b.2) Suponha que o ruído/interferência no canal seja alto de forma que o demodulador no receptor envia para o decodificador a palavra-código $\underline{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. Verifique a capacidade do decodificador em detectar e corrigir este erro duplo.

Solução Exemplo 1

(a) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Arranjo Padrão
(2^{n-k} linhas = 8 linhas) x (2^k colunas = 4 colunas)

00000	01011	10111	11100
00001	01010	10110	11101
00010	01001	10101	11110
00100	01111	10011	11000
01000	00011	11111	10100
10000	11011	00111	01100
00110	01101	10001	11010
10010	11001	00101	01110

Tabela de Síndromes

$\underline{e}_i$	$\underline{s}_i = \underline{e}_i H^T$
00000	000
00001	001
00010	010
00100	100
01000	011
10000	111
00110	110
10010	101

Síndrome	Equações	Possível padrão de erro de peso 2
110	$b_4 + b_2 = 1$ $b_4+b_3+b_1 = 1$ $b_4+b_3+b_0 = 0$	00110
101	$b_4 + b_2 = 1$ $b_4+b_3+b_1 = 0$ $b_4+b_3+b_0 = 1$	10010

(b) Palavra código transmitida: $\underline{c} = [11100]$

(b1) Palavra código recebida: $\underline{y} = [11101]$

$\underline{s} = \underline{y}\mathrm{H}^{\mathrm{T}} = [001]$, a partir da tabela de síndromes, $\underline{e} = [00001]$

$\underline{c} = \underline{y} + \underline{e} = [11101] + [00001] = [11100]$, portanto, foi corrigido o erro simples.

(b2) Palavra código recebida: $\underline{y} = [11111]$

$\underline{s} = \underline{y}\mathrm{H}^{\mathrm{T}} = [011]$, a partir da tabela de síndromes, $\underline{e} = [01000]$

$\underline{c} = \underline{y} + \underline{e} = [11111] + [01000] = [10111]$, portanto, não foi corrigido o erro duplo.

Exemplo 2

Seja o codificador de canal no transmissor de um sistema de comunicação digital que utiliza o código de bloco gerado por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine um possível **Arranjo Padrão** para este código, e a **Tabela de Síndromes** associada, visando o projeto do decodificador no receptor.

b) Suponha que o transmissor digital envie a palavra código $\underline{c}$ = [001011] através do canal.

b.1) O canal degrada o sinal, de forma que o demodulador no receptor envia para o decodificador a palavra código $\underline{y}$ = [101011]. Verifique se o decodificador conseguirá corrigir este erro.

b.2) O canal degrada o sinal, de forma que o demodulador no receptor envia para o decodificador a palavra código $\underline{y}$ = [111011]. Verifique se o decodificador conseguirá corrigir este erro.

Solução Exemplo 2

(a) $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $H^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Arranjo Padrão: (2^{n-k} linhas = 8 linhas) x (2^k colunas = 8 colunas)

000	001	010	011	100	101	110	111
000000	001011	010110	011101	100101	101110	110011	111000
000001	001010	010111	011100	100100	101111	110010	111001
000010	001001	010100	011111	100111	101100	110001	111010
000100	001111	010010	011001	100001	101010	110111	111100
001000	000011	011110	010101	101101	100110	111011	110000
010000	011011	000110	001101	110101	111110	100011	101000
100000	101011	110110	111101	000101	001110	010011	011000
001100	000111	011010	010001	101001	100010	111111	110100

Tabela de Síndromes

$\underline{e}_i$	$\underline{s}_i = \underline{e}_i H^T$
000000	000
000001	001
000010	010
000100	100
001000	011
010000	110
100000	101
001100	111

Síndrome	Equações	Possível padrão de erro de peso 2
111	$b_5 + b_4 + b_2 = 1$ $b_4+b_3+b_1 = 1$ $b_5+b_3+b_0 = 1$	001100

(b) Palavra código transmitida: $\underline{c} = [001011]$

(b1) Palavra código recebida: $\underline{y} = [101011]$

$\underline{s} = \underline{y}\mathrm{H}^{\mathrm{T}} = [101]$, a partir da tabela de síndromes, $\underline{e} = [100000]$

$\underline{c} = \underline{y} + \underline{e} = [101011] + [100000] = [001011]$, portanto, foi corrigido o erro simples.

(b2) Palavra código recebida: $\underline{y} = [111011]$

$\underline{s} = \underline{y}\mathrm{H}^{\mathrm{T}} = [011]$, a partir da tabela de síndromes, $\underline{e} = [001000]$

$\underline{c} = \underline{y} + \underline{e} = [111011] + [001000] = [110011]$, portanto, não foi corrigido o erro duplo.

Exemplo 3

O Codificador de Canal de um transmissor digital codifica a sequência de bits proveniente do Codificador de Fonte considerando cada 4 bits, uma mensagem.

O Codificador de Canal utiliza um Código de Hamming binário $\boldsymbol{\theta}(n,k)$.

Lembre que a matriz **H** de um Código de Hamming descrito por $\boldsymbol{\theta}\left(2^m-1, 2^m-1-m\right)$ caracteriza-se pelas suas $n=2^m-1$ colunas serem formadas por todos os vetores distintos m dimensionais em **GF**(2), exceto o vetor $\underline{0}$.

a) Determine a matriz geradora de $\boldsymbol{\theta}(n,k)$, em forma sistemática.

b) Quantos erros simultâneos este código é capaz de corrigir?

Solução Exemplo 3

(a) Código de Hamming: $\theta(2^m - 1, 2^m - 1 - m) = \theta(n, k)$

$Se\ \ k = 4,\ \ 2^m - 1 - m = 4,\ \ de\ onde\ m = 3,\ \ então\ o\ código\ será\ \theta(7{,}4).$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(b) Todos os Código de Hamming têm $d_{min} = 3$, assim:

$$t = \left\lfloor \frac{d_{min} - 1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{3 - 1}{1} \right\rfloor = 1$$

Homework 1

As etapas de codificação/decodificação de canal de um sistema de comunicação digital utilizam um código de bloco $\theta(7,4)$. Pede-se:

(a) Apresente a relação de padrões de erro que constarão no Arranjo Padrão deste código.

(b) Sabendo que este código tem $d_{\min} = 3$, verifique se a resposta ao item (a) está de acordo com a equação $t = \left\lfloor \frac{d_{\min} - 1}{2} \right\rfloor$. Justifique sua resposta.

Homework 2

Sabendo que a matriz de paridade de um código $\theta(n,k)$ é $\mathrm{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, pede-se:

(a) Determine um dos possíveis padrões de erro de peso dois que poderão constar no Arranjo Padrão de $\theta(n,k)$. Apresente todos os passos envolvidos na solução.

(b) Sabendo que, de acordo com o tamanho em bits das palavras-código de $\theta(n,k)$, o número total de possíveis padrões de erros de peso 2 é 15, pergunta-se: este código conseguirá decodificar todos os possíveis erros de peso 2? Justifique sua resposta apresentando a distribuição de padrões de erro que constarão no Arranjo Padrão de $\theta(n,k)$ (quantos padrões de erro e de quais pesos, respectivamente).

Homework 3

Seja o codificador de canal no transmissor de um sistema de comunicação digital que utiliza o código de bloco gerado por $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Complete o Arranjo Padrão apresentado na Tabela 1, bem como a Tabela de Síndromes associada apresentada na Tabela2 (ambas as Tabelas apresentadas a seguir), visando o projeto do decodificador no receptor.

(b) Suponha que o transmissor digital envie a palavra-código $\underline{c} = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$ através do canal. O canal degrada o sinal, de forma que o decodificador no receptor recebe as seguintes palavras-código:

b.1) $\underline{y}_1 = [0 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$ b.2) $\underline{y}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 1]$

Verifique a capacidade do decodificador em detectar e corrigir os erros ocorridos em (b.1) e (b.2), apresentando os passos envolvidos na decodificação.

Homework 3

Tabela 1 – Arranjo Padrão

00000000	00011110	00100111	00111001	01001101	01010011	01101010	01110100	10001011	10010101	10101100	10110010	11000110	11011000	11100001	11111111
00000001	00011111	00100110	00111000	01001100	01010010	01101011	01110101	10001010	10010100	10101101	10110011	11000111	11011001	11100000	11111110
00000010	00011100	00100101	00111011	01001111	01010001	01101000	01110110	10001001	10010111	10101110	10110000	11000100	11011010	11100011	11111101
00000100	00011010	00100011	00111101	01001001	01010111	01101110	01110000	10001111	10010001	10101000	10110110	11000010	11011100	11100101	11111011
00001000	00010110	00101111	00110001	01000101	01011011	01100010	01111100	10000011	10011101	10100100	10111010	11001110	11010000	11101001	11110111
00010000	00001110	00110111	00101001	01011101	01000011	01111010	01100100	10011011	10000101	10111100	10100010	11010110	11001000	11110001	11101111
00100000	00111110	00000111	00011001	01101101	01110011	01001010	01010100	10101011	10110101	10001100	10010010	11100110	11111000	11000001	11011111
01000000	01011110	01100111	01111001	00001101	00010011	00101010	00110100	11001011	11010101	11101100	11110010	10000110	10011000	10100001	10111111
10000000	10011110	10100111	10111001	11001101	11010011	11101010	11110100	00001011	00010101	00101100	00110010	01000110	01011000	01100001	01111111
00000011	00011101	00100100	00111010	01001110	01010000	01101001	01110111	10001000	10010110	10101111	10110001	11000101	11011011	11100010	11111100
00000101	00011011	00100010	00111100	01001000	01010110	01101111	01110001	10001110	10010000	10101001	10110111	11000011	11011101	11100100	11111010
00000110	00011000	00100001	00111111	01001011	01010101	01101100	01110010	10001101	10010011	10101010	10110100	11000000	11011110	11100111	11111001
00001001	00010111	00101110	00110000	01000100	01011010	01100011	01111101	10000010	10011100	10100101	10111011	11001111	11010001	11101000	11110110
00001010	00010100	00101101	00110011	01000111	01011001	01100000	01111110	10000001	10011111	10100110	10111000	11001100	11010010	11101011	11110101
00001100	00010010	00101011	00110101	01000001	01011111	01100110	01111000	10000111	10011001	10100000	10111110	11001010	11010100	11101101	11110011

Homework 3

Tabela 2 – Tabela de Síndromes

$\underline{e}_i$	$\underline{e}_i \mathbf{H}^T = \underline{s}_i$
[00000000]	$[00000000]\mathbf{H}^T = [0000]$
[00000001]	$[00000001]\mathbf{H}^T = [0001]$
[00000010]	$[00000010]\mathbf{H}^T = [0010]$
[00000100]	$[00000100]\mathbf{H}^T = [0100]$
[00001000]	$[00001000]\mathbf{H}^T = [1000]$
[00010000]	$[00010000]\mathbf{H}^T = [1110]$
[00100000]	$[00100000]\mathbf{H}^T = [0111]$
[01000000]	$[01000000]\mathbf{H}^T = [1101]$
[10000000]	$[10000000]\mathbf{H}^T = [1011]$
[00000011]	$[00000011]\mathbf{H}^T = [0011]$
[00000101]	$[00000101]\mathbf{H}^T = [0101]$
[00000110]	$[00000110]\mathbf{H}^T = [0110]$
[00001001]	$[00001001]\mathbf{H}^T = [1001]$
[00001010]	$[00001010]\mathbf{H}^T = [1010]$
[00001100]	$[00001100]\mathbf{H}^T = [1100]$

Exemplo 1

Para o codificador convolucional apresentado na Figura 1, pede-se:

(a) Decodifique a sequência de bits ***r***=[101100111100] recebida, utilizando o diagrama de treliça de um Decodificador de Viterbi adequado ao codificador em questão.

(b) A partir do resultado da decodificação encontrado em (a), responda quantos e quais foram os bits recebidos em erro na sequência ***r***.

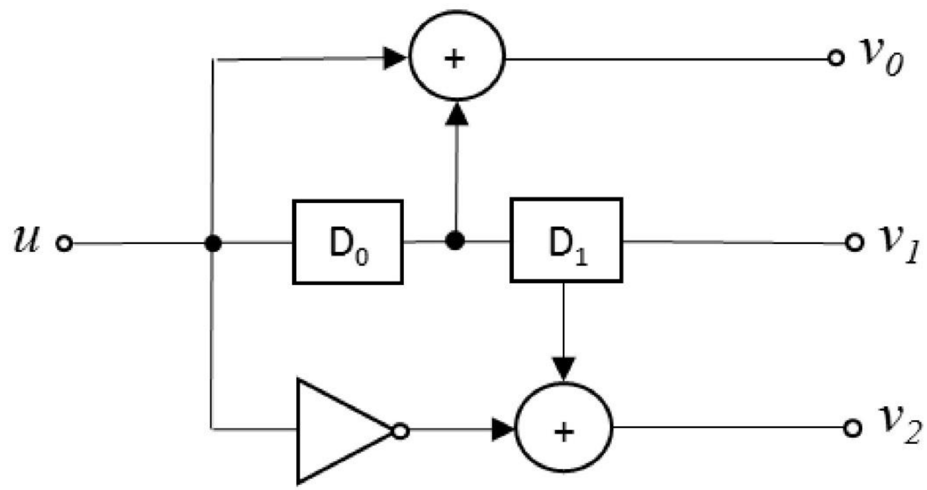
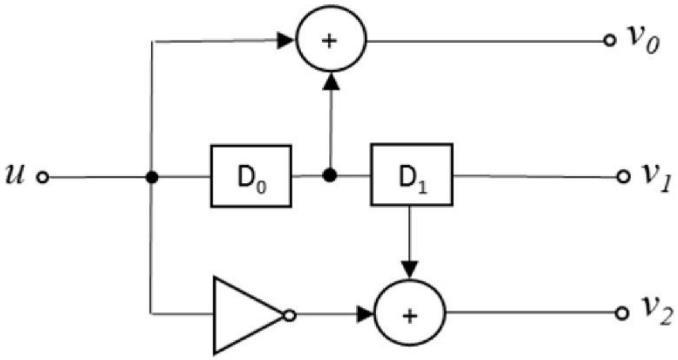
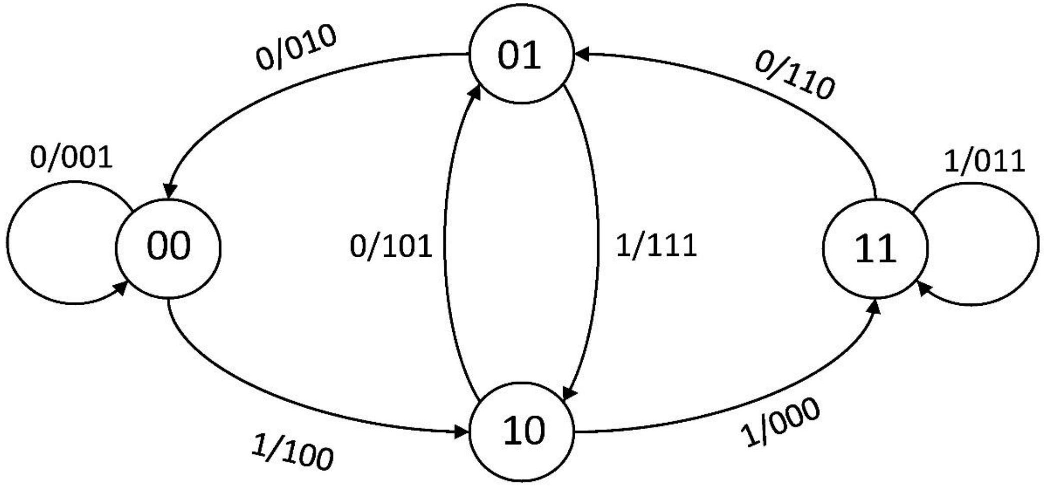


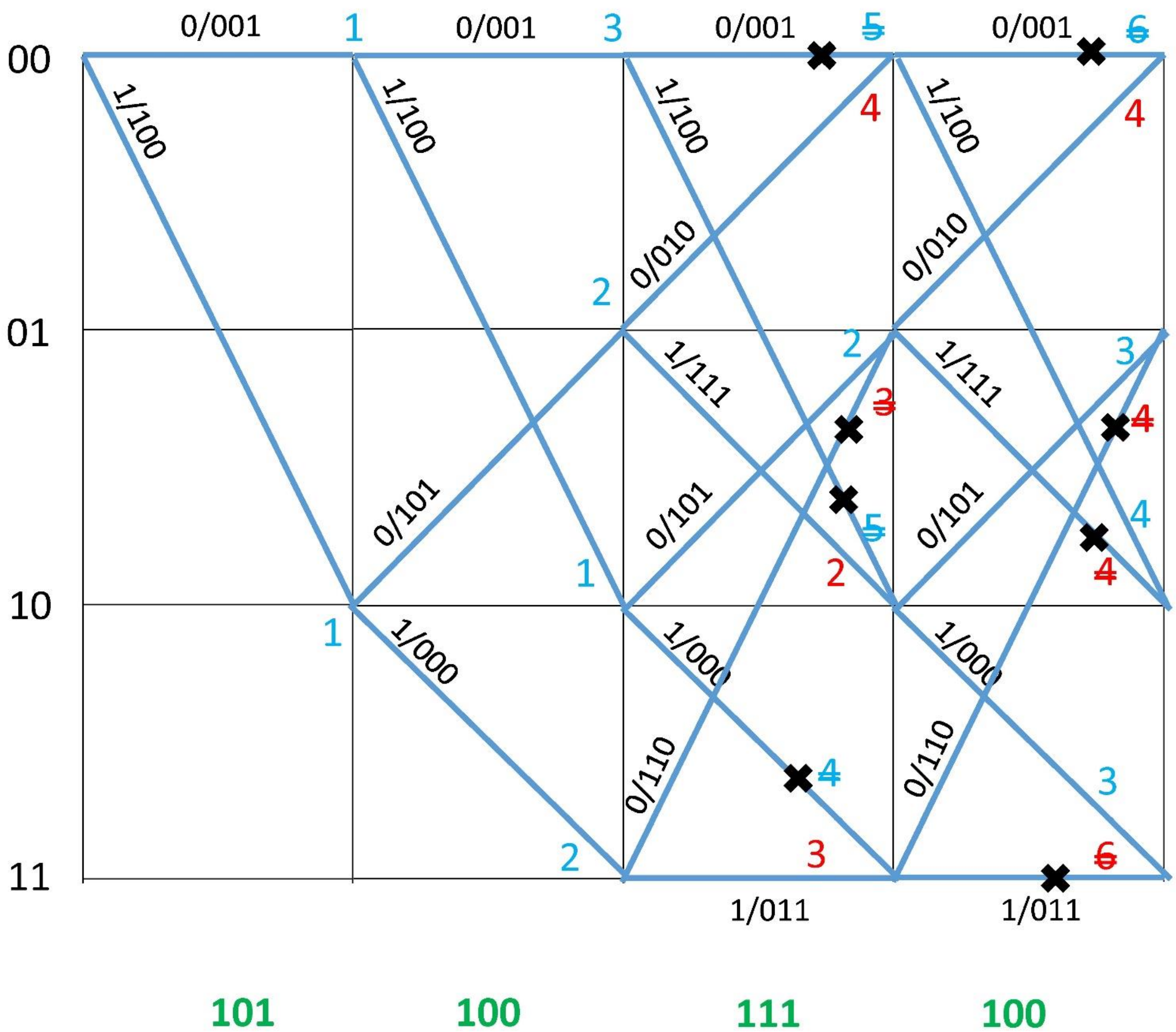
Figura 1

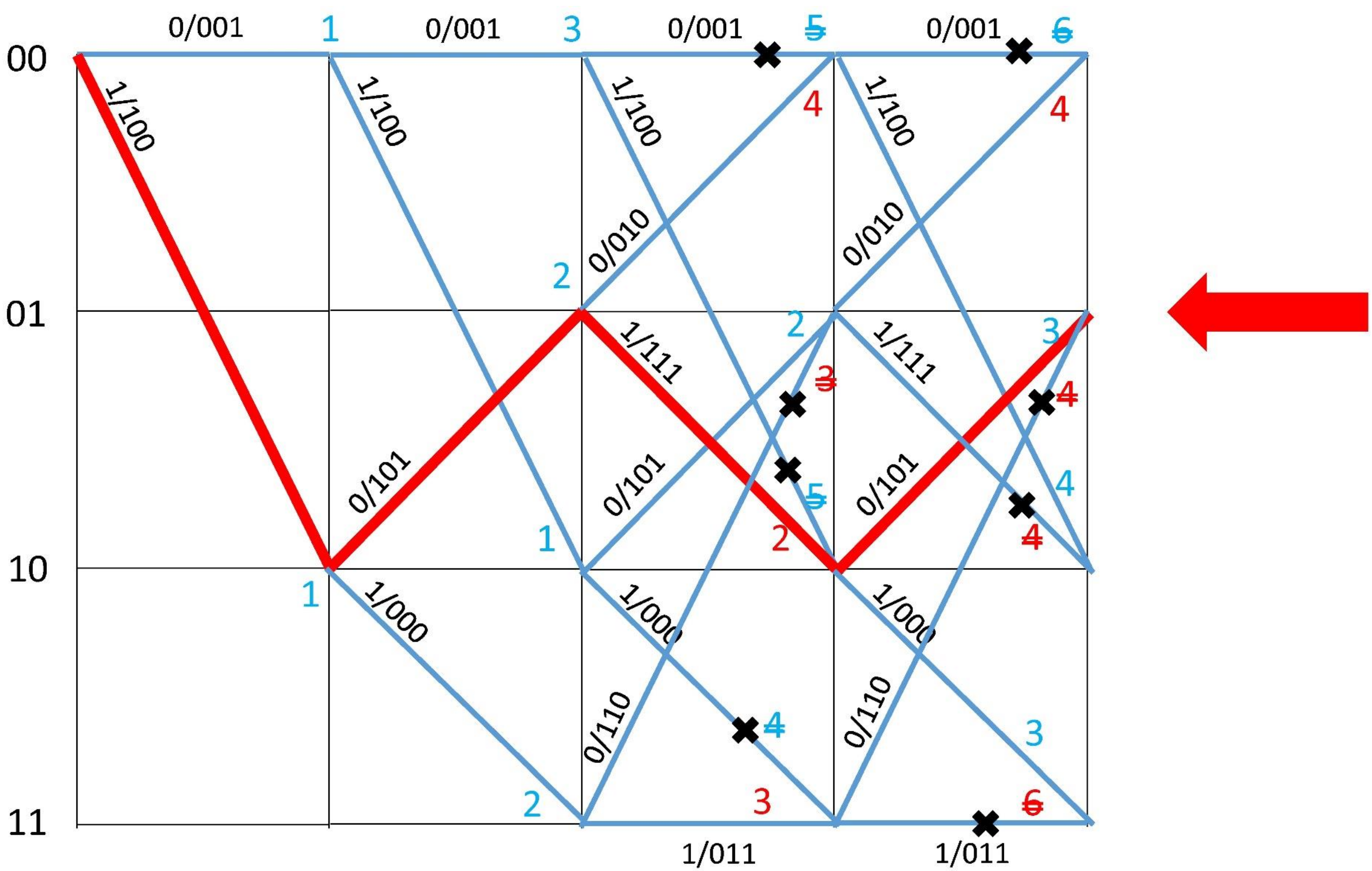
Solução Exemplo 1



Estado atual	u	v			Estado futuro $D_0D_1 = uD_0$
		$v_0 = u + D_0$	$v_1 = D_1$	$v_2 = D_1 + \bar{u}$	
00	0	0	0	1	00
00	1	1	0	0	10
01	0	0	1	0	00
01	1	1	1	1	10
10	0	1	0	1	01
10	1	0	0	0	11
11	0	1	1	0	01
11	1	0	1	1	11




00
01
10
11
0/001
1/100
0/010
1/111
0/101
1/000
0/110
1/011
101
100
111
100



101	**100**	**111**	**100**
100	**101**	**111**	**101**

Exemplo 2

Para o codificador convolucional apresentado na Figura 2, pede-se:

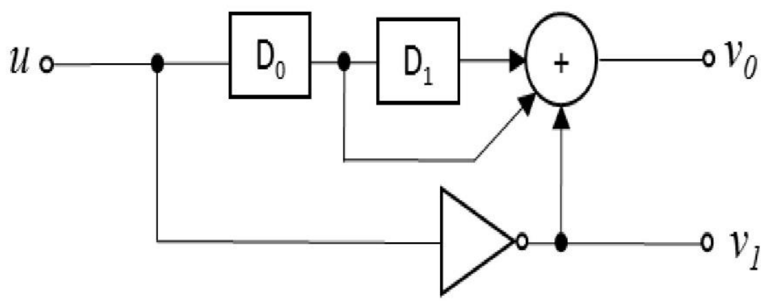


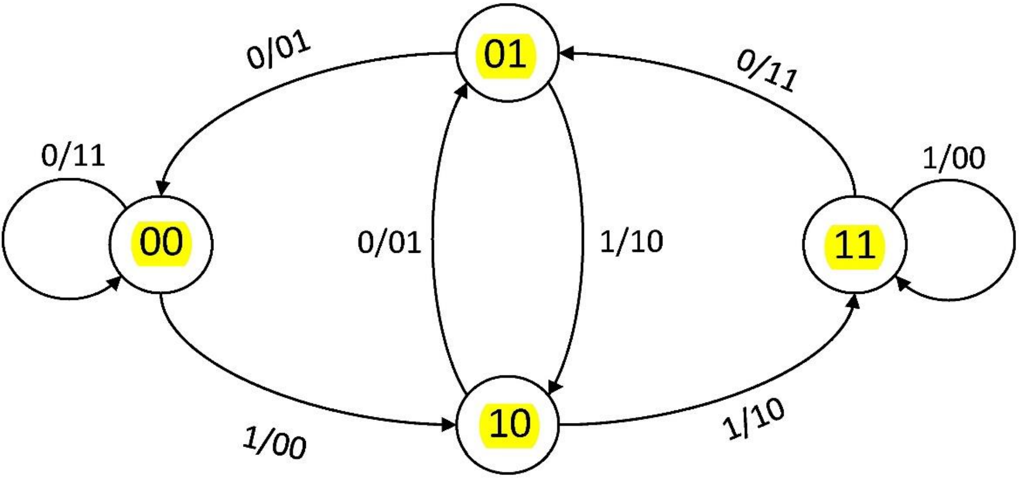
Figura 2

a) Construa o diagrama de transição de estados.

b) Codifique a sequência [11010] e obtenha a saída ***v*** a ser transmitida.
O bit à esquerda é o 1º a ser codificado.

Solução Exemplo 2

D_0D_1 atual	u	v		D_0D_1 futuro
		$v_0 = D_0 + D_1 + \bar{u}$	$v_1 = \bar{u}$	
00	0	1	1	00
00	1	0	0	10
01	0	0	1	00
01	1	1	0	10
10	0	0	1	01
10	1	1	0	11
11	0	1	1	01
11	1	0	0	11



u	1	1	0	1	0
D_0D_1 atual	00	10	11	01	10
D_0D_1 futuro	10	11	01	10	01
v	00	10	11	10	01

Exemplo 3

Considere o diagrama de transição de estados do codificador convolucional apresentado na Figura 3.

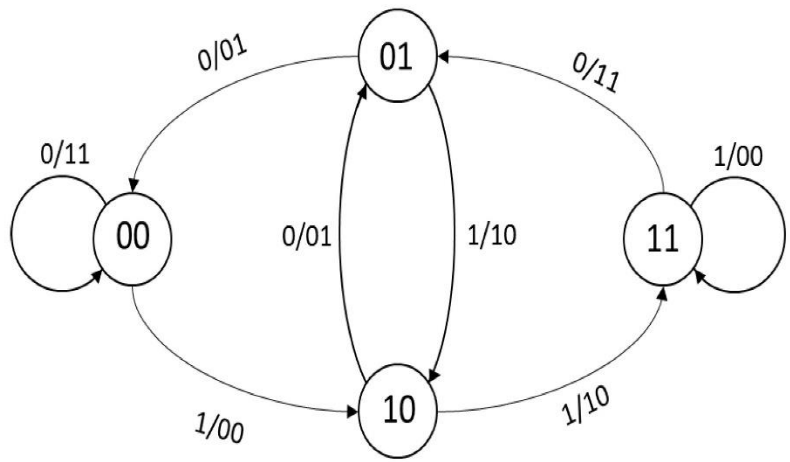
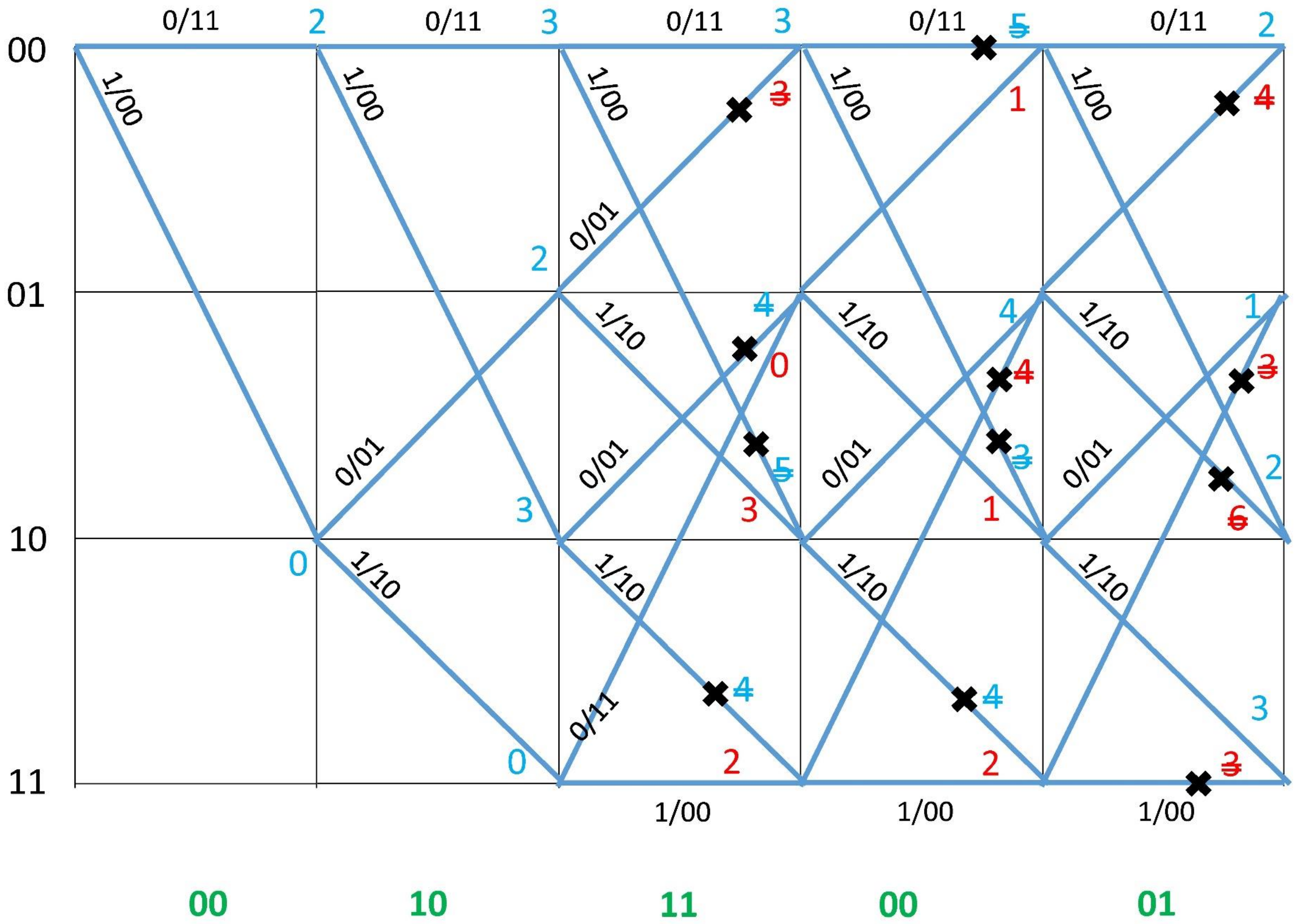
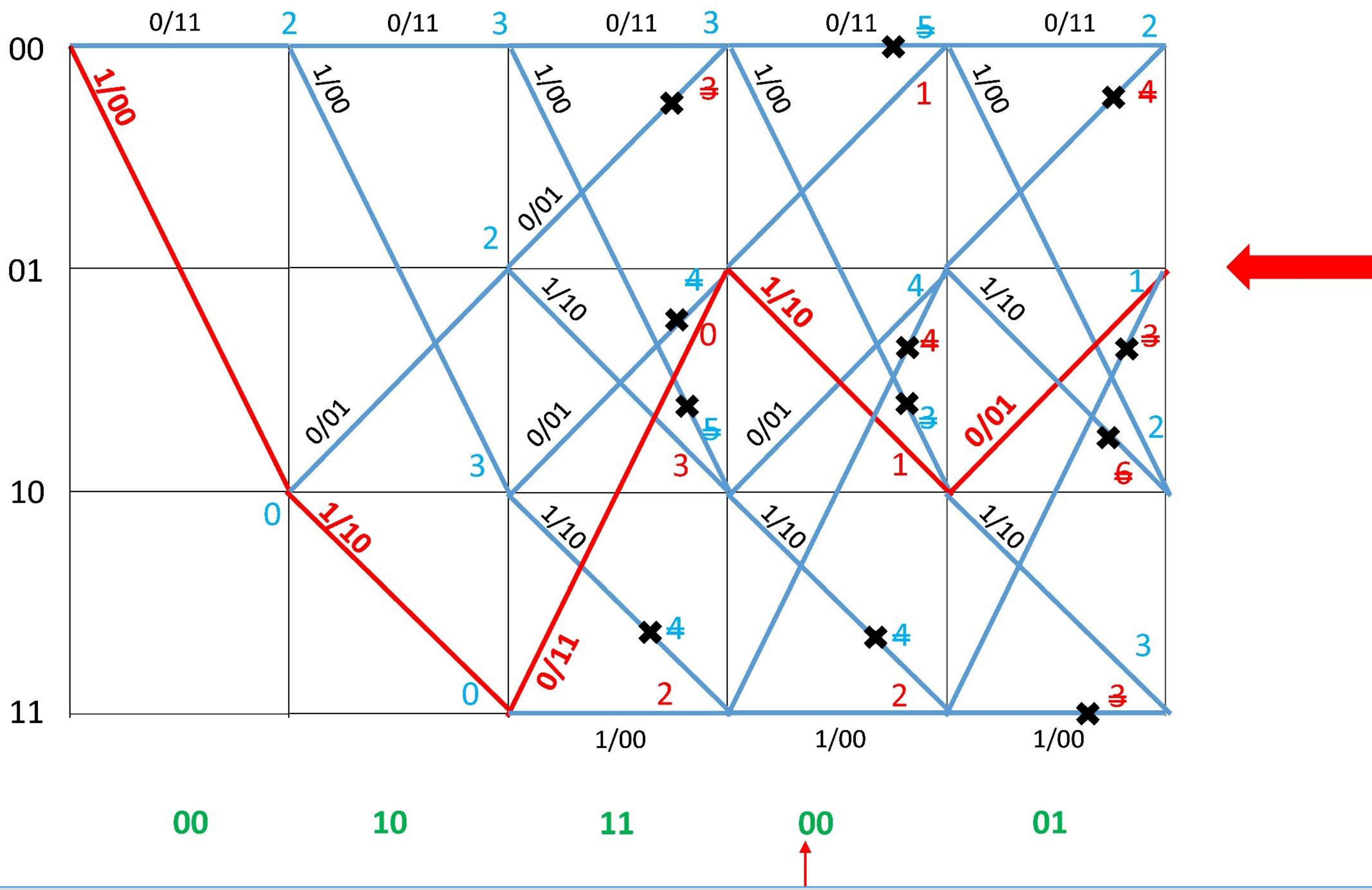


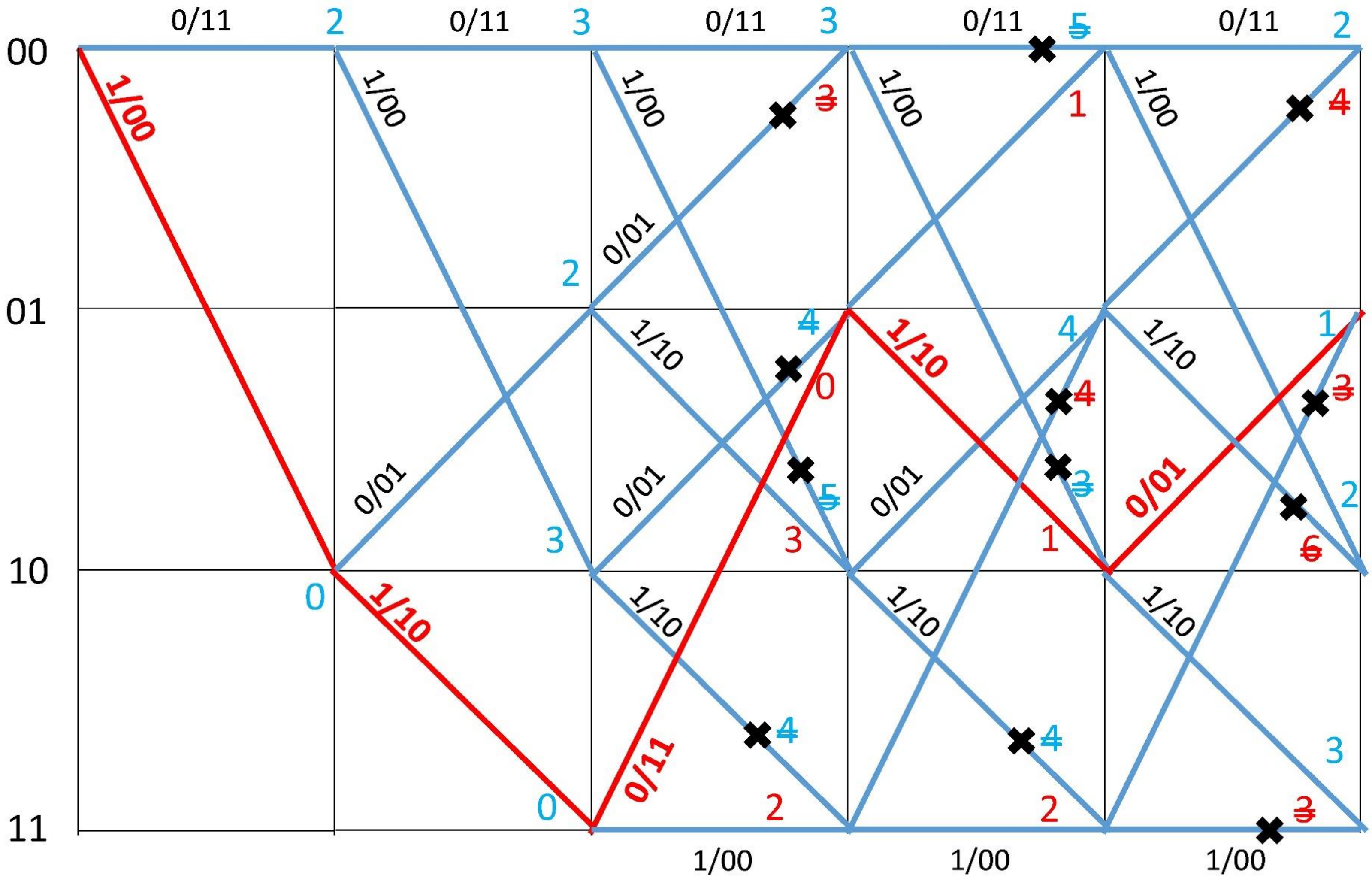
Figura 3

Decodifique a sequência de bits ***r***=[0010110001] recebida, utilizando o diagrama de treliça de um Decodificador de Viterbi adequado ao codificador em questão.

Solução Exemplo 3




00
01
10
11
0/11
1/00
1/10
0/01
00
10
11
00
01

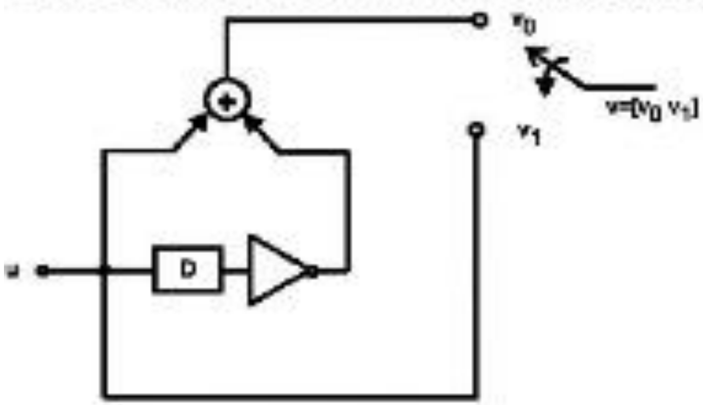


Qual foi a sequência de bits codificada? u = [1 1 0 1 0]

Qual foi a sequência de bits transmitida? v = [00 10 11 10 01]

Exemplo 4

Dado o codificador convolucional abaixo, pede-se:



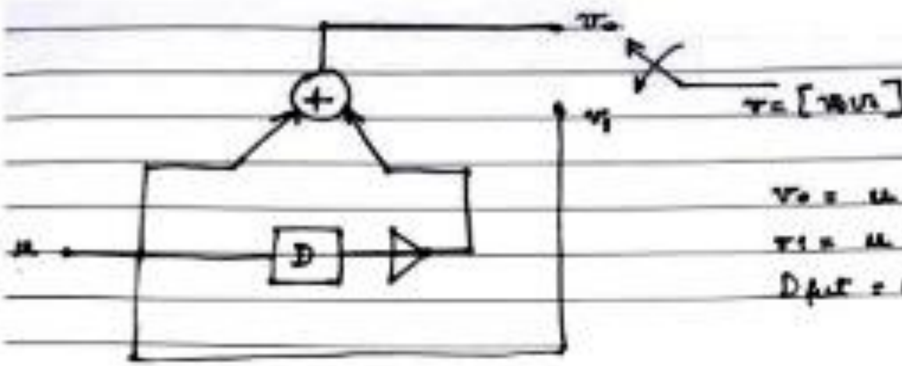
1. Construir o diagrama de transição de estados para este codificador.
2. Codificar a sequência $[10110]$ e obter a saída v. (Obs.: O bit à esquerda é o 1° a ser codificado.)
3. Construir uma sequência *r* introduzindo 2 erros na saída *v* do codificador obtida em (2) de forma que o segundo e o sétimo bits (na ordem de ocorrência temporal) de v tenham seu valor lógico invertido.

Decodificar *r* utilizando o diagrama de treliça de um Decodificador de Viterbi adequado ao codificador em questão.

Lembre que, no caso de ocorrerem métricas acumuladas de valores iguais, o decodificador escolhe o caminho que aproxima-se do estado inicial zero.

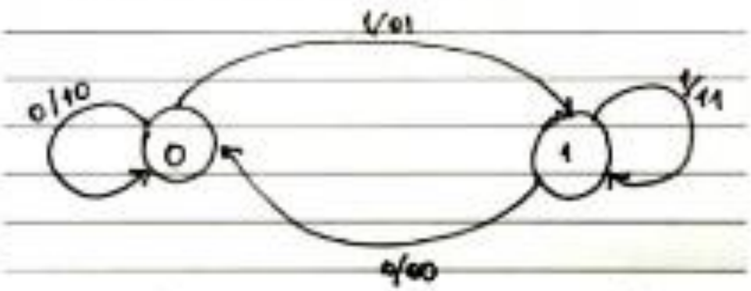
Codificação					
u =	1	0	1	1	0
D (*atual*) =					
D (*futuro*) =					
v =					
Decodificação (Viterbi)					
r =					
$v_{decodificada}$ =					
$u_{decodificada}$ =					

Solução Exemplo 4

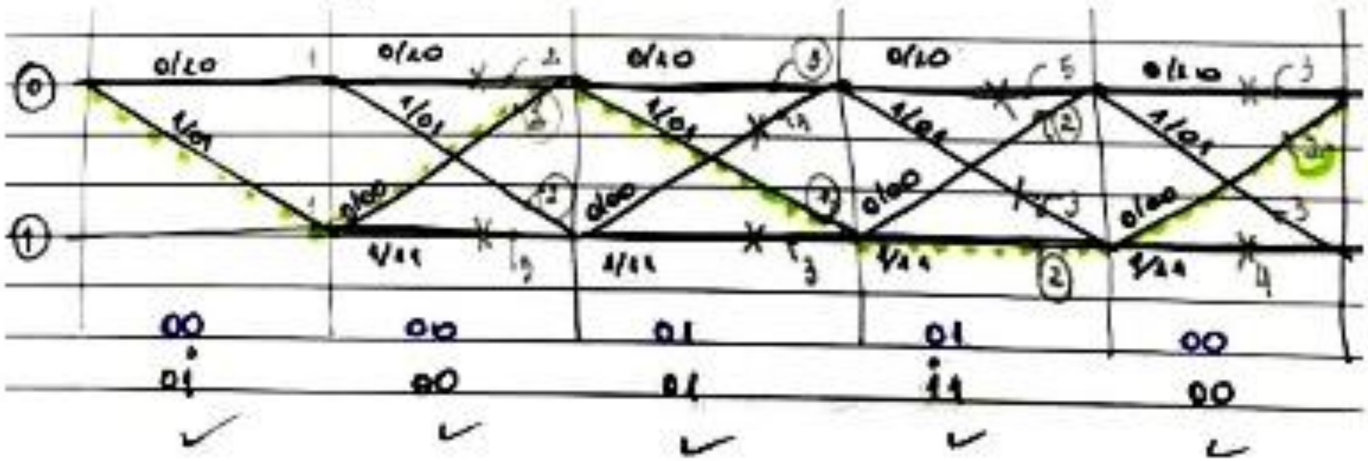


$v_0 = u + \bar{D}$
$v_1 = u$
$D_{fut} = u$

u	Dat	v_0	v_1	Dfut
0	0	0+1 = 1	0	0
1	0	1+1 = 0	1	1
0	1	0+0 = 0	0	0
1	1	1+0 = 1	1	1



u	1	0	1	1	0
Datual	0	1	0	1	1
Dfuturo	1	0	1	1	0
v	01	00	01	11	00

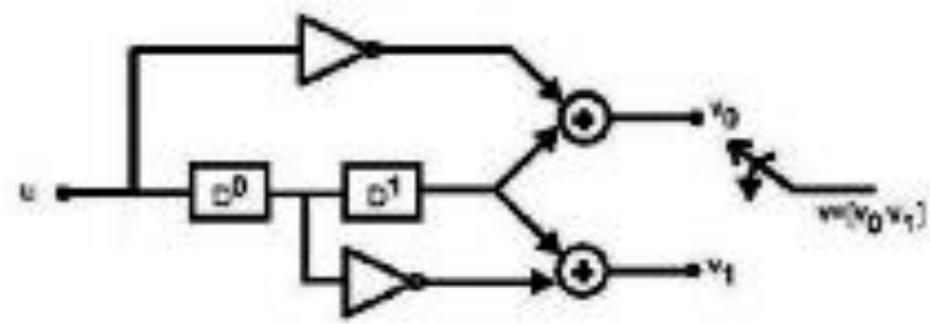


Exemplo 5

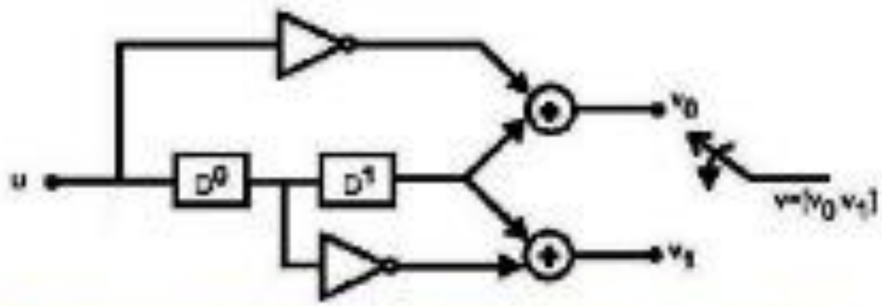
Considere o codificador convolucional representado na figura ao lado.

(a) Construa o diagrama de transição de estados para este codificador.

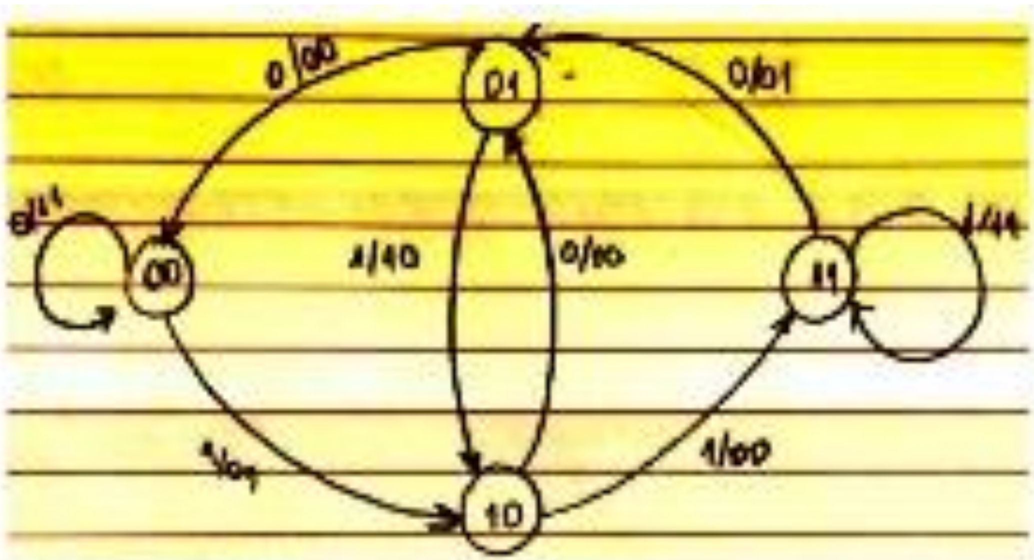
(b) Codifique a sequência $[0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 1\ \ 1]$, obtendo a saída v do codificador (o bit à esquerda é o 1º bit a ser codificado).



Solução Exemplo 5



D^0D^1 ATUAL	u	$v_0\ v_1$	D^0D^1 FUTURO
00	0	1 1	00
00	1	0 1	1 0
0 1	0	0 0	0 0
0 1	1	1 0	1 0
1 0	0	1 0	0 1
1 0	1	0 0	1 1
1 1	0	0 1	0 1
1 1	1	1 1	1 1



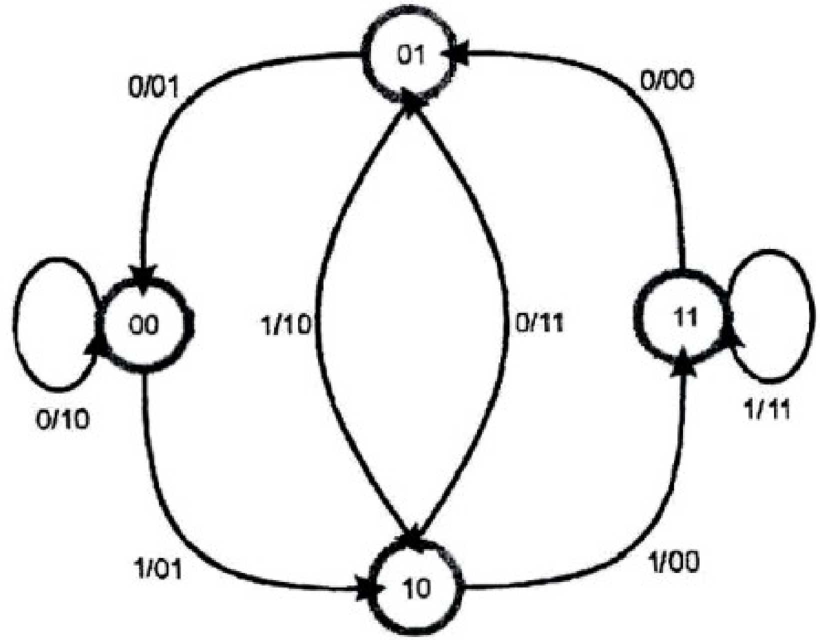
u	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
D^0D^1 ATUAL	00	00	10	01	00	10	01	00	10	11
D^0D^1 FUTURO	00	10	01	00	10	01	00	10	11	11
v	11	01	10	00	01	10	10	01	00	11

Homework 1

A figura ao lado apresenta o diagrama de transição de estados de um dado codificador convolucional.

À entrada do referido codificador foi apresentada a sequência de bits [01101], tendo sido obtida na saída do codificador a sequência [1001000010], conforme abaixo:

u =	0	1	1	0	1
$D^0D^1(atual) =$	00	00	10	11	01
$D^0D^1(futuro) =$	00	10	11	01	10
v =	10	01	00	00	10



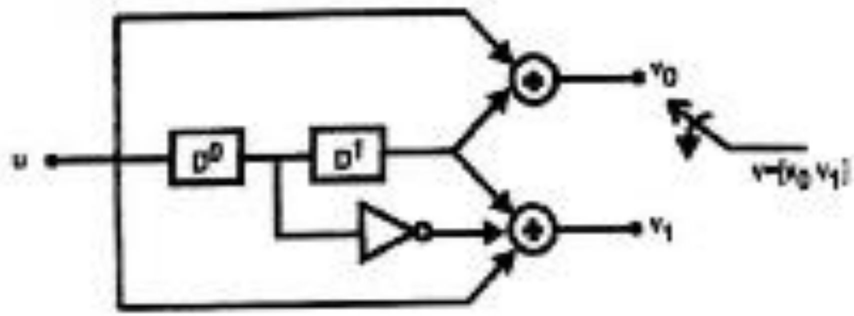
Construa uma sequência **r** introduzindo 1 erro na saída **v** do codificador, de forma que o 8º bit de **v** (na ordem de ocorrência temporal) tenha seu valor lógico invertido.

Decodifique **r** utilizando o diagrama de treliça de um Decodificador de Viterbi adequado ao codificador em questão.

Lembre que, no caso de ocorrerem métricas acumuladas de valores iguais, o decodificador deverá escolher o caminho que se aproxima do estado inicial.

Homework 2

Dado o codificador convolucional abaixo, pede-se:



1. Codificar a sequência [01001010] e obter a saída v. (Obs.: O bit à esquerda é o 1º a ser codificado.)

2. Construir uma sequência r, introduzindo dois erros na saída *v* do codificador obtida em (1), de forma que o sétimo e o décimo segundo bits de *v* (na ordem de ocorrência temporal) tenham seu valor lógico invertido.

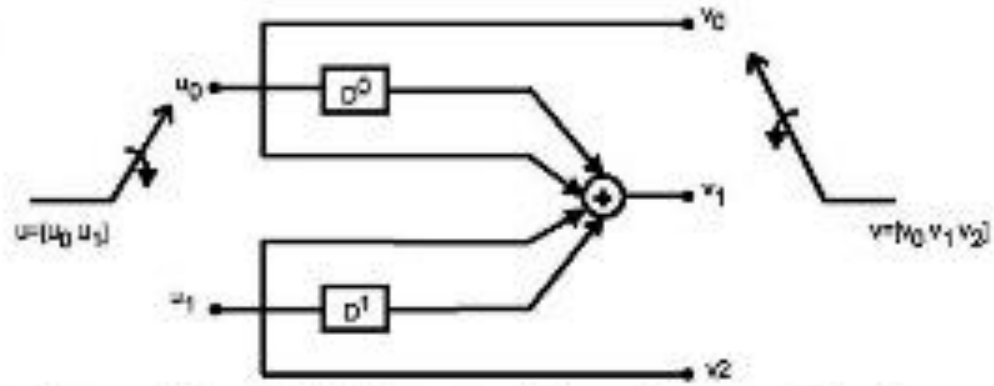
3. Decodificar *r* utilizando o diagrama de treliça de um Decodificador de Viterbi adequado ao codificador em questão.

Obs.: No caso de ocorrerem métricas acumuladas de valores iguais, o decodificador escolhe o caminho que se aproxima do estado inicial zero.

Codificação								
u =	0	1	0	0	1	0	1	0
D^0D^1 (*atual*) =								
D^0D^1 (*futuro*) =								
v =								
Decodificação (Viterbi)								
r =								
$v_{decodificado}$ =								
$u_{decodificado}$ =								

Homework 3

Dado o codificador convolucional



a) Codificar a seqüência $[01100110]$ e obter a saída v . O bit à esquerda é o 1° a ser codificado.

b) Construir uma seqüência r introduzindo 2 erros na saída v do codificador obtida em a) de forma que o segundo e o sétimo bit (na ordem de ocorrência temporal) de v tenham seu valor lógico invertido. Decodifique r utilizando o diagrama de treliça de um Decodificador de Viterbi adequado ao codificador em questão. <u>Nota</u>: No caso de ocorrerem métricas acumuladas de valores iguais o decodificador escolhe o caminho que aproxima-se do estado inicial.

Codificação				
u =	01	10	01	10
D^0D^1 (*atual*) =				
D^0D^1 (*futuro*) =				
v =				

Decodificação (Viterbi)				
r =				
$v_{decodificada}$ =				
$u_{decodificada}$ =				