



# Sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*)



Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

ELC1120 – Telecomunicações II

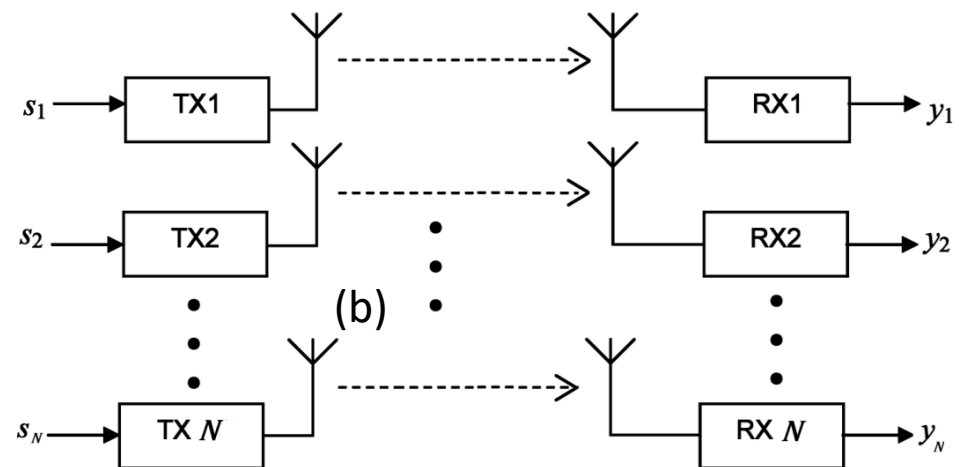
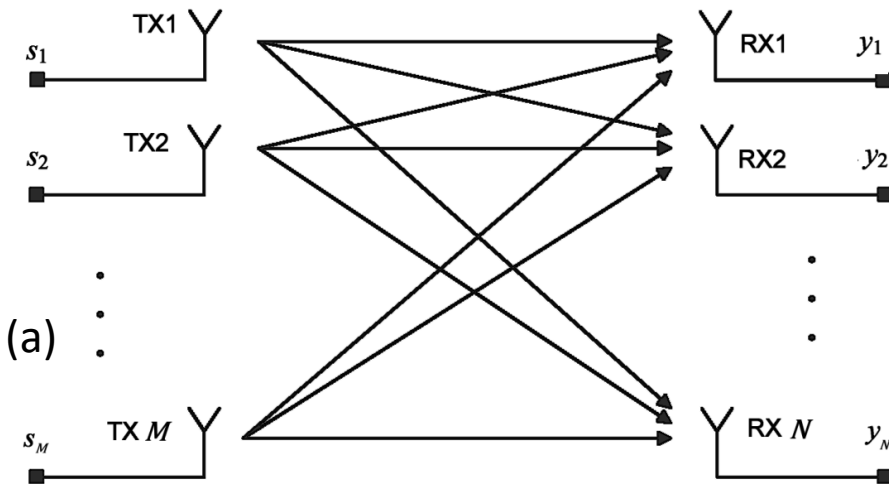
Profa. Candice Müller Prof. Fernando DeCastro

## Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output)

Sistemas MIMO são sistemas *wireless* com  $M$  antenas transmissoras e  $N$  antenas receptoras, estabelecendo um cenário de diversidade espacial, conforme mostrado em (a). A sequência de símbolos IQ resultante em cada  $k$ -ésima saída  $y_k$  em (a), com  $k = 1, 2, \dots, N$ , é uma combinação linear de todas as sequências de símbolos IQ  $s_1, s_2, \dots, s_M$  transmitidas, porque, cada antena RX “vê” a onda eletromagnética (EM) irradiada por todas as  $M$  antenas TX, ondas que são moduladas pelas respectivas sequências de símbolos IQ  $s_1, s_2, \dots, s_M$ . A ideia básica no âmbito de MIMO é otimizar este cenário de diversidade codificando nos TXs as sequências de símbolos IQ  $s_1, s_2, \dots, s_M$  que modulam a amplitude e a fase das ondas EM irradiadas pelas respectivas antenas TX de modo que as ondas EM que incidem em uma  $k$ -ésima antena RX se interfiram construtivamente entre si no processamento em banda-base efetuado no decodificador em cada RX, maximizando a onda EM recebida de uma determinada antena TX e cancelando por interferência destrutiva a superposição de todas as demais ondas EM.

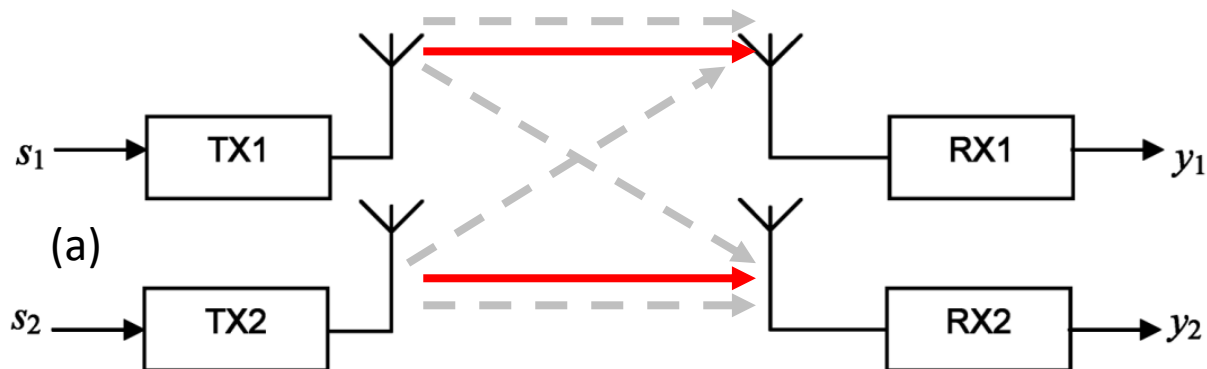
Através da técnica MIMO denominada *Eigen-Beamforming* (<https://silvustechologies.com/why-silvus/technology/introduction-to-mimo/>) em que a matriz do canal é diagonalizada por decomposição em valores singulares (<https://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/0806/0806.3630.pdf>) é possível obter para  $M = N$  um cenário virtual de interferência controlado pela codificação feita sobre a sequência de símbolos IQ em cada TX e pelo processo de decodificação em cada RX, de tal forma que cada uma das  $N$  antenas RX “vê” a onda EM modulada e transmitida por uma única das  $N$  antenas TX. Isto faz resultar nas saídas  $y_1, y_2, \dots, y_N$  dos RXs as sequências de símbolos respectivamente transmitidas  $s_1, s_2, \dots, s_N$ , conforme mostrado em (b).

Note que a codificação dos símbolos IQ em cada TX e a decodificação em cada RX (que discutiremos adiante) altera a amplitude e fase das ondas transmitidas e recebidas e é este processo que permite controlar o cenário de interferência das ondas EM que incidem nas antenas RX e que são combinadas e decodificadas pelo respectivo decodificador em cada RX. Neste contexto, a técnica MIMO pode ser interpretada como um “multipercurso controlado e benéfico”.



## Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output)

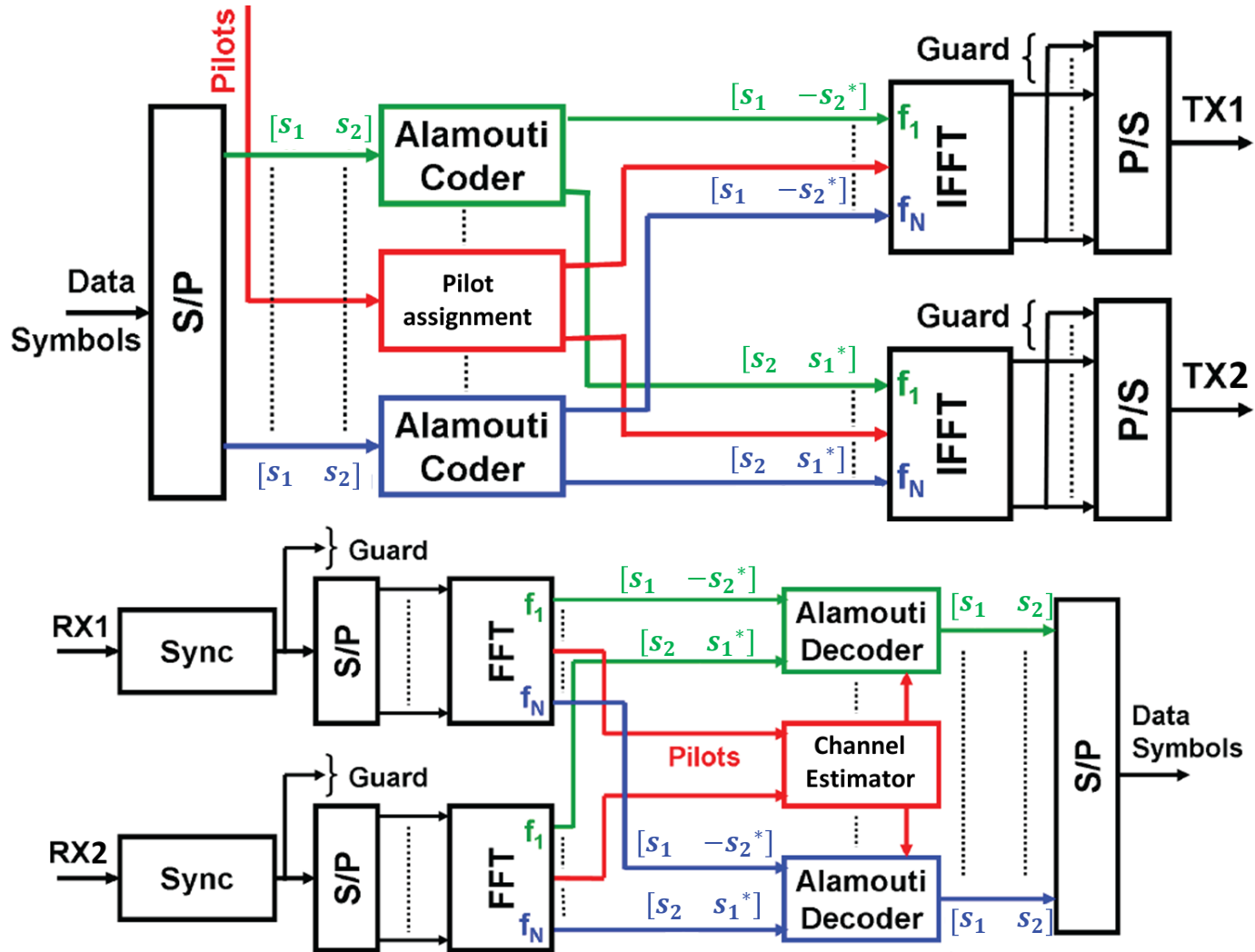
Neste estudo vamos delimitar o escopo da análise a sistemas MIMO com duas antenas TX e duas antenas RX, conforme mostra a figura:



Note na figura que existem quatro percursos de propagação (linhas tracejadas) das ondas EM irradiadas pelas antenas TX e que se propagam até as antenas RX. As ondas recebidas pelas antenas RX são combinadas e se interferem mutuamente no processamento em banda-base efetuado no decodificador MIMO em cada RX de acordo com o padrão de interferência determinado pelo codificador MIMO ao codificar os símbolos IQ nos respectivos TXs, resultando nos dois percursos “virtuais” em vermelho, independentes e separados um do outro, que fazem cada antena RX “ver” uma única e respectiva antena TX. Estes dois percursos “virtuais” em vermelho não são percursos de ondas EM reais, mas sim o resultado virtual da interferência entre as ondas EM reais que se propagam no canal e que são combinadas no decodificador no RX.

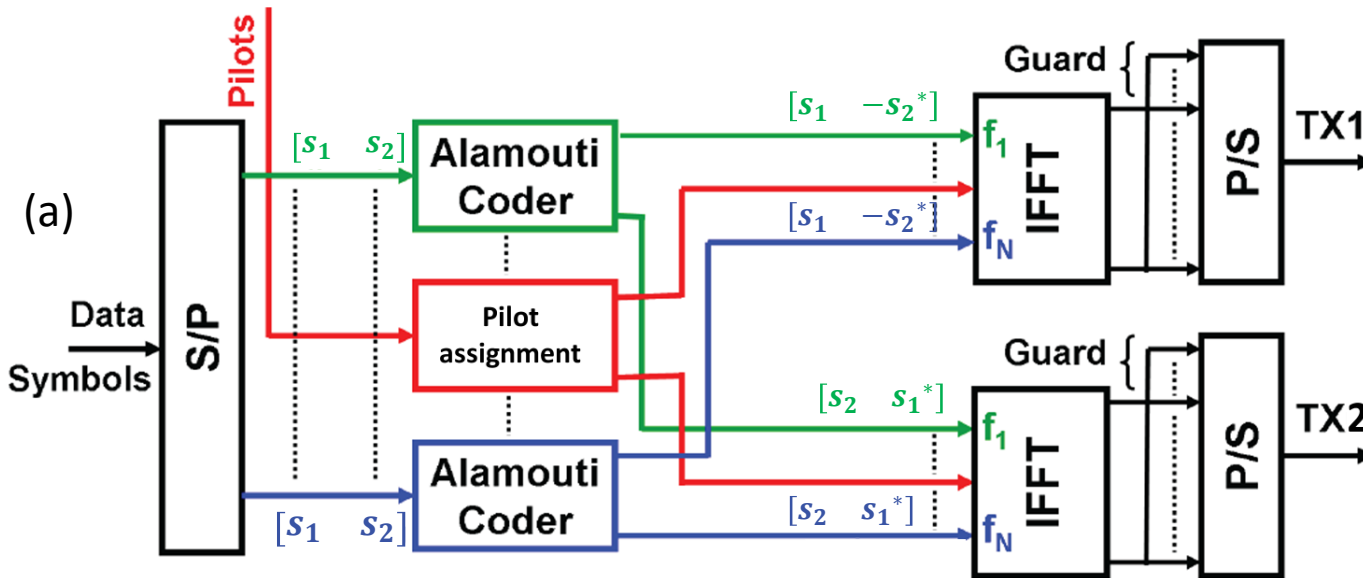
## Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output)

Vamos ainda delimitar o escopo de nossa análise a sistemas MIMO-OFDM com  $N$  portadoras (OFDM – ver Cap IX.4 das notas de aula), sendo a codificação MIMO feita através da técnica Alamouti (que discutiremos nos próximos slides). Como o sistema é OFDM, a codificação Alamouti no TX é individualmente aplicada à sequência de símbolos IQ que modula respectivamente cada  $k$ -ésima portadora das duas IFFTs, e a decodificação Alamouti no RX é individualmente aplicada à sequência de símbolos IQ que é respectivamente demodulada na saída de cada  $k$ -ésima portadora nas duas FFTs, com  $k = 1, 2, \dots, N$ , conforme mostra o diagrama de blocos do TX e do RX:

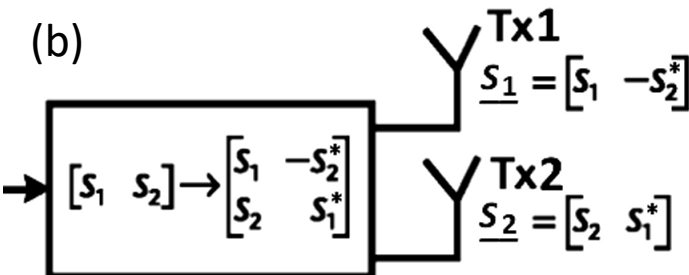


## Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output)

A codificação Alamouti é extensivamente usada em sistemas WiFi, como , por exemplo, no padrão IEEE 802.11n (ver [https://www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialwifiieee/pagina\\_4.asp](https://www.teleco.com.br/tutoriais/tutorialwifiieee/pagina_4.asp) ). A técnica Alamouti é um sub-conjunto da classe de códigos denominada *space time block codes* (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Space%E2%80%93time\\_block\\_code](https://en.wikipedia.org/wiki/Space%E2%80%93time_block_code)). A idéia básica no âmbito da codificação Alamouti é previamente organizar a sequência de símbolos IQ a ser transmitida por cada  $k$ -ésima portadora das duas IFFTs em uma sequência de vetores  $\underline{s} = [s_1 \quad s_2]$ , cujos componentes são o símbolo IQ anterior  $s_1$  e o símbolo IQ atual  $s_2$ . O codificador Alamouti gera dois novos vetores ortogonais entre si a partir de  $\underline{s} = [s_1 \quad s_2]$ : O vetor  $\underline{s}_1 = [s_1 \quad -s_2^*]$ , que modula a  $k$ -ésima portadora da IFFT do TX1 e é transmitido pela antena 1 e o vetor  $\underline{s}_2 = [s_2 \quad s_1^*]$ , que modula a  $k$ -ésima portadora da IFFT do TX2 e é transmitido pela antena 2, conforme mostrado em (a):



Note em (a) que cada portadora de dados é representada por uma cor distinta, sendo mostradas a portadora de frequência  $f_1$  mais baixa na cor verde e a portadora de frequência  $f_N$  mais alta na cor azul. Os *scattered pilots* (SPs – ver Cap IX.4 das notas de aula) são atribuídos a portadoras SP pares na IFFT do TX1 e a portadoras SP ímpares na IFFT do TX2 (em vermelho em (a)).



Para cada  $k$ -ésima portadora SP par na IFFT do TX1 há uma correspondente  $k$ -ésima portadora modulada por  $0 + j0$  na IFFT do TX2, e para cada  $k$ -ésima portadora SP ímpar na IFFT do TX2 há uma correspondente  $k$ -ésima portadora modulada por  $0 + j0$  na IFFT do TX1.

Portanto, simplificando o diagrama em (a) para cada  $k$ -ésima portadora de dados das duas IFFTs, a representação equivalente em banda-base da transmissão do vetor  $\underline{s}_1 = [s_1 \quad -s_2^*]$  pela antena do TX1 e da transmissão do vetor  $\underline{s}_2 = [s_2 \quad s_1^*]$  pela antena do TX2 é conforme mostrado em (b).

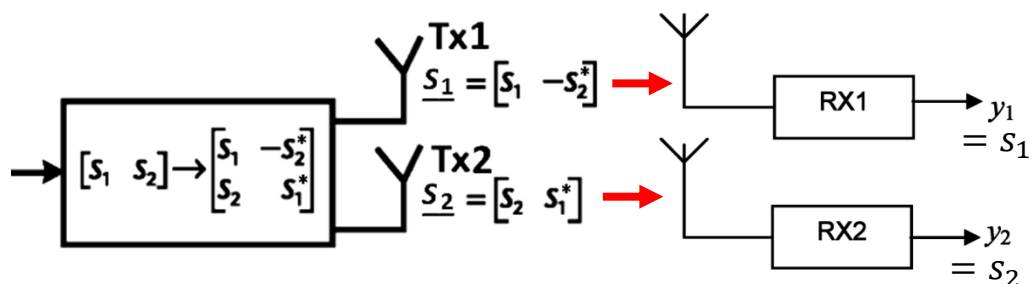
## Sistemas MIMO (Multiple Input Multiple Output)

A formação dos dois percursos “virtuais”, independentes e separados um do outro, que fazem cada antenna RX “ver” uma única e respectiva antenna TX (ver slide 3) é consequência da ortogonalidade hermitiana (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Hermitian\\_matrix](https://en.wikipedia.org/wiki/Hermitian_matrix)) entre cada vetor  $\underline{s}_1 = [s_1 \quad -s_2^*]$  transmitido pela antenna do TX1 e cada vetor  $\underline{s}_2 = [s_2 \quad s_1^*]$  transmitido pela antenna do TX2. Se fizermos o produto escalar entre  $\underline{s}_1$  e  $\underline{s}_2$ , ambos com componentes de valor complexo, obtemos:

$$\underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^H = [s_1 \quad -s_2^*] \begin{bmatrix} s_2 \\ s_1^* \end{bmatrix}^* = [s_1 \quad -s_2^*] \begin{bmatrix} s_2^* \\ s_1 \end{bmatrix} = s_1 s_2^* - s_2^* s_1 = 0 \quad (1)$$

Por exemplo, suponhamos que o sistema seja MIMO-OFDM-16QAM, e que, em um determinado instante, para a  $k$ -ésima portadora de dados das duas IFFTs no TX, tenhamos vindos do *mapper* os símbolos IQ  $s_1 = 1 - j1$  e  $s_2 = 3 + j1$ . O codificador Alamouti forma em sua entrada o vetor  $\underline{s} = [1 - j1 \quad 3 + j1]$  e produz na sua saída os vetores  $\underline{s}_1 = [1 - j1 \quad -(3 + j1)^*]$  e  $\underline{s}_2 = [3 + j1 \quad (1 - j1)^*]$ . Daí, de (1), temos:

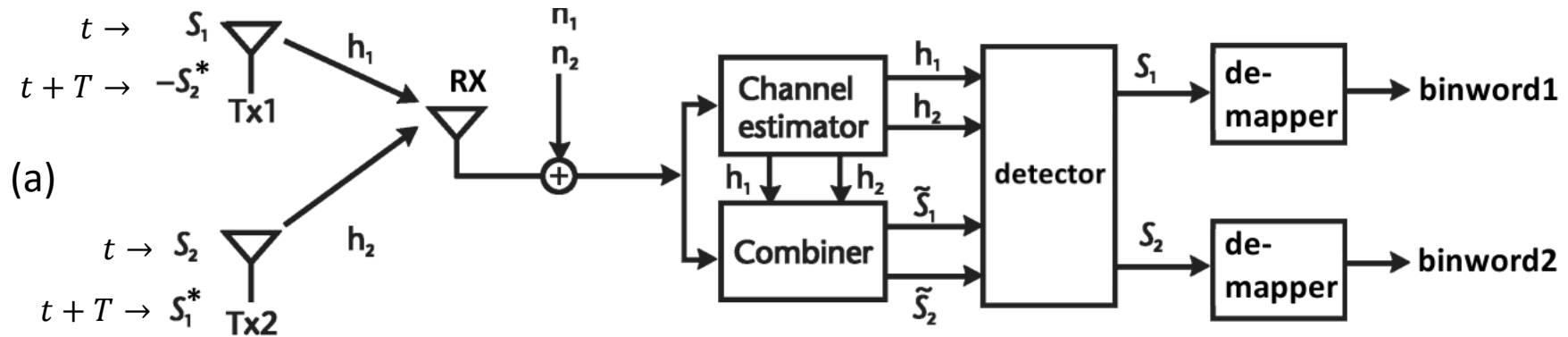
$$\begin{aligned} \underline{s}_1 \cdot \underline{s}_2^H &= [1 - j1 \quad -(3 + j1)^*] \begin{bmatrix} 3 + j1 \\ (1 - j1)^* \end{bmatrix}^* = [1 - j1 \quad -(3 + j1)^*] \begin{bmatrix} (3 + j1)^* \\ 1 - j1 \end{bmatrix} = \\ &= (1 - j1)(3 + j1)^* - (3 + j1)^*(1 - j1) = (1 - j1)(3 - j1) - (3 - j1)(1 - j1) = 0 \end{aligned}$$



Portanto, a ortogonalidade entre cada vetor  $\underline{s}_1 = [s_1 \quad -s_2^*]$  transmitido pela antenna do TX1 e cada respectivo vetor  $\underline{s}_2 = [s_2 \quad s_1^*]$  transmitido pela antenna do TX2 estabelece dois percursos “virtuais” independentes e separados um do outro, que fazem cada antenna RX “ver” uma única e respectiva antenna TX para cada  $k$ -ésima portadora, conforme mostra a figura.

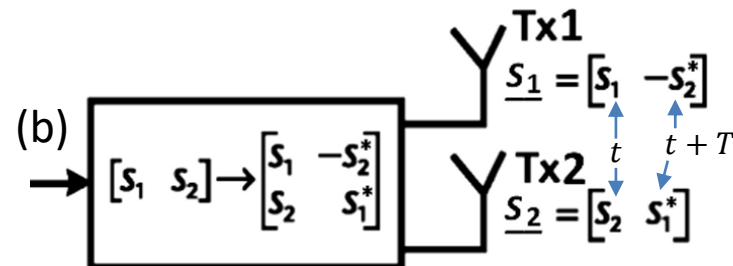
## Decodificador Alamouti 2 x 1

A figura (a) mostra o modelo de um sistema OFDM MIMO 2x1 (2 antenas TX e 1 antena RX) para a  $k$ -ésima portadora demodulada por um decodificador Alamouti 2 x 1 :



O bloco “channel estimator” estima na frequência da  $k$ -ésima portadora o valor  $h_1 = |h_1|e^{j\angle h_1}$  da função de transferência do canal estabelecido entre a antena TX1 e a antena RX a partir dos *scattered pilots* (SPs – ver Cap IX.4 das notas de aula) atribuídos a portadoras SP pares na IFFT do TX1. Simultaneamente, o bloco “channel estimator” estima na frequência da  $k$ -ésima portadora o valor  $h_2 = |h_2|e^{j\angle h_2}$  da função de transferência do canal estabelecido entre a antena TX2 e a antena RX a partir dos *scattered pilots* atribuídos a portadoras SP ímpares na IFFT do TX2. Assume-se que os valores de  $h_1$  e  $h_2$  não alterem significativamente durante o intervalo  $T$  entre os símbolos IQ  $s_1$  e  $s_2$  que formam o vetor  $\underline{s} = [s_1 \ s_2]$  na entrada do codificador Alamouti da  $k$ -ésima portadora das duas IFFTs no TX.

Conforme mostrado em (b), no instante  $t$  a antena TX1 transmite  $s_1$  e a antena TX2 transmite  $s_2$ , que se propagam até a antena RX respectivamente através dos canais  $h_1$  e  $h_2$  mostrados em (a). E conforme mostrado em (b), no instante  $t + T$  a antena TX1 transmite  $-s_2^*$  e a antena TX2 transmite  $s_1^*$ , que se propagam até a antena RX respectivamente através dos canais  $h_1$  e  $h_2$  mostrados em (a). Portanto, de (a), o sinal  $r_1$  recebido na antena RX no instante  $t$  e o sinal  $r_2$  recebido na antena RX no instante  $t + T$  são dados por:



$$r_1 = h_1 s_1 + h_2 s_2 + \eta_1 \quad (2)$$

$$r_2 = -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* + \eta_2 \quad (3)$$

onde  $\eta_1$  e  $\eta_2$  representam o ruído AWGN nos canais  $h_1$  e  $h_2$ .

## Decodificador Alamouti 2 x 1

Para simplificar a análise que segue, vamos supor que a SNR (*Signal To Noise Ratio*) nos canais  $h_1$  e  $h_2$  seja suficientemente alta, de modo que  $\eta_1$  e  $\eta_2$  possam ser desprezados em (3) e (4). Nesta situação, o sinal  $r_1$  recebido na antena RX no instante  $t$  e o sinal  $r_2$  recebido na antena RX no instante  $t + T$  são dados por:

$$t \rightarrow r_1 = h_1 s_1 + h_2 s_2 \quad (4)$$

$$t + T \rightarrow r_2 = -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* \quad (5)$$

Note que se quisermos detectar quais símbolos IQ  $s_1$  e  $s_2$  foram transmitidos a partir de  $r_1$  e  $r_2$  recebidos, podemos testar todas as possíveis combinações de pares de símbolos  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  ordenadamente retirados do alfabeto A da modulação até que  $h_1 \hat{s}_1 + h_2 \hat{s}_2$  em (4) resulte o mais próximo de  $r_1$  recebido no instante  $t$  e simultaneamente até que  $-h_1 \hat{s}_2^* + h_2 \hat{s}_1^*$  em (5) resulte o mais próximo de  $r_2$  recebido no instante  $t + T$ , ou, equivalentemente, até que  $|r_1 - h_1 \hat{s}_1 - h_2 \hat{s}_2|^2 + |r_2 + h_1 \hat{s}_2^* - h_2 \hat{s}_1^*|^2 \cong 0$ . O par  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  que minimiza  $|r_1 - h_1 \hat{s}_1 - h_2 \hat{s}_2|^2 + |r_2 + h_1 \hat{s}_2^* - h_2 \hat{s}_1^*|^2$  é considerado ser o par  $(s_1, s_2)$  transmitido. Em outras palavras, o método de detecção deve contemplar o fato de que os símbolos IQ  $s_1$  e  $s_2$  são transmitidos pelo TX em um único “pacote” de informação representado pelo vetor  $\underline{s} = [s_1 \ s_2]$ , e, portanto, a detecção no RX também precisa ser efetuada por “pacote” de informação. Este método, que efetua a detecção por máxima verossimilhança (MLD - *maximum likelihood decoder*) simultânea entre  $(s_1, s_2)$  transmitido e  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  estimado no detector, é matematicamente expresso através de (6), abaixo.

$$[\hat{s}_1 \ \hat{s}_2] = \arg \min_{(\hat{s}_1 \in A, \hat{s}_2 \in A)} (|r_1 - h_1 \hat{s}_1 - h_2 \hat{s}_2|^2 + |r_2 + h_1 \hat{s}_2^* - h_2 \hat{s}_1^*|^2) \quad (6)$$

Os argumentos  $\hat{s}_1$  e  $\hat{s}_2$  no lado direito de (6) representam um par  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  de símbolos IQ, com  $\hat{s}_1$  e  $\hat{s}_2$  sendo ordenadamente retirados do alfabeto A da modulação, de modo que para uma modulação com  $M$  símbolos IQ no alfabeto A existem  $M \times M = M^2$  pares de símbolos  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$ . Dado os sinais  $r_1$  e  $r_2$  recebidos, cada um destes  $M^2$  pares  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  é usado como argumento da expressão (6), e para cada par é determinado o resultado de  $|r_1 - h_1 \hat{s}_1 - h_2 \hat{s}_2|^2 + |r_2 + h_1 \hat{s}_2^* - h_2 \hat{s}_1^*|^2$ . O par  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  que, dentre os  $M^2$  pares, resultar no menor valor para  $|r_1 - h_1 \hat{s}_1 - h_2 \hat{s}_2|^2 + |r_2 + h_1 \hat{s}_2^* - h_2 \hat{s}_1^*|^2$  é considerado como o vetor  $\underline{s} = [s_1 \ s_2]$  transmitido.

Note que este método “força bruta” é inviável ser implementado em hardware e em tempo real para modulações com alfabeto A extenso, como 256-QAM, cujo alfabeto A contempla  $M = 256$  símbolos IQ, e, portanto, seria necessário testar em (6)  $M^2 = 65.536$  pares  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  para cada par de símbolos  $(s_1, s_2)$  transmitido. Isto resulta em uma elevada (e desnecessária) complexidade computacional no bloco “detector” do RX (ver figura (a) no slide anterior).



## Decodificador Alamouti 2 x 1

A solução para a alta complexidade computacional de (6) foi proposta por Alamouti (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Siavash\\_Alamouti](https://en.wikipedia.org/wiki/Siavash_Alamouti)), e consiste em, partindo de (6), desacoplar o processo de detecção por máxima verossimilhança dos símbolos  $s_1$  e  $s_2$  transmitidos, conforme desenvolvimento analítico no Apêndice A. O resultado do desenvolvimento no Apêndice A é um processo de detecção por verossimilhança (ML - *maximum likelihood*) em que os símbolos  $s_1$  e  $s_2$  transmitidos são detectados simultaneamente mas de forma independente um do outro, conforme segue:

$$\hat{s}_1 = \arg \min_{(\hat{s}_1 \in \mathcal{A})} \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_1|^2 + d^2(\tilde{s}_1, \hat{s}_1)\} \quad (7)$$

onde

$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_1 + h_2 r_2^* \quad (8)$$

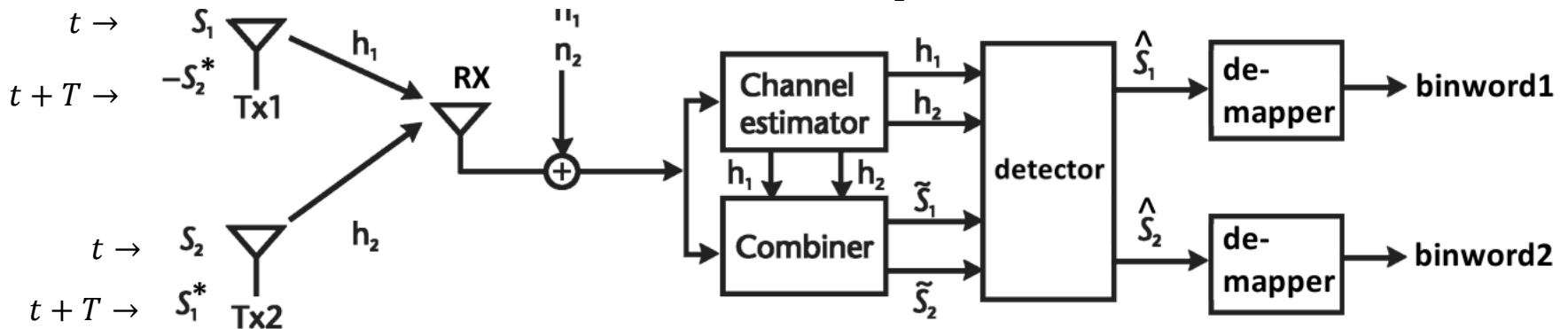
é o sinal na saída do bloco “Combiner”, conforme mostra a figura abaixo, que é a pré-estimativa para o valor de  $\hat{s}_1$  que maximiza a potência do sinal  $s_1$  em  $r_1$  dado por (4) e em  $r_2$  dado por (5). O valor de  $\tilde{s}_1$  é algebricamente definido no desenvolvimento analítico no slide 22 do Apêndice A. Em (7) e em (9)  $d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^* = (z_1 - z_2)(z_1^* - z_2^*)$  é o operador que retorna o quadrado da distância Euclidiana  $|z_1 - z_2|^2$  entre dois números complexos  $z_1$  e  $z_2$ .

$$\hat{s}_2 = \arg \min_{(\hat{s}_2 \in \mathcal{A})} \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_2|^2 + d^2(\tilde{s}_2, \hat{s}_2)\} \quad (9)$$

onde

$$\tilde{s}_2 = h_2^* r_1 - h_1 r_2^* \quad (10)$$

é o sinal na saída do bloco “Combiner”, conforme mostra a figura abaixo, que é a pré-estimativa para o valor de  $\hat{s}_2$  que maximiza a potência do sinal  $s_2$  em  $r_1$  dado por (4) e em  $r_2$  dado por (5). O valor de  $\tilde{s}_2$  é algebricamente definido de maneira similar ao desenvolvimento analítico no slide 22 feito para  $\tilde{s}_1$ .



## Decodificador Alamouti 2 x 1

Note que o bloco “detector” na figura abaixo testa todos os  $M$  símbolos IQ do alfabeto A da modulação, “experimentando” cada um dos  $M$  símbolos no argumento  $\hat{s}_1$  no lado direito da expressão (7). O  $\hat{s}_1$  que minimiza  $(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_1|^2 + d^2(\tilde{s}_1, \hat{s}_1)$  é identificado como o símbolo  $s_1$  transmitido.

$$\hat{s}_1 = \arg \min_{(\hat{s}_1 \in A)} \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_1|^2 + d^2(\tilde{s}_1, \hat{s}_1)\} \quad (7)$$

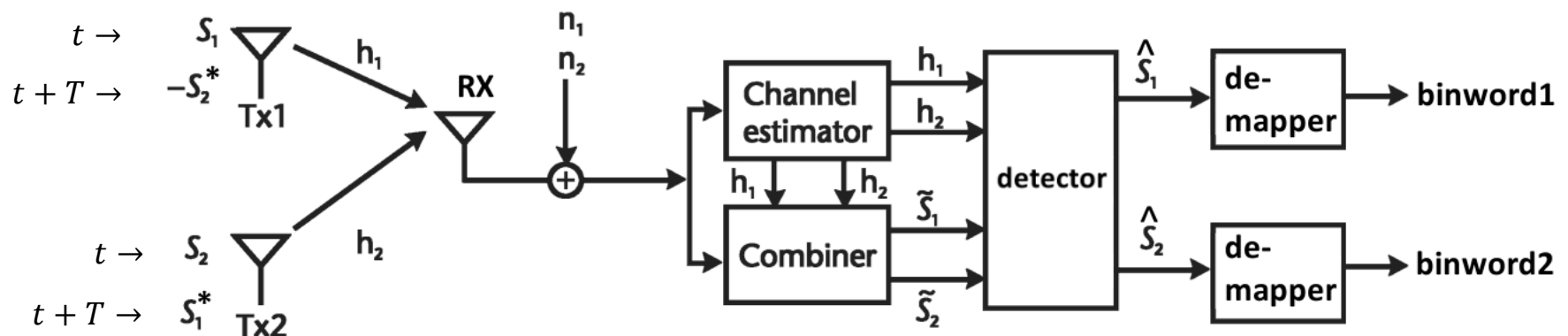
$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_1 + h_2 r_2^* \quad (8)$$

onde  $d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^* = (z_1 - z_2)(z_1^* - z_2^*)$ .

De mesma forma, o bloco “detector” na figura abaixo testa todos os  $M$  símbolos IQ do alfabeto A da modulação, “experimentando” cada um dos  $M$  símbolos no argumento  $\hat{s}_2$  no lado direito da expressão (9). O  $\hat{s}_2$  que minimiza  $(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_2|^2 + d^2(\tilde{s}_2, \hat{s}_2)$  é identificado como o símbolo  $s_2$  transmitido.

$$\hat{s}_2 = \arg \min_{(\hat{s}_2 \in A)} \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_2|^2 + d^2(\tilde{s}_2, \hat{s}_2)\} \quad (9)$$

$$\tilde{s}_2 = h_2^* r_1 - h_1 r_2^* \quad (10)$$



## Decodificador Alamouti 2 x 1

Note a redução da complexidade apresentada pelo detetor por máxima verossimilhança (ML - *maximum likelihood*) de Alamouti: No método “força bruta” da equação (6), para uma modulação  $M$ -QAM com  $M = 256$  símbolos, era necessário testar em (6)  $M^2 = 65.536$  pares  $(\hat{s}_1, \hat{s}_2)$  do alfabeto  $A$  para detectar  $(s_1, s_2)$  transmitido. No detetor de Alamouti, representado pelas equações (7) e (9), novamente reproduzidas abaixo, são necessários testar apenas  $M = 256$  símbolos do alfabeto  $A$  em cada uma das equações, que são desacopladas e independentes. Este desacoplamento é uma vantagem adicional porque as equações podem ser implementadas em lógica programável (FPGA) de modo a serem executadas em paralelo, reduzindo o tempo de processamento.

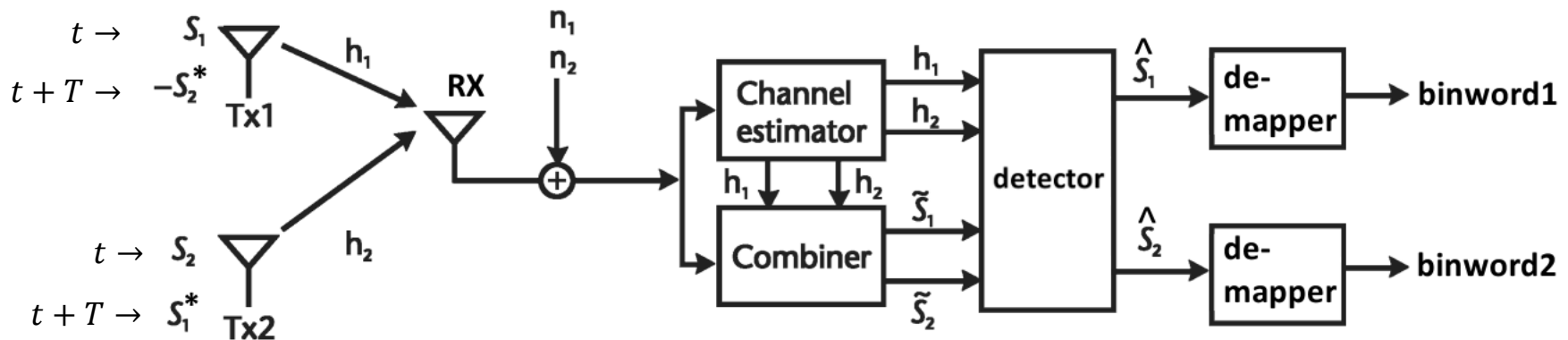
$$\hat{s}_1 = \arg \min_{(\hat{s}_1 \in A)} \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_1|^2 + d^2(\tilde{s}_1, \hat{s}_1)\} \quad (7)$$

$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_1 + h_2 r_2^* \quad (8)$$

$$\hat{s}_2 = \arg \min_{(\hat{s}_2 \in A)} \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 - 1) |\hat{s}_2|^2 + d^2(\tilde{s}_2, \hat{s}_2)\} \quad (9)$$

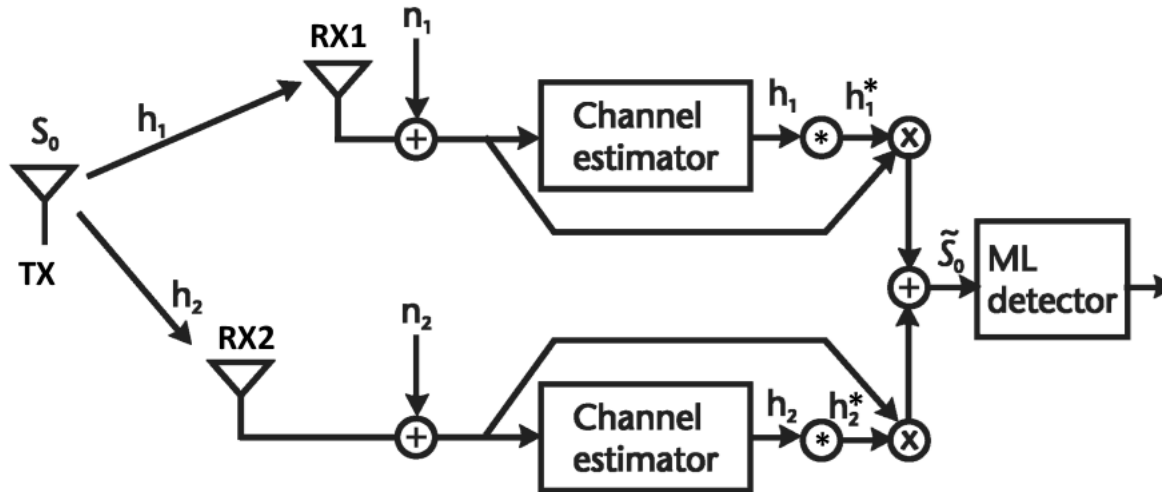
$$\tilde{s}_2 = h_2^* r_1 - h_1 r_2^* \quad (10)$$

onde  $d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^* = (z_1 - z_2)(z_1^* - z_2^*)$



## Decodificador MRC 1 x 2 (*maximum ratio combiner*)

A figura mostra o modelo de um sistema OFDM MIMO 1x2 (1 antena TX e 2 antenas RX) para a  $k$ -ésima portadora demodulada por um decodificador MRC (*maximum ratio combiner*):



Dado que há somente uma única antena TX, o decodificador MRC simplesmente combina os sinais recebidos pelas antenas RX1 e RX2 de modo a maximizar a potência do sinal resultante da combinação em relação a potência de ruído, maximizando assim a SNR (*Signal To Noise Ratio*) na entrada do detetor ML (ML - *maximum likelihood*):

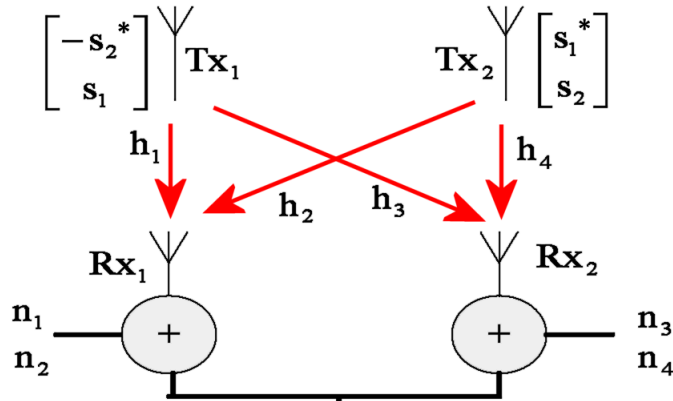
$$r_1 = h_1 s_0 + \eta_1 \quad (11)$$

$$r_2 = h_2 s_0 + \eta_2 \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tilde{s}_0 &= h_1^* r_1 + h_2^* r_2 = h_1 h_1^* s_0 + h_1^* \eta_1 + h_2^* h_2 s_0 + h_2^* \eta_2 = \\ &= |h_1|^2 s_0 + |h_2|^2 s_0 + h_1^* \eta_1 + h_2^* \eta_2 = \underbrace{(|h_1|^2 + |h_2|^2)}_{\text{maximiza a potência do sinal}} s_0 + h_1^* \eta_1 + h_2^* \eta_2 \end{aligned} \quad (13)$$

## Decodificador Alamouti 2 x 2

A figura mostra o modelo de um sistema OFDM MIMO 2x2 (2 antenas TX e 2 antenas RX) para a  $k$ -ésima portadora demodulada por um decodificador Alamouti 2 x 2. Os sinais recebidos nas antenas RX1 e RX2 são:

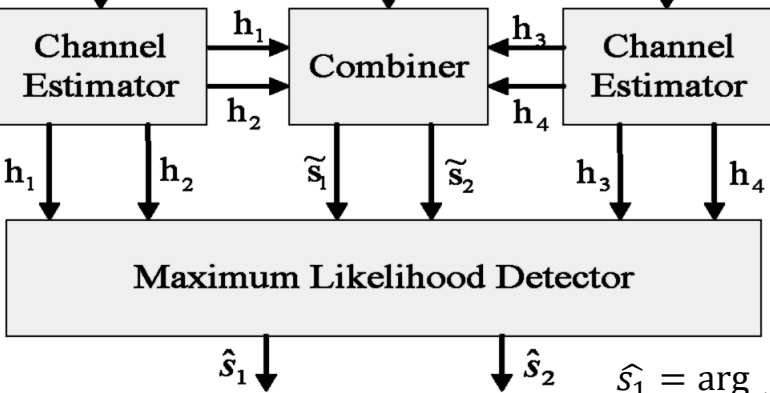


$$\text{RX1} \begin{cases} t \rightarrow r_1 = h_1 s_1 + h_2 s_2 + \eta_1 & (14) \\ t + T \rightarrow r_2 = -h_1 s_2^* + h_2 s_1^* + \eta_2 & (15) \end{cases}$$

$$\text{RX2} \begin{cases} t \rightarrow r_3 = h_3 s_1 + h_4 s_2 + \eta_3 & (16) \\ t + T \rightarrow r_4 = -h_3 s_2^* + h_4 s_1^* + \eta_4 & (17) \end{cases}$$

Note que o decodificador Alamouti 2x2 é o decodificador Alamouti 2x1 visto nos slides anteriores com a antena RX duplicada.

Portanto, o equacionamento do decodificador Alamouti 2x2 é basicamente derivado das equações que descrevem o decodificador Alamouti 2x1, conforme segue:



$$\hat{s}_1 = \arg \min_{(\hat{s}_1 \in \mathcal{A})} \{ (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2 - 1) |\hat{s}_1|^2 + d^2(\tilde{s}_1, \hat{s}_1) \} \quad (18)$$

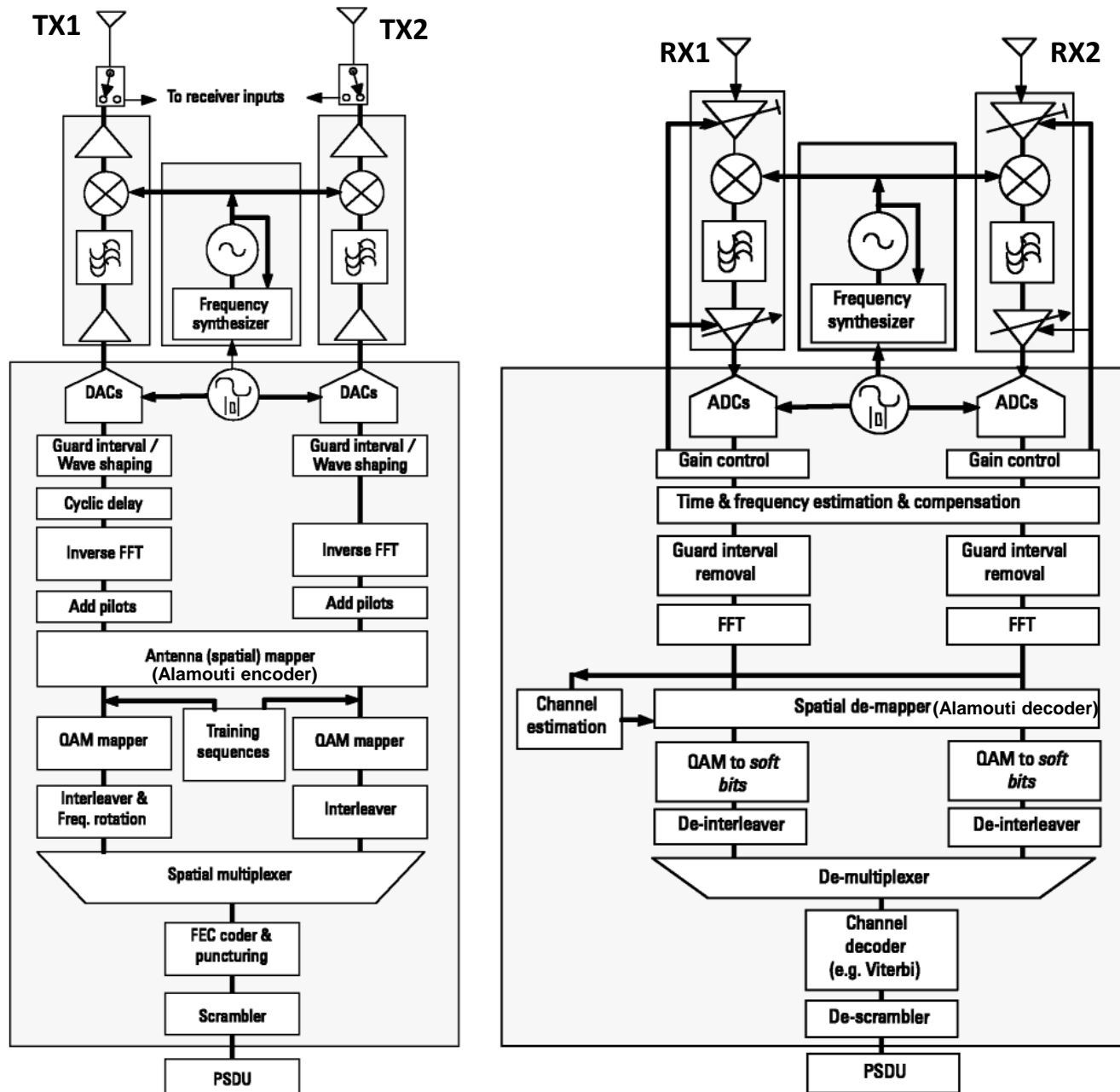
$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_1 + h_2 r_2^* + h_3^* r_3 + h_4 r_4^* \quad (19)$$

$$\hat{s}_2 = \arg \min_{(\hat{s}_2 \in \mathcal{A})} \{ (|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2 - 1) |\hat{s}_2|^2 + d^2(\tilde{s}_2, \hat{s}_2) \} \quad (20)$$

$$\tilde{s}_2 = h_2^* r_1 - h_1 r_2^* + h_4^* r_3 - h_3 r_4^* \quad (21)$$

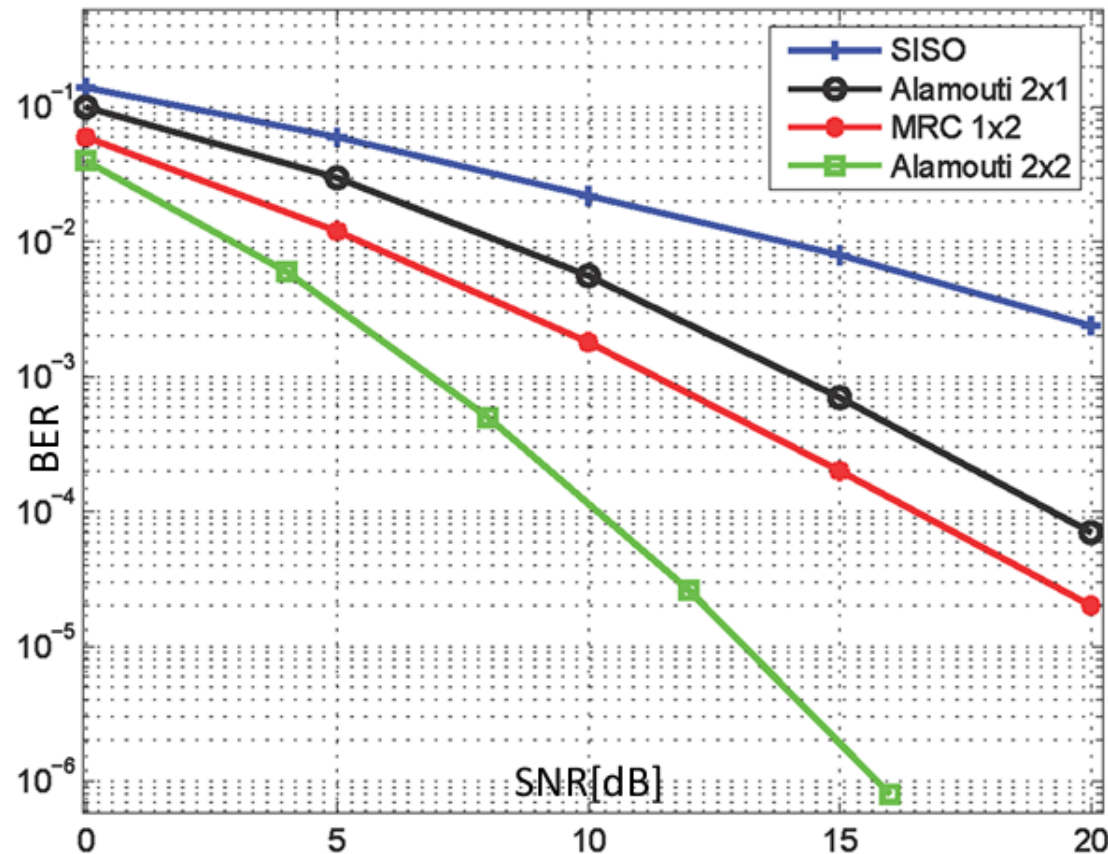
$$\text{onde } d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^* = (z_1 - z_2)(z_1^* - z_2^*)$$

## Diagrama de blocos de um sistema TX-RX OFDM-MIMO Alamouti 2 x 2



## Comparação de desempenho

O gráfico abaixo mostra as curvas de desempenho BER x SNR (*Bit Error Rate x Signal to Noise Ratio*) medidas na saída de *de-mapper* para um sistema OFDM com portadoras de dados moduladas por símbolos IQ QPSK (ver Cap VIII.1 das notas de aula). O modelo de canal é Rayleigh, que representa a situação de operação móvel em um ambiente de multipercurso urbano, em que não há percurso direto (na antena RX incidem apenas ondas refletidas nas estruturas metálicas urbanas) e a sequência de desvanecimentos de sinal ocorre em toda a banda ao longo da operação móvel, com a amplitude do sinal obedecendo à distribuição estatística de Rayleigh (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh\\_fading](https://en.wikipedia.org/wiki/Rayleigh_fading)). O gráfico compara o desempenho de um sistema SISO (*Single Input Single Output*), i.e., um sistema com uma antena TX e uma antena RX, com os sistemas MIMO Alamouti 2x1, MRC 1x2 e Alamouti 2x2 que discutimos nos slides anteriores.



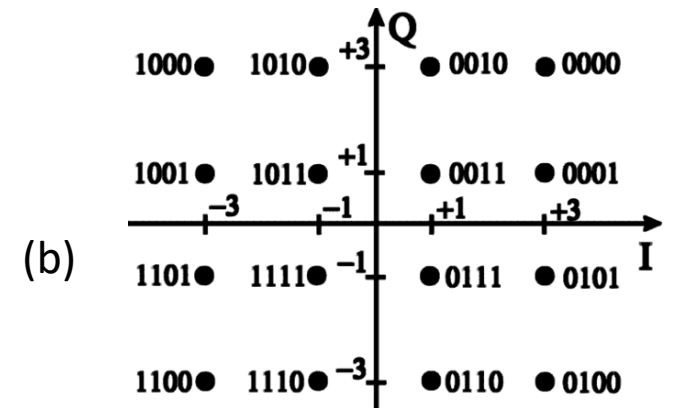
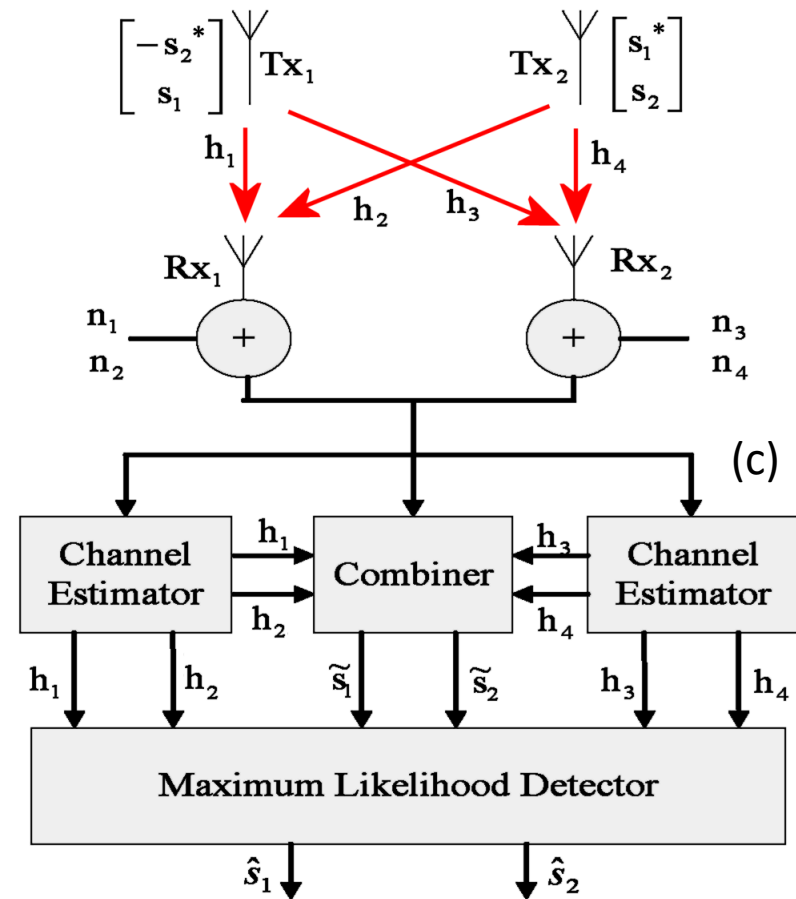
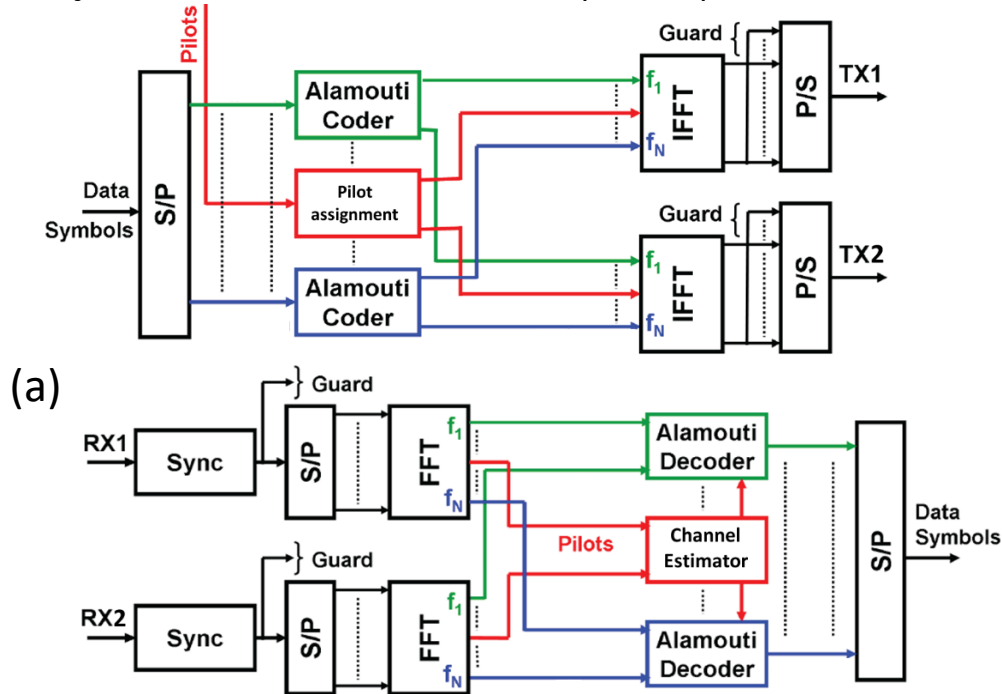
Note a significativa melhora de desempenho do sistema Alamouti 2x1 em relação ao clássico sistema SISO 1x1. Por exemplo, para SNR=10dB o sistema SISO apresenta uma BER=  $2 \times 10^{-2}$  e o sistema Alamouti 2x1 apresenta uma BER=  $1 \times 10^{-4}$  (uma melhora de desempenho de quase duas ordens de grandeza pelo simples acréscimo de uma antena no TX e de uma antena no RX!).

O sistema 5G, em implantação, adota a técnica denominada *Massive MIMO*, com dezenas de antenas no TX e dezenas de antenas no RX, sendo esperado um aumento da taxa de transmissão da ordem de 50 vezes em relação ao sistema 4G-LTE (ver <https://5g.co.uk/guides/what-is-massive-mimo-technology/>).

## Exemplo

A figura (a) mostra o diagrama de blocos simplificado de um sistema TX-RX OFDM-MIMO Alamouti 2x2 com modulação 16-QAM conforme mapa em (b). Em (c) é mostrado o diagrama de fluxo de sinal do decodificador Alamouti 2x2 para a  $k$ -ésima portadora. Os sinais recebidos no RX1 em (c) nos instantes  $t$  e  $t + T$  são respectivamente  $r_1 = 1.24 + j0.076$  e  $r_2 = -0.543 - j3.206$ . Os sinais recebidos no RX2 em (c) nos instantes  $t$  e  $t + T$  são respectivamente  $r_3 = -1.9 + j0.301$  e  $r_4 = 1.112 + j2.525$ . Para esta  $k$ -ésima portadora o *channel estimator* determinou as funções de transferência  $h_1 = 1.0e^{j60^\circ}$ ,  $h_2 = 0.1e^{-j95^\circ}$ ,  $h_3 = 0.95e^{-j135^\circ}$  e  $h_4 = 0.2e^{j170^\circ}$ .

**Pede-se:** Determine as palavras binárias na saída do *mapper* no TX que foram respectivamente transmitidas nos instantes  $t$  e  $t + T$ , onde  $T$  é a duração do símbolo IQ associado à respectiva palavra binária.





## Exemplo

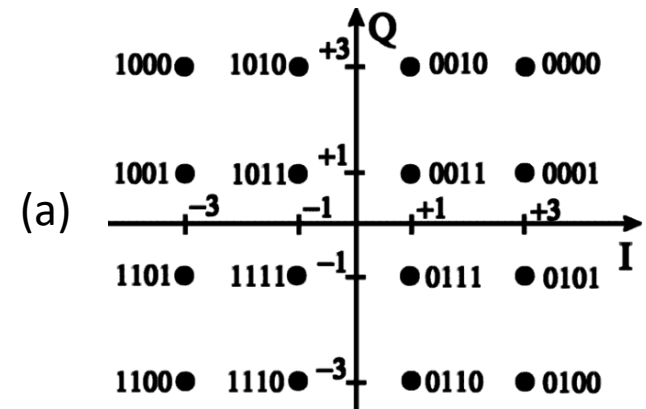
**Solução** - Determinando as saídas do *combiner* através das equações (19) e (21):

$$\tilde{s}_1 = h_1^* r_1 + h_2^* r_2^* + h_3^* r_3 + h_4^* r_4^* = 1.953 - j1.953$$

$$\tilde{s}_2 = h_2^* r_1 - h_1^* r_2^* + h_4^* r_3 - h_3^* r_4^* = 5.857 - j1.953$$

Para detectar o símbolo  $s_1$  transmitido através da equação (18) é necessário testar cada um dos  $M = 16$  símbolos IQ no mapa (a) no argumento  $\hat{s}_1$  da expressão  $\text{Eval1} = \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2 - 1) |\hat{s}_1|^2 + d^2(\tilde{s}_1, \hat{s}_1)\}$ . O símbolo IQ  $\hat{s}_1$  que minimiza o valor Eval1 é identificado como o símbolo  $s_1$  transmitido. Determinando Eval1 para cada um dos  $M = 16$  símbolos IQ no mapa (a):

	0
0	66.2
1	42.77
2	34.96
3	42.77
4	42.77
5	19.34
6	11.53
7	19.34
8	34.96
9	11.53
10	3.72
11	11.53
12	42.77
13	19.34
14	11.53
15	19.34



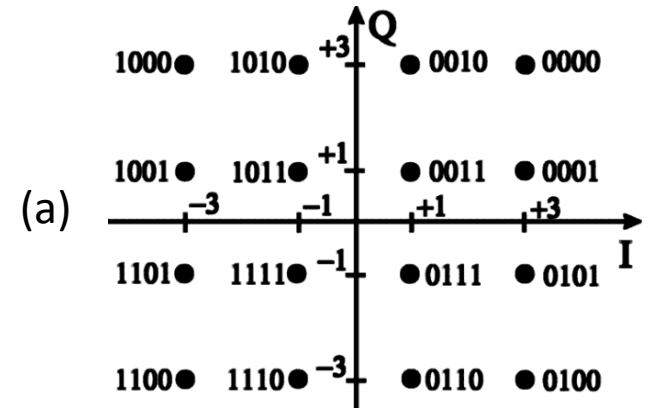
O símbolo IQ de índice 10 no mapa (lendo o mapa da esquerda para a direita e de cima para baixo, iniciando do índice 0) é o que resulta no menor valor (3.72) para Eval1. A posição de índice 10 no mapa corresponde ao símbolo IQ  $1 - j1$  que é mapeado na palavra binária "0111".

onde  $d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2$

## Exemplo

Para detectar o símbolo  $s_2$  transmitido através da equação (20) é necessário testar cada um dos  $M = 16$  símbolos IQ no mapa (a) no argumento  $\hat{s}_2$  da expressão  $Eval2 = \{(|h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_3|^2 + |h_4|^2 - 1) |\hat{s}_2|^2 + d^2(\tilde{s}_2, \hat{s}_2)\}$ . O símbolo IQ  $\hat{s}_2$  que minimiza o valor Eval2 é identificado como o símbolo  $s_2$  transmitido. Determinando Eval2 para cada um dos  $M = 16$  símbolos IQ no mapa (a):

	0
0	120.128
1	81.078
2	57.648
3	49.838
4	96.698
5	57.648
6	34.218
7	26.408
8	88.888
9	49.838
10	26.408
11	18.598
12	96.698
13	57.648
14	34.218
15	26.408



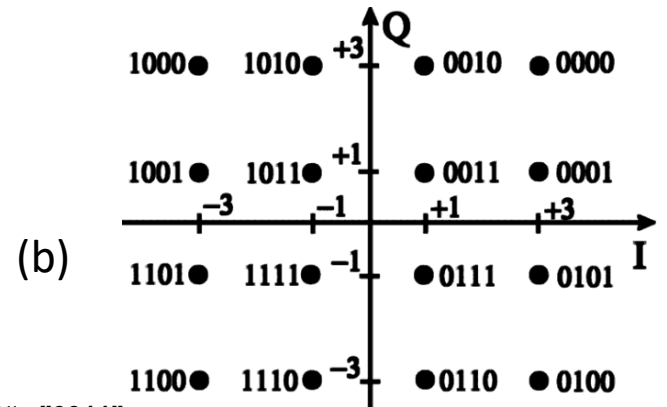
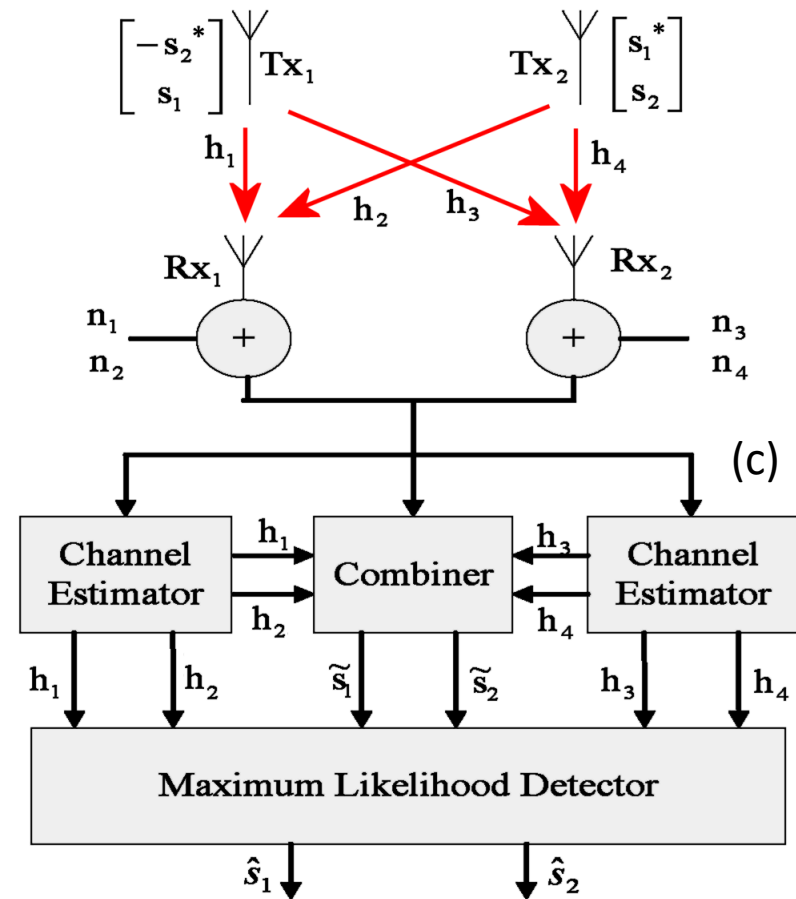
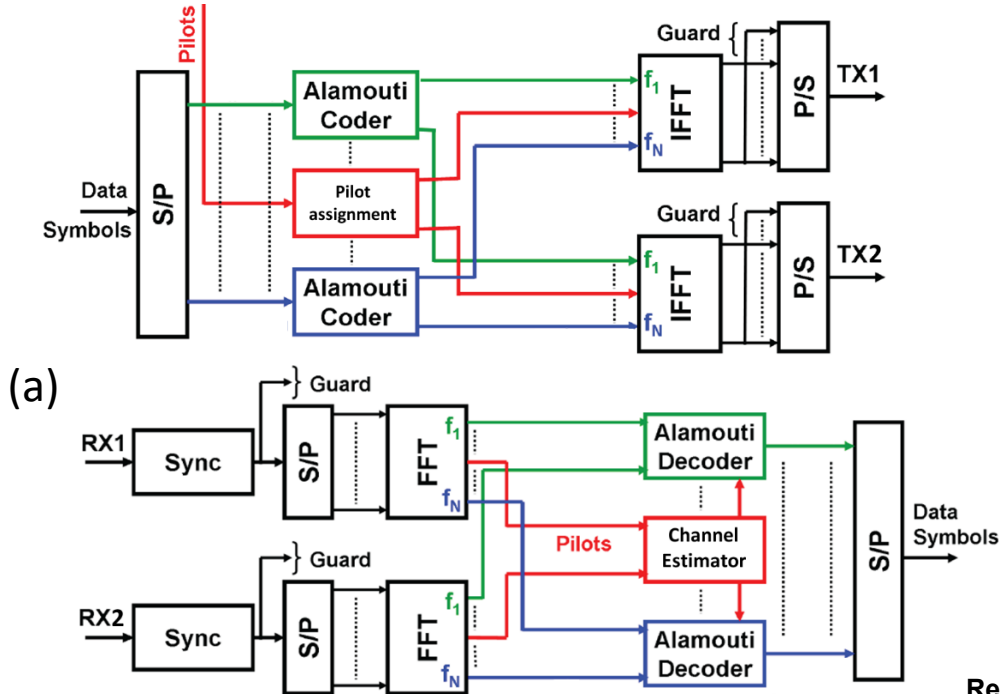
O símbolo IQ de índice 11 no mapa (lendo o mapa da esquerda para a direita e de cima para baixo, iniciando do índice 0) é o que resulta no menor valor (18.598) para Eval2. A posição de índice 11 no mapa corresponde ao símbolo IQ  $3 - j1$  que é mapeado na palavra binária "0101".

onde  $d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2$

## Homework

A figura (a) mostra o diagrama de blocos simplificado de um sistema TX-RX OFDM-MIMO Alamouti 2x2 com modulação 16-QAM conforme mapa em (b). Em (c) é mostrado o diagrama de fluxo de sinal do decodificador Alamouti 2x2 para a  $k$ -ésima portadora. Os sinais recebidos no RX1 em (c) nos instantes  $t$  e  $t + T$  são respectivamente  $r_1 = 2.523 - j2.379$  e  $r_2 = -0.266 + j1.351$ . Os sinais recebidos no RX2 em (c) nos instantes  $t$  e  $t + T$  são respectivamente  $r_3 = -3.421 - j0.217$  e  $r_4 = 0.355 + j0.175$ . Para esta  $k$ -ésima portadora o *channel estimator* determinou as funções de transferência  $h_1 = 1.0e^{j20^\circ}$ ,  $h_2 = 0.4e^{-j35^\circ}$ ,  $h_3 = 0.95e^{-j105^\circ}$  e  $h_4 = 0.3e^{j140^\circ}$ .

**Pede-se:** Determine as palavras binárias na saída do *mapper* no TX que foram respectivamente transmitidas nos instantes  $t$  e  $t + T$ , onde  $T$  é a duração do símbolo IQ associado à respectiva palavra binária.



Resposta: "0110" e "0011"

## Apêndice A – Dedução do detetor ML (*maximum likelihood*) de Alamouti

Partindo da métrica minimizada através da equação (6), temos:

**Defs & propriedades:**

$$(|r_1 - h_1 \cdot s_1 - h_2 \cdot s_2|)^2 + (|r_2 + h_1 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{s}_1|)^2$$

$$\bar{a} = a^* \text{ (a conjugado)}$$

$$(r_1 - h_1 \cdot s_1 - h_2 \cdot s_2) \cdot \overline{(r_1 - h_1 \cdot s_1 - h_2 \cdot s_2)} + (r_2 + h_1 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{s}_1) \cdot \overline{(r_2 + h_1 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{s}_1)}$$

$$\overline{(a \cdot b)} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{(a + b)} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$(r_1 - h_1 \cdot s_1 - h_2 \cdot s_2) \cdot (\bar{r}_1 - \bar{h}_1 \cdot \bar{s}_1 - \bar{h}_2 \cdot \bar{s}_2) + (r_2 + h_1 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{s}_1) \cdot (\bar{r}_2 + \bar{h}_1 \cdot \bar{s}_2 - \bar{h}_2 \cdot \bar{s}_1)$$

$$a \cdot \bar{a} = (|a|)^2$$

$$r_1 \cdot \bar{r}_1 + r_2 \cdot \bar{r}_2 - r_1 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{h}_1 - r_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{h}_2 + h_1 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_1 - s_1 \cdot h_1 \cdot \bar{r}_1 - r_2 \cdot s_1 \cdot \bar{h}_2 + r_2 \cdot s_2 \cdot \bar{h}_1 - s_2 \cdot h_2 \cdot \bar{r}_1 + s_1 \cdot h_1 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{h}_1 \dots \\ + s_1 \cdot h_2 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{h}_2 + s_2 \cdot h_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{h}_1 + s_2 \cdot h_2 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{h}_2$$

$$(|r_1|)^2 + (|r_2|)^2 - r_1 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{h}_1 - r_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{h}_2 + h_1 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_1 - s_1 \cdot h_1 \cdot \bar{r}_1 - r_2 \cdot s_1 \cdot \bar{h}_2 + r_2 \cdot s_2 \cdot \bar{h}_1 - s_2 \cdot h_2 \cdot \bar{r}_1 \dots \\ + (|s_1|)^2 \cdot (|h_1|)^2 + (|s_1|)^2 \cdot (|h_2|)^2 + (|s_2|)^2 \cdot (|h_1|)^2 + (|s_2|)^2 \cdot (|h_2|)^2$$

$$\left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_1|)^2 + (|r_1|)^2 + (|r_2|)^2 + (|s_2|)^2 \cdot (|h_1|)^2 + (|s_2|)^2 \cdot (|h_2|)^2 - r_1 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{h}_1 - r_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{h}_2 \dots \\ + h_1 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_1 - s_1 \cdot h_1 \cdot \bar{r}_1 - r_2 \cdot s_1 \cdot \bar{h}_2 + r_2 \cdot s_2 \cdot \bar{h}_1 - s_2 \cdot h_2 \cdot \bar{r}_1$$

$$\left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_2|)^2 + (|r_1|)^2 + (|r_2|)^2 + \left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_1|)^2 - r_1 \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{h}_1 - r_1 \cdot \bar{s}_2 \cdot \bar{h}_2 \dots \\ + h_1 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_2 - h_2 \cdot \bar{r}_2 \cdot \bar{s}_1 - s_1 \cdot h_1 \cdot \bar{r}_1 - r_2 \cdot s_1 \cdot \bar{h}_2 + r_2 \cdot s_2 \cdot \bar{h}_1 - s_2 \cdot h_2 \cdot \bar{r}_1$$

## Apêndice A – Dedução do detetor ML (*maximum likelihood*) de Alamouti

$$\begin{aligned} & \left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_1|)^2 - r_1 \cdot \overline{s_1} \cdot \overline{h_1} - h_2 \cdot \overline{r_2} \cdot \overline{s_1} - s_1 \cdot h_1 \cdot \overline{r_1} - r_2 \cdot s_1 \cdot \overline{h_2} \dots \\ & + \left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_2|)^2 - r_1 \cdot \overline{s_2} \cdot \overline{h_2} + h_1 \cdot \overline{r_2} \cdot \overline{s_2} + r_2 \cdot s_2 \cdot \overline{h_1} - s_2 \cdot h_2 \cdot \overline{r_1} \dots \\ & + (|r_1|)^2 + (|r_2|)^2 \end{aligned}$$

O detetor MLD busca encontrar  $s_1$  e  $s_2$  na constelação de referência tal que a expressão acima seja minimizada. Para tanto basta minimizar de forma independente as duas seguintes expressões (foi desprezado o termo  $|r_1|^2 + |r_2|^2$  pois não é afetado pela busca dos símbolos  $s_1$  e  $s_2$  na constelação de referência):

$$\left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_1|)^2 - r_1 \cdot s_1^* \cdot h_1^* - h_2 \cdot r_2^* \cdot s_1^* - s_1 \cdot h_1 \cdot r_1^* - r_2 \cdot s_1 \cdot h_2^* \rightarrow \text{o MLD varre a constelação de referência buscando achar o valor para o símbolo } s_1 \text{ que minimiza o módulo do número complexo resultante desta expressão}$$

$$\left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_2|)^2 - r_1 \cdot s_2^* \cdot h_2^* + h_1 \cdot r_2^* \cdot s_2^* + r_2 \cdot s_2 \cdot h_1^* - s_2 \cdot h_2 \cdot r_1^* \rightarrow \text{o MLD varre a constelação de referência buscando achar o valor para o símbolo } s_2 \text{ que minimiza o módulo do número complexo resultante desta expressão}$$

## Apêndice A – Dedução do detetor ML (*maximum likelihood*) de Alamouti

Uma simplificação adicional pode ser obtida para efeito de o MLD varrer a constelação de referência buscando achar o valor para o símbolo  $s_1$  (e  $s_2$ ) que minimiza o módulo do número complexo resultante das duas equações anteriores.

Façamos a dedução da simplificação para a equação abaixo, a qual terá o módulo do número complexo resultante minimizado em função de  $s_1$ :

$$\left[ (|h_1|)^2 + (|h_2|)^2 \right] \cdot (|s_1|)^2 - r_1 \cdot \overline{s_1} \cdot \overline{h_1} - h_2 \cdot \overline{r_2} \cdot \overline{s_1} - s_1 \cdot h_1 \cdot \overline{r_1} - r_2 \cdot s_1 \cdot \overline{h_2}$$

Analisemos na equação acima o termo  $-r_1 \cdot \overline{s_1} \cdot \overline{h_1} - h_2 \cdot \overline{r_2} \cdot \overline{s_1} - s_1 \cdot h_1 \cdot \overline{r_1} - r_2 \cdot s_1 \cdot \overline{h_2}$

Este termo pode ser colocado na seguinte forma:

$$(-h_1 \cdot \overline{r_1} - r_2 \cdot \overline{h_2}) \cdot s_1 - (r_1 \cdot \overline{h_1} \cdot \overline{s_1} + h_2 \cdot \overline{r_2} \cdot \overline{s_1})$$

$$(-r_1 \cdot \overline{h_1} - h_2 \cdot \overline{r_2}) \cdot \overline{s_1} - s_1 \cdot (h_1 \cdot \overline{r_1} + r_2 \cdot \overline{h_2})$$

$$-\overline{s_1} \cdot (r_1 \cdot \overline{h_1} + h_2 \cdot \overline{r_2}) - s_1 \cdot (h_1 \cdot \overline{r_1} + r_2 \cdot \overline{h_2})$$

$$-\overline{s_1} \cdot (r_1 \cdot \overline{h_1} + h_2 \cdot \overline{r_2}) - \overline{[s_1 \cdot (h_1 \cdot \overline{r_1} + r_2 \cdot \overline{h_2})]}$$

mas  $r_1 \cdot \overline{h_1} + h_2 \cdot \overline{r_2} = s_{1c}$  sendo  $s_{1c} = \tilde{\mathbf{s}}_1 \rightarrow$  saída  $\tilde{\mathbf{s}}_1$  do combiner (ver slide (7) figura (a))

E daí o termo em análise simplifica para a forma:

$$-\overline{s_1} \cdot s_{1c} - \overline{(s_1 \cdot s_{1c})}$$

$$-\overline{s_1} \cdot s_{1c} - s_1 \cdot \overline{s_{1c}}$$

## Apêndice A – Dedução do detetor ML (*maximum likelihood*) de Alamouti

E daí o termo em análise simplifica para a forma:

$$\frac{-\overline{s1} \cdot s1c - \overline{(s1 \cdot s1c)}}{-\overline{s1} \cdot s1c - s1 \cdot \overline{s1c}}$$

mas

$$(|s1 - s1c|)^2 = (s1 - s1c) \cdot \overline{(s1 - s1c)} = (s1 - s1c) \cdot (\overline{s1} - \overline{s1c}) = s1 \cdot \overline{s1} - s1 \cdot \overline{s1c} - s1c \cdot \overline{s1} + s1c \cdot \overline{s1c} = (|s1|)^2 + (|s1c|)^2 - s1 \cdot \overline{s1c} - s1c \cdot \overline{s1}$$

Daí o termo em análise pode ser escrito como

$$(|s1 - s1c|)^2 - [(|s1|)^2 + (|s1c|)^2]$$

Portanto, a equação a ser minimizada em função dos valores de s1 obtidos da constelação de referência pode ser escrita como:

$$[(|h1|)^2 + (|h2|)^2] \cdot (|s1|)^2 - r1 \cdot \overline{s1} \cdot h1 - h2 \cdot \overline{r2} \cdot \overline{s1} - s1 \cdot h1 \cdot \overline{r1} - r2 \cdot s1 \cdot \overline{h2} = [(|h1|)^2 + (|h2|)^2] \cdot (|s1|)^2 + [(|s1 - s1c|)^2 - [(|s1|)^2 + (|s1c|)^2]]$$

Mas o termo  $|s1c|^2$  adicionado à equação acima pode ser desprezado, pois não é afetado pela busca do símbolo s1 na constelação de referência que minimiza a equação. Daí a equação a ser minimizada em função de s1 pode ser simplificada para a forma:

$$[(|h1|)^2 + (|h2|)^2 - 1] \cdot (|s1|)^2 + (|s1 - s1c|)^2$$



O bloco “detetor” (vide figura (a) slide (7)) testa todos os  $M$  símbolos IQ do alfabeto A da modulação, “experimentando” cada um dos  $M$  símbolos no argumento s1 da expressão. O s1 que minimiza esta expressão é identificado como o s1 transmitido.

Fazendo a mesma análise, a equação a ser minimizada em função de s2 pode ser simplificada para a forma:

$$[(|h1|)^2 + (|h2|)^2 - 1] \cdot (|s2|)^2 + (|s2 - s2c|)^2$$



O bloco “detetor” (vide figura (a) slide (7)) testa todos os  $M$  símbolos IQ do alfabeto A da modulação, “experimentando” cada um dos  $M$  símbolos no argumento s2 da expressão. O s2 que minimiza esta expressão é identificado como o s2 transmitido.

sendo  $s2c = \tilde{\mathbf{S}}_2 \rightarrow$  saída  $\tilde{\mathbf{S}}_2$  do combiner (ver slide (7) figura (a))

**Nota:**  $d^2(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_2)^* = (z_1 - z_2)(z_1^* - z_2^*)$