



Introdução, aspectos históricos, classificação de sistemas de radar. *Range*, seção transversal do alvo (RCS – *radar cross section*), ruído e mínimo sinal detectável. Ambiguidade de *range*. Coerência, desvio Doppler, ambiguidade de Doppler. Resolução de *range*, Doppler e ângulo. Compressão de pulso, *matched filter* e Função de Ambiguidade. MTI (*moving target indication*). Detecção de alvo – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR). Rastreamento (*tracking*) do alvo.

Departamento de Eletrônica e Computação

Centro de Tecnologia

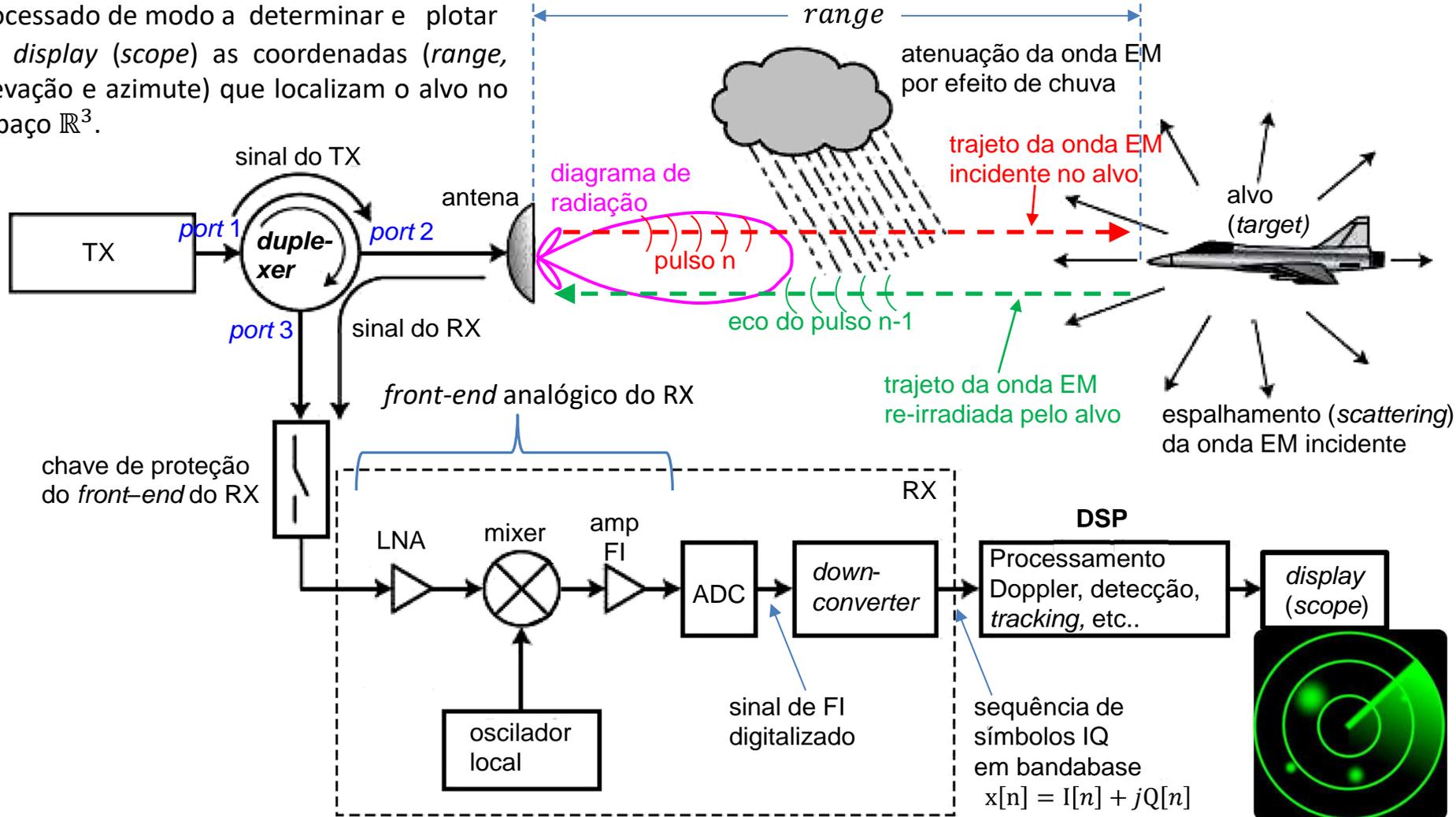
UFSM00271 – Técnicas de Radar

Prof. Fernando DeCastro



Introdução

Um radar é um sistema baseado na irradiação de ondas eletromagnéticas (EM) em direção a uma região de interesse no espaço \mathbb{R}^3 , sistema que tem a capacidade de detectar a onda EM espalhada (*scattered*) por objetos-alvo (*targets*) situados no interior da referida região. A figura abaixo mostra os principais elementos envolvidos no processo geral efetuado por um radar, cujas etapas são **(I)** a irradiação da onda EM pelo antena do transmissor (TX) do radar, **(II)** a propagação da onda EM pela atmosfera, **(III)** o espalhamento (*scattering*)/reflexão da onda no alvo e **(IV)** a propagação da onda refletida no alvo de volta para a posição em que se encontra o receptor (RX) do radar, onde o sinal do eco refletido no alvo é digitalizado e processado de modo a determinar e plotar no *display (scope)* as coordenadas (*range*, elevação e azimute) que localizam o alvo no espaço \mathbb{R}^3 .



Introdução

Embora os detalhes e os blocos funcionais de cada particular sistema de radar variem, os subsistemas principais devem incluir um TX, antena, RX e processador de sinal (estudaremos antena, TX e RX no Cap II.2). O sistema pode ser significativamente mais simples ou mais complexo do que o diagrama mostrado no slide anterior, mas o referido diagrama é, no geral, representativo das funcionalidades e subsistemas básicos que constituem um radar.

O TX é o subsistema que gera a onda EM, a qual é irradiada no espaço \mathbb{R}^3 pela antena. Note no slide anterior que a antena apresenta um diagrama de radiação diretivo, e que o diagrama idealmente aponta para a região de interesse do espaço \mathbb{R}^3 onde se encontra o alvo. A antena também atua na recepção da onda EM refletida no alvo e que se propaga de volta na direção da antena, onda que é denominada **eco do alvo**.

O TX é conectado à antena por meio de um **duplexer** (ver <https://www.radartutorial.eu/06.antennas/Duplexer.en.html>), também denominado de **circulator**. O *duplexer* possibilita que o sinal gerado pelo TX seja conectado à antena e que, simultaneamente, o sinal do eco do alvo recebido pela antena seja conectado ao RX, mas mantendo um alto isolamento entre os *ports* 1 e 3 (ver slide anterior). O alto isolamento entre os *ports* 1 e 3 do *duplexer* evita que o sinal de alta intensidade do TX atinja o RX, protegendo o LNA (*low noise amplifier*) no *front-end* do RX. Adicionalmente, a chave de proteção do *front-end* do RX desconecta do *duplexer* a entrada do LNA e a conecta ao *ground* quando o nível de sinal ultrapassa um limiar considerado perigoso para o *port* de entrada do LNA.

A onda EM irradiada pela antena se propaga no espaço até a posição do alvo, incidindo no mesmo. A onda EM incidente induz correntes na estrutura do alvo, que re-irradia novamente a onda EM no espaço nas vizinhanças do alvo. Esta onda re-irradiada se propaga de volta até a antena, constituindo um eco do alvo.

Além do alvo, outras estruturas no solo e na atmosfera são iluminadas pela onda EM incidente, re-irradiando novamente a onda incidente. Estas ondas EM re-irradiadas por estruturas no solo e por descontinuidades do meio de propagação na atmosfera também se propagam até a antena interferindo com a onda EM que representa o eco do alvo, dificultando a detecção do alvo pelo processamento efetuado no RX. Denomina-se de **clutter** estas ondas EM indesejadas que interferem com a onda EM que representa o eco do alvo (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Clutter_\(radar\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Clutter_(radar))).

Portanto, a antena do RX do radar capta as ondas EM que são espalhadas (*scattered*) por objetos, ondas estas que são denominadas ecos dos objetos. O objeto pode ser um alvo de interesse, conforme mostrado no slide 2, ou pode não ser de interesse, e neste caso o eco é considerado *clutter*. As ondas EM dos ecos dos objetos captadas pela antena são convertidas em um sinal de tensão nos terminais da antena, sinal que é amplificado pelo LNA no *front-end* do RX, tendo a seguir o seu espectro trasladado para a frequência intermediária (FI) pelo mixer e oscilador local.

Introdução

O sinal de FI é então amplificado pelo amplificador de FI (bloco “amp FI” no slide 2) sendo então convertido pelo ADC (*analog to digital converter*) para uma sequência de amostras cujos valores são representados por uma sequência de respectivas palavras binárias (https://en.wikipedia.org/wiki/Analog-to-digital_converter). A frequência de amostragem $f_s = 1/T_s$ do ADC de M bits (sendo usualmente $M \geq 8$ para minimizar o ruído de quantização) determina o intervalo T_s entre as amostras, e, portanto, determina a resolução temporal do processo de digitalização.

O espectro do sinal de FI digitalizado pelo ADC é então transladado para bandabase pelo bloco *down-converter*, resultando em uma sequência $x[n] = I[n] + jQ[n]$ de amostras de valor complexo denominadas de **símbolos IQ** (ver https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf). O módulo $|I + jQ|$ e a fase $\angle\{I + jQ\}$ de cada símbolo IQ representa o módulo (amplitude) e a fase da superposição de ondas EM (ecos de alvos + *clutter*) recebida em cada respectivo instante pela antena do radar.

Note, portanto, que a sequência de símbolos $x[n] = I[n] + jQ[n]$ é um sinal digital de valor complexo cujos módulo e fase das amostras fundamentalmente representam informação da amplitude e fase das ondas EM que se propagam entre radar e alvos no cenário de operação. Portanto, mediante processamento digital adequado deste sinal, é possível separar os ecos dos alvos do *clutter* e determinar as coordenadas (*range*, elevação e azimute) que localizam o alvo no espaço \mathbb{R}^3 .

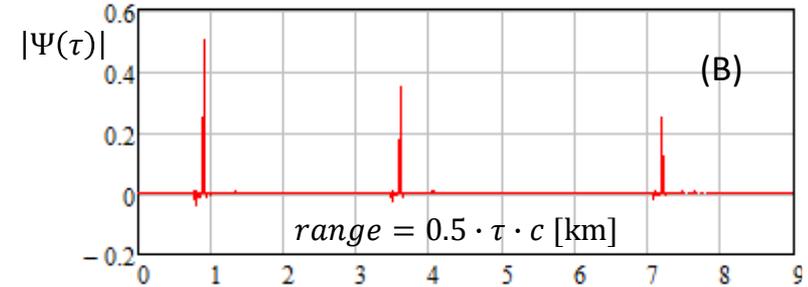
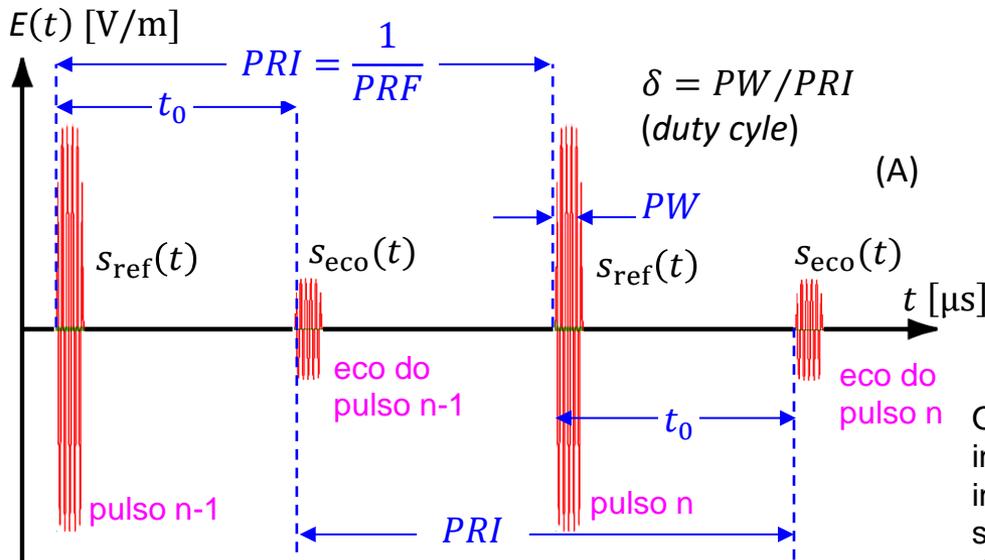
A sequência $x[n]$ de símbolos IQ é então submetida ao bloco DSP (*digital signal processing*) no diagrama do slide 2, que filtra, correlaciona, classifica e analisa a informação em formato digital de modo a detectar e determinar as coordenadas do alvo, plotando-as no *display*. Em radares SAR (*synthetic aperture radar*) é inclusive possível obter uma imagem do alvo para efeito identificar o mesmo (ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf).

Um radar da classe “pulsado” (veremos a classificação de radares no Cap I.3) opera com uma forma de onda (*waveform*) caracterizada pelo *pulse repetition frequency* $PRF = 1/T_R$, sendo T_R o *pulse repetition interval* (*PRI*) conforme mostrado no gráfico no próximo slide, onde $E(t)$ [V/m] é o campo elétrico instantâneo medido na antena.

Cada pulso da onda EM tem uma duração PW e é um *burst* de RF (ver figura 1 de <https://www.analog.com/en/analog-dialogue/articles/detecting-fast-rf-bursts-using-log-amps.html>) na frequência de operação do radar, conforme mostrado em (A) no próximo slide. **Note em (A) no próximo slide que o intervalo t_0 [μ s], denominado *round trip time*, é o tempo que o sinal do pulso $s_{\text{ref}}(t)$ da onda EM transmitida pela antena demora para percorrer a distância $2 \times \text{range}$ no trajeto antena→alvo→antena. O consequente sinal do eco de retorno $s_{\text{eco}}(t)$ é recebido na antena após o pulso transmitido $s_{\text{ref}}(t)$ percorrer o trajeto antena→alvo→antena no intervalo t_0 [μ s]. O trajeto da onda EM correspondente ao *round trip time* é mostrado no cenário operacional do radar mostrado no slide 2.**

Introdução

O bloco DSP no slide 2 mede por correlação em bandabase o tempo t_0 de *round-trip* em que o sinal de cada n -ésimo pulso transmitido $s_{ref}(t)$ demora p/ percorrer a distância $2 \times range$ no trajeto antena→alvo→antena, após o que $s_{ref}(t)$ retorna como eco $s_{eco}(t)$. O tempo de *round-trip* t_0 é o instante do pico máximo da função de correlação complexa $\Psi(\tau) = \frac{1}{PW} \int_{-PW}^{PW} s_{eco}(t + \tau) s_{ref}^*(t) dt$, $0 < \tau < PRI$, implementada no bloco DSP, resultando conforme $|\Psi(\tau)|$ em (B). Obtido t_0 , o *range* (distância) entre alvo e antena é obtida através de $range = 0.5 c t_0$ [m], onde $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] é a velocidade de propagação da onda EM. Note que há 3 alvos (3 picos) no gráfico em (B) nos ranges 0.9Km, 3.6km e 7.2km.



Ainda, o **duty cycle** do radar é dado por $\delta = PW/PRI$, conforme (A).

O sinal dos ecos dos alvos recebidos na antena pode ter sua inteligibilidade degradada por ruído e/ou por sinais interferentes, originados por: **(I)** Ruído eletrônico interno ao sistema de radar e ruído térmico no *front-end* do RX (que discutiremos no Cap I.4), bem como ruído externo gerado nas proximidades da antena do radar. Por exemplo, harmônicas do sinal de fornos de microondas c/ blindagem defeituosa.

(II) Ondas EM refletidas em objetos condutores elétricos próximos à antena do radar, frequentemente denominado de *hard clutter*. Por exemplo, estruturas metálicas de edifícios. **(III)** Ondas EM externas não intencionais geradas por fontes de radiação *man made* (EMI – *electromagnetic interference*). Por exemplo, ruídos de ignição de motores e harmônicos do inversor AC de painéis solares. **(IV)** *Jamming* intencional gerado em um sistema de EW (*electronic warfare*) operado por uma facção inimiga, que irradia sinais interferentes na forma de ruído que mimetiza o ruído térmico ou na forma de sinais interferentes que mimetizam alvos falsos, no intuito de degradar o desempenho do sistema de radar (ver slides 76 a 83 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf).

Determinar a presença de um alvo (função *search and detect*) em um cenário operacional com ruído, *clutter* e *jamming* é uma função primária dos algoritmos e processos efetuados no bloco DSP do radar (ver slide 2).

Introdução

O bloco DSP (slide 2) contempla uma sequência de vários processos, conforme exemplificado de forma básica no diagrama em (A) abaixo. Por exemplo, para a execução da função **search and detect**, referida no slide anterior, o bloco DSP envia comandos ao posicionador da antena para que ela aponte seu diagrama de radiação para posições angulares sucessivas de modo a varrer a totalidade do volume da região de interesse no espaço \mathbb{R}^3 . A varredura é efetuada através de um posicionador mecânico em radares mais antigos e em radares modernos é efetuada através de um *phased-array* (ver slides 17 a 24 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf). O diagrama de radiação do *phased-array* é modelado e controlado pelo bloco “*beamforming*” em (A) abaixo, que aponta o diagrama para uma sequência de posições angulares discretas (ver slides 52 a 143 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf).

antena *phased-array* *

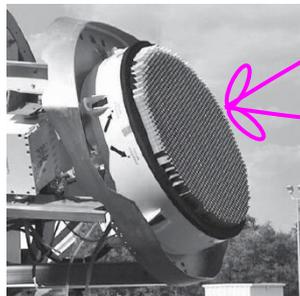
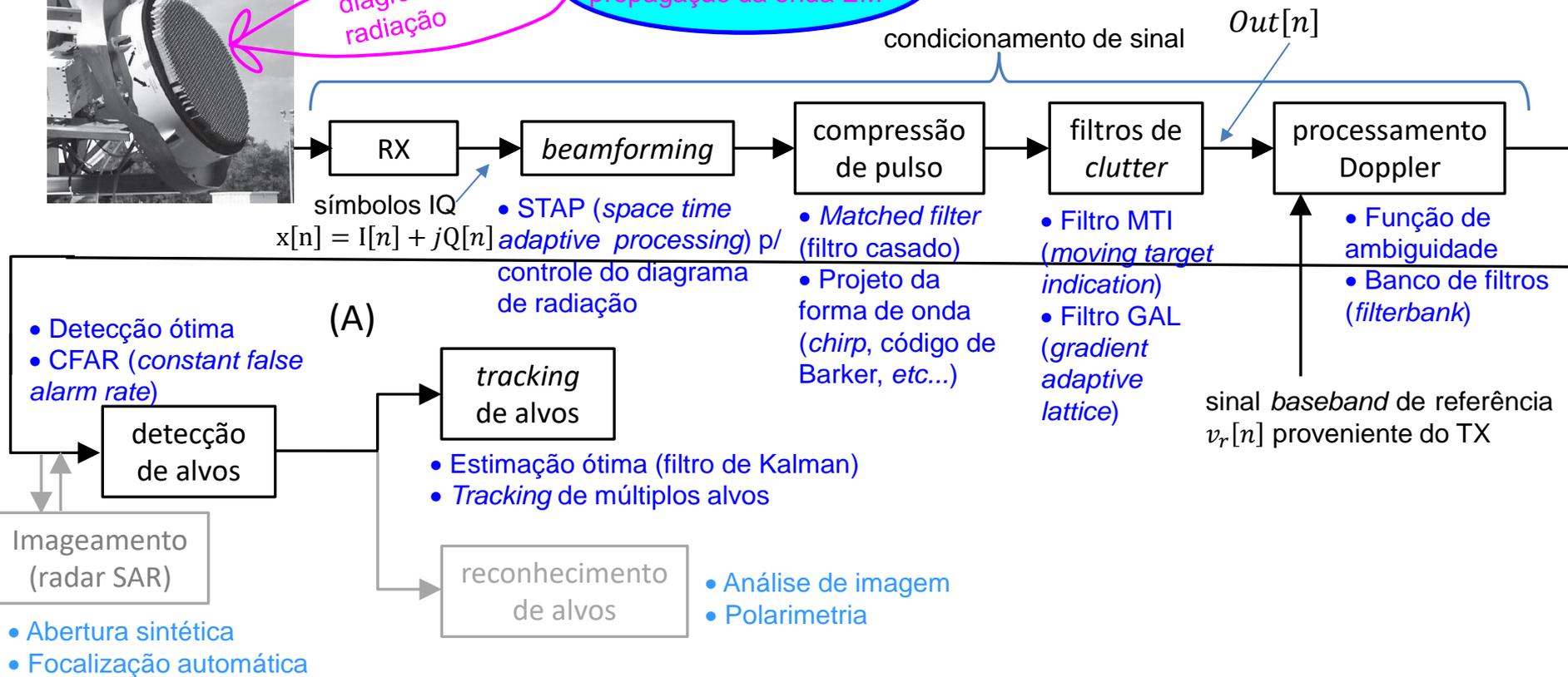


diagrama de radiação

alvos + clutter + efeitos de propagação da onda EM

* AESA AN/APG-81

(ver <https://en.wikipedia.org/wiki/AN/APG-81>)



Introdução

Para cada posição angular de azimute e elevação que o bloco “*beamforming*” posiciona o diagrama de radiação do *phase-array*, o TX gera uma sequência de N_{pulsos} pulsos e o *phased-array* irradia a onda EM pulsada. O sinal dos ecos da onda EM refletida nos alvos são recebidos pelo *phased-array* e são processados digitalmente no RX para efeito de detectar a presença de alvos. No caso de *jamming*, o bloco “*beamforming*” modela o diagrama de radiação do *phased-array* de modo a que o mesmo apresente ganho nulo no azimute e elevação da direção de incidência da onda EM interferente recebida pela antena do radar, onda que é irradiada pelo *jammer* (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/PTRBFNNB.pdf>)

Por exemplo, consideremos que $N_{\text{pulsos}} = 10$ pulsos são transmitidos em uma determinada posição angular do diagrama de radiação do *phased-array*. A onda EM dos ecos de cada respectivo pulso é recebido no RX na forma de amostras complexas $I + jQ$ (ver slide 4) e é correlacionado com um *template* do pulso no *matched-filter* do bloco “compressão de pulso”. Através deste processo a SNR (*signal to noise ratio*) do sinal dos ecos é maximizada, minimizando a degradação da inteligibilidade do sinal causada pelo ruído térmico gerado no *front-end* do RX e sobreposto ao sinal. Simultaneamente, o processo de correlação reduz a largura do pulso resultante na saída do *matched-filter*, efetuando a denominada **compressão de pulso** (que veremos no Cap I.7) e com isto maximizando a resolução de *range* do radar (ver slides 55 a 57).

A seguir no diagrama do slide anterior, a sequência de amostras complexas na saída do bloco “compressão de pulso” (e que correspondem aos $N_{\text{pulsos}} = 10$ pulsos transmitidos) é submetida ao bloco “filtros de *clutter*” que atenuam os ecos das ondas EM refletidas em objetos estacionários (árvores, rochas, edifícios, descontinuidades do meio de propagação ao longo da trajetória da onda EM, etc.), processo que maximiza a capacidade do radar para discriminar ecos de alvos e ecos de *clutter*, conforme veremos no Cap I.8 e no Cap III.5.

A saída $Out[n]$ do bloco “filtros de *clutter*” é então submetida ao bloco “processamento Doppler”, que basicamente identifica o *range* de cada alvo pelo atraso no tempo τ de seu sinal de eco em relação ao sinal transmitido pelo TX, bem como identifica a velocidade de cada alvo pelo desvio Doppler v na frequência do eco do alvo em relação à frequência do sinal transmitido pelo TX. Isto é feito determinando os máximos da denominada **função de ambiguidade** $\Psi(\tau, v)$, que estudaremos no Cap I.7. A função $\Psi(\tau, v)$ mede a correlação entre o sinal de referência $v_r[n]$ e o respectivo sinal $Out[n]$ dos ecos em bandabase na saída do bloco “filtros de *clutter*”, conforme mostrado em (A) no slide anterior, sendo $v_r[n]$ uma cópia do sinal em bandabase transmitido pelo TX digitalizada por um ADC e filtrada por um *matched-filter* idêntico ao do bloco “compressão de pulso”. O domínio (τ, v) de Ψ é o atraso no tempo τ [s] e o desvio de frequência Doppler v [Hz] entre os sinais $v_r[n]$ e $Out[n]$. Dado que $range = 0.5 c \tau$ [m] e $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s], então a função de ambiguidade $\Psi(\tau, v)$ pode ser também ser expressa como $\Psi(range, v)$.

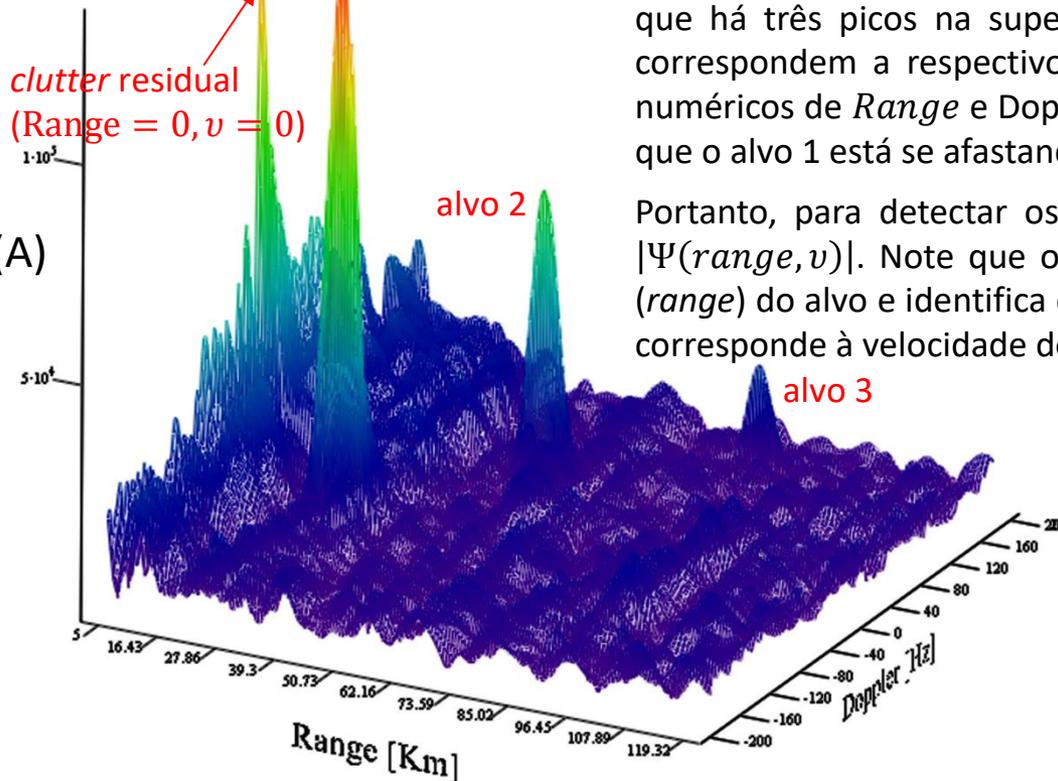
Introdução

Em termos de procedimento, a função de ambiguidade $\Psi(range, v)$, com $range = 0.5 c \tau$ [m], é implementada através de:

$$\Psi(\tau, v) = \sum_{n=0}^{N-1} Out[n] v_r^*[n - \tau] e^{-j2\pi n \frac{v}{SR}}$$

O intervalo de tempo que corresponde ao número N de símbolos IQ usados na implementação de $\Psi(\tau, v)$ acima definida, é denominado de **CPI (coherent processing interval)**, sendo o CPI usualmente um múltiplo inteiro do *pulse repetition interval* ($PRI = T_R$).

$|\Psi(range, v)|$



O gráfico em (A) ao lado mostra $|\Psi(range, v)|$ para um radar operando na faixa de VHF com $SR = 250$ [KHz], $N = 65536$ e $CPI = N/SR = 262.144$ [ms]. Note que há três picos na superfície $|\Psi(range, v)|$ com Doppler não nulo e que correspondem a respectivos alvos em movimento, e cujos respectivos valores numéricos de *Range* e Doppler v são explicitados no retângulo azul abaixo. Note que o alvo 1 está se afastando do radar dado que $v < 0$ para este alvo.

Portanto, para detectar os alvos é necessário detectar os picos na superfície $|\Psi(range, v)|$. Note que o $(range, v)$ respectivo ao pico identifica a distância (*range*) do alvo e identifica o desvio Doppler na frequência do eco do alvo, a qual corresponde à velocidade do alvo, conforme veremos no Cap I.5.

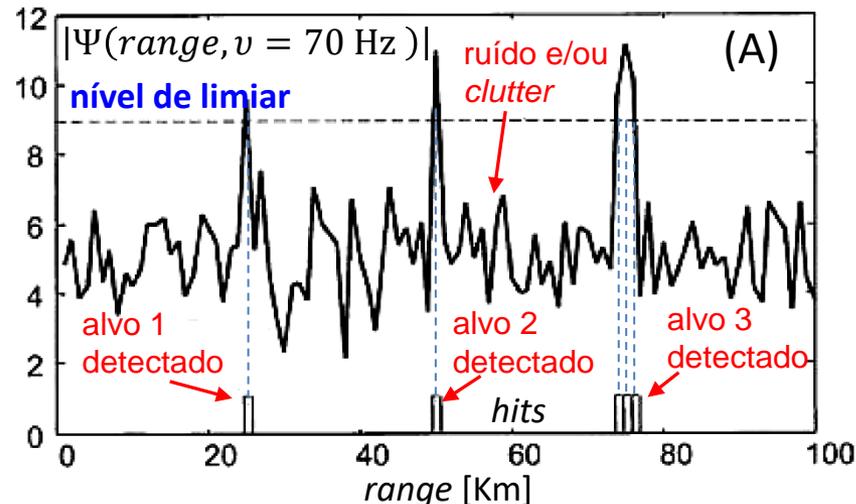
$$Range = \begin{pmatrix} 28.78 \\ 49.766 \\ 79.745 \end{pmatrix} \cdot km \quad v = \begin{pmatrix} -51.256 \\ 73.367 \\ 157.789 \end{pmatrix} \cdot Hz$$

Introdução

Alternativamente, alguns sistemas implementam o bloco “processamento Doppler” através da abordagem por *filterbank* (bancos de filtros) ao invés da abordagem por função de ambiguidade $\Psi(\text{range}, v)$.

Na abordagem por *filterbank* as amostras $I + jQ$ representativas de cada eco da onda EM são previamente ordenadas e classificadas por tempo de chegada. Como o tempo de chegada é proporcional ao *range*, a ordenação resulta em função do *range* dos alvos. As amostras IQ assim ordenadas são sequencialmente somadas e armazenadas em respectivas áreas na memória denominadas *range bins* (*bin* = caixa de armazenamento), cada *bin* armazenando a soma das amostras IQ dos ecos da sequência de N_{pulsos} pulsos transmitidos (no caso em análise, 10 pulsos) associadas a um *range*. A seguir o *filterbank* efetua a FFT (*Fast Fourier Transform*) da sequência de símbolos IQ respectiva a cada um dos *ranges* e identifica as frequências de desvio Doppler naquele *range*. Uma descrição geral do processamento Doppler efetuado através da abordagem por *filterbank* pode ser encontrada na discussão nos slides 7 a 9 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf.

O próximo passo na cadeia de processamento no diagrama mostrado em (A) no slide 6 é a detecção dos alvos através da detecção dos picos na superfície $|\Psi(\text{range}, v)|$ da função de ambiguidade $\Psi(\text{range}, v)$. O (range, v) respectivo ao pico identifica a distância (*range*) do alvo e identifica o desvio Doppler na frequência do eco do alvo, a qual corresponde à velocidade do alvo. A detecção ótima dos máximos de $\Psi(\text{range}, v)$ é feita através do algoritmo CFAR (*constant false alarm rate*) que ajusta e otimiza o **nível de limiar** a partir do qual o valor máximo de um pico em $|\Psi(\text{range}, v)|$ é considerado ser um alvo em (range, v) , conforme mostrado em (A) abaixo para 3 alvos em *ranges* distintos movendo-se na mesma velocidade radial (mesmo desvio Doppler $v = 70$ [Hz]).



Note que a comparação com o nível de limiar para o alvo 3 resultou 3 pulsos de *hit*, indicando que ou o alvo 3 é de grande dimensões ao longo do *range* ou há vários alvos próximos entre si naquele *range* mas que não são separáveis devido à insuficiente resolução de *range* deste radar (ver slides 55 a 57). Estudaremos o algoritmo CFAR no Cap I.9.

Introdução

O *range*, azimute e elevação de cada alvo detectado pelo CFAR é então registrado em memória. Daí, o bloco “*beamforming*” aponta o diagrama de radiação do *phased-array* para a próxima posição do volume da região de interesse no espaço \mathbb{R}^3 e o ciclo de procedimentos é repetido. Este processo é continuado até que todo o volume de interesse seja testado, quando então todo o processo é repetido novamente para o mesmo ou para um novo volume de interesse.

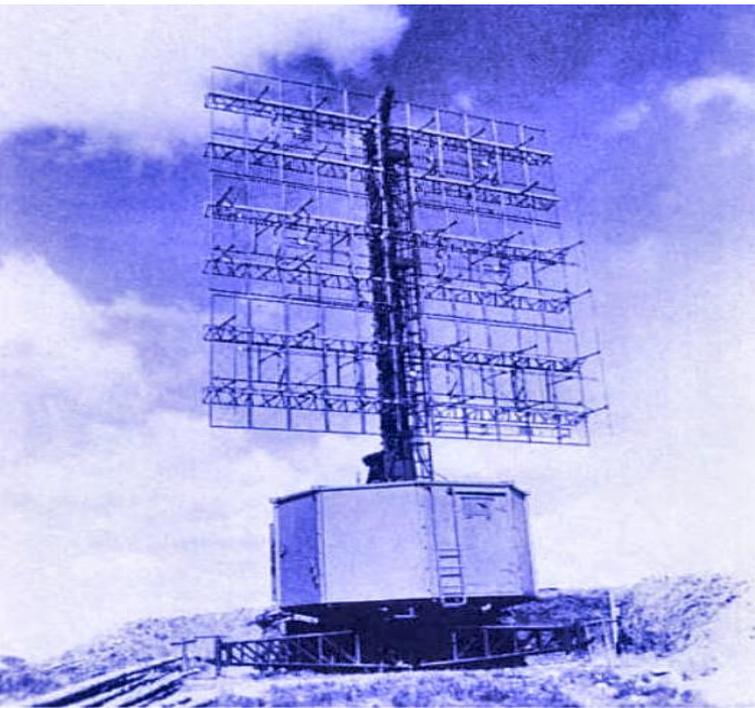
Conforme expresso no parágrafo anterior, ao final de cada ciclo de procedimentos as coordenadas (*range*, azimute) para cada elevação de um alvo detectado pelo CFAR são registradas em memória. Como o alvo é móvel, as suas coordenadas (*range*, azimute) variam com o transcorrer do tempo, gerando um conjunto de pontos luminosos (*blips*) no *display (scope)* do radar quando as coordenadas (*range*, azimute) registradas são lidas diretamente da memória. Este conjunto de *blips* já permite identificar a trajetória de cada alvo. No entanto, uma melhora da resolução da localização do alvo é obtida se a curva da trajetória média destes *blips* for plotada no *display* ao invés dos *blips* em si. Esta funcionalidade é implementada no bloco “*tracking*” no diagrama mostrado em (A) no slide 6, que estudaremos no Cap I.10.

Basicamente, o bloco “*tracking*” efetua o seguinte processo: Para cada alvo detectado em um determinado volume de interesse, os valores registrados ao longo do tempo na memória para o *range*, ângulos de azimute/elevação e componente radial de velocidade do alvo (desvio Doppler) são lidos da memória. O conjunto destes 4 registros lidos é armazenado em um vetor de 4 respectivos componentes, um vetor para cada instante de tempo registrado em memória. Cada vetor identifica o estado (*state vector*) do alvo no instante que o vetor foi gravado na memória e o conjunto de vetores identifica a trajetória do estado do alvo. A sequência de vetores de estado (*state vectors*) do alvo é submetida a um filtro de Kalman (https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter) de modo a estimar através de uma curva contínua e suave a trajetória atual e futura do alvo (curva da trajetória média dos *blips*). O *tracking* possibilita determinar a posição e a velocidade de um alvo com uma precisão melhor do que a resolução do radar. Discutiremos resolução no Cap I.6.

Radares SAR (*synthetic aperture radar*) determinam não apenas a localização do alvo, mas também determinam uma imagem do mesmo para efeito de reconhecimento e identificação (ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf). Estes procedimentos ficam ao encargo dos blocos “*imageamento*” e “*reconhecimento de alvos*” (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/PSAR.pdf>) no diagrama mostrado em (A) no slide 6.

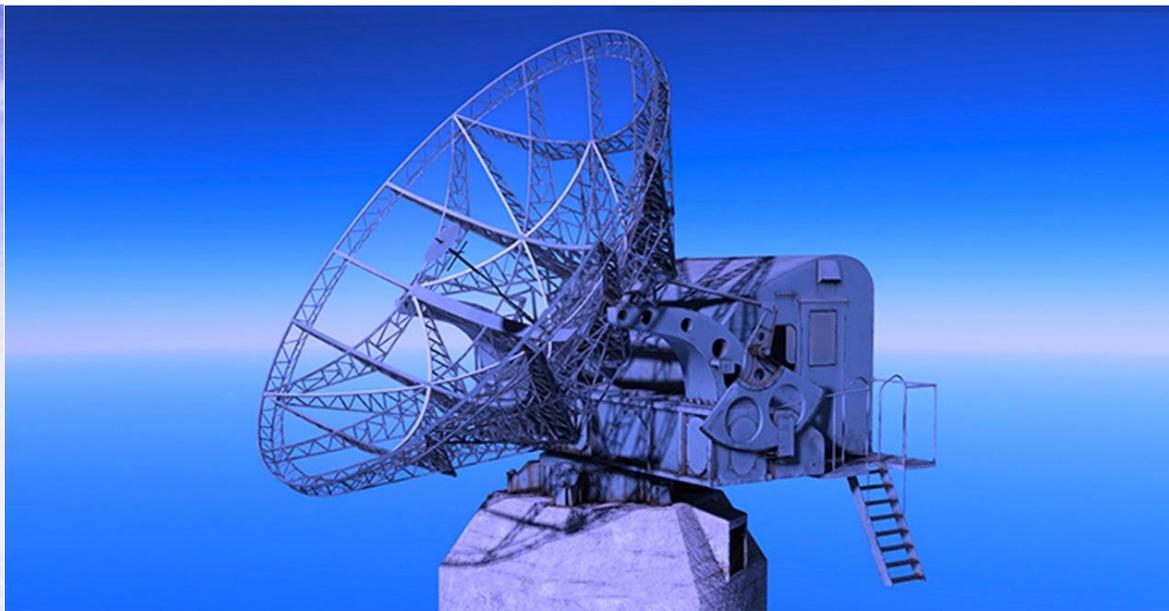
Aspectos históricos

Talvez o desenvolvimento do radar tenha sido a tecnologia que mais radicalmente contribuiu de maneira estratégica e generalizada para o avanço de todas as demais áreas de pesquisa e desenvolvimento em telecomunicações. O surgimento de sistemas de radar capazes de detectar aeronaves inimigas desempenhou um papel vital na vitória dos aliados na WW2 (World War II – 2ª guerra mundial – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Radar_in_World_War_II e http://www.fccdecastro.com.br/pdf/Radar1935_45.pdf). Desde aquela época, o radar foi precursor de uma ampla gama de tecnologias com inúmeras aplicações práticas. Por exemplo, técnicas de imageamento e processamento de imagens médicas, astronomia de radar, radio astronomia, previsão e imageamento meteorológico, controle de tráfego aéreo em aeroportos e bases aéreas, sistemas de comunicação de alto desempenho, processadores/computadores de alta velocidade de processamento, televisão analógica e digital, fornos de microondas, todas são tecnologias que surgiram direta ou indiretamente a partir do atendimento de demandas tecnológicas no contexto do desenvolvimento do radar iniciado na WW2.



Radar Freya (WW2)

https://en.wikipedia.org/wiki/Freya_radar



Radar Würzburg-Riese (WW2)

https://en.wikipedia.org/wiki/W%C3%BCrzburg_radar

Aspectos históricos

O termo RADAR (**RA**dio **D**etection **A**nd **R**anging) surgiu na década de 1940 no âmbito da pesquisa e desenvolvimento que estavam sendo realizados pelo *United States Signal Corps* (<https://www.britannica.com/topic/Signal-Corps>) que, na época, estava trabalhando para a marinha dos USA no desenvolvimento de sistemas baseados na transmissão e reflexão de ondas EM (EM – eletromagnética) em objetos-alvos (*targets*).

No entanto, a origem da tecnologia de radar remonta tempos mais ancestrais. No final da década de 1880, o físico alemão Heinrich Hertz mostrou definitivamente a existência de ondas EM (<https://www.famousscientists.org/how-hertz-discovered-radio-waves/>) formuladas por James Clerk Maxwell em seu seminal trabalho sobre a teoria do eletromagnetismo (https://en.wikipedia.org/wiki/James_Clerk_Maxwell). Usando uma onda EM em uma frequência de aproximadamente 455 MHz, Hertz demonstrou que as ondas EM são refletidas por estruturas metálicas e refratadas por materiais dielétricos.

Os experimentos realizados por Hertz forneceram a base para a detecção de alvos e, em 1904, o físico alemão Christian Hülsmeyer obteve a patente de um dispositivo detector de obstáculos que foi aplicado à navegação de navios, dispositivo que foi denominado *telemobiloscope* (<https://www.radarworld.org/huelsmeyer.html>). Embora Hülsmeyer tenha demonstrado o *telemobiloscope* para a marinha alemã, houve pouco interesse até a década de 1930, quando surgiu a urgente demanda para detectar aeronaves inimigas devido ao avanço dos bombardeiros de longo alcance e grande capacidade no cenário operacional bélico. Durante esse tempo, o desenvolvimento de sistemas baseados em ondas EM moduladas em pulsos curtos para detectar aeronaves ocorreu de forma independente nos USA, Grã-Bretanha, Alemanha, França, União Soviética, Itália, Holanda e Japão.

Em 1939, um sistema de radar com uma única antena para transmissão e recepção foi usado no navio de guerra USS New York ([https://pt.wikipedia.org/wiki/USS_New_York_\(BB-34\)](https://pt.wikipedia.org/wiki/USS_New_York_(BB-34))) para detectar e rastrear aeronaves e navios. Imediatamente após a WW2, o avanço na tecnologia de radar desacelerou significativamente (<https://www.britannica.com/technology/radar/Advances-during-World-War-II>). No entanto, a década de 1950 viu o surgimento de radares de rastreamento de alta precisão baseados em amplificadores implementados com válvulas termoiônicas klystron (<https://en.wikipedia.org/wiki/Klystron>) para sistemas de alta potência e longo alcance. A teoria estatística que descreve analiticamente o processo de detecção de sinais em presença de ruído e a teoria do filtro casado (*matched filter* – ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf) foram sistematizadas nesta época.

Aspectos históricos

Os avanços da tecnologia digital na década de 1970 deram origem a muitas técnicas de processamento de sinais e dados, incluindo a discriminação de alvos aéreos. Durante a década de 1980, o avanço em sistemas *phased array* (ver slides 52 a 116 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf), que passaram a ser implementados com dispositivos de microondas de estado sólido, tornou possível o sensoriamento remoto de efeitos ambientais, como o fenômeno meteorológico *windshear* (<https://pt.wikipedia.org/wiki/Windshear>).

Em 1990, um protótipo operacional do radar de vigilância meteorológica WSR-88D (<https://www.radartutorial.eu/19.kartei/10.weather/karte011.en.html>) foi concluído, e a primeira instalação para previsão diária do tempo foi concluída em Sterling, Virgínia – USA, em 1992. Estes foram os primeiros sistemas de radar de próxima geração (NEXRAD), que é uma rede de 159 radares meteorológicos Doppler de alta resolução (<https://en.wikipedia.org/wiki/NEXRAD>).

Ao longo dos anos, muitos aprimoramentos foram feitos nos radares meteorológicos, incluindo super resolução, polarização dupla e o algoritmo de avaliação e terminação automáticos de varredura de volume (*Automated Volume Scan Evaluation and Termination* - AVSET – <https://en.wikipedia.org/wiki/NEXRAD#AVSET>).

A tecnologia digital atual e as novas técnicas de processamento de dados e sinais deram origem a sistemas de radar MIMO (MIMO – *Multiple-Input-Multiple-Output* – ver https://en.wikipedia.org/wiki/MIMO_radar e <https://www.radartutorial.eu/02.basics/MIMO-radar.en.html>) com *beamforming* digital (<https://www.radartutorial.eu/06.antennas/Digital%20Beamforming.en.html>) e com capacidade de operar sob múltiplas formas de onda (*waveforms*) para o sinal irradiado, fazendo com que o processamento do sinal de radar seja quase totalmente digital (*all digital design*).

Classificação de sistemas de radar

O estímulo inicial para o desenvolvimento de sistemas de radar decorreu da necessidade militar de detectar aeronaves inimigas durante a WW2 (https://ethw.org/Radar_during_World_War_II).

Desde então, os sistemas de radar têm sido aplicados em muitas e diversas áreas, como detecção de câncer, navegação autônoma de veículos, previsão do tempo, mapeamento de terreno e detecção de alvos através de paredes.

Neste contexto, é conveniente delinear os sistemas de radar em várias categorias. Basicamente, os tipos de radar podem ser classificados conforme segue (embora haja outras formas de classificação):

- Banda de frequência operacional.
- Tipo de forma de onda (*waveform*) irradiada.
- Tipo de aplicação.
- Configuração espacial das estações transmissoras (TXs) e estações receptoras (RXs).

A classificação de radares de acordo com a banda de frequência operacional surgiu durante a WW2 em função do tipo de aplicação do radar. Por exemplo, radares operando na banda L eram e são aplicados para estudos de turbulência atmosférica.

A tabela no próximo slide fornece a classificação de radares de acordo com o IEEE (https://en.wikipedia.org/wiki/Radio_spectrum) para as bandas de frequência comumente usadas, bem como uma breve descrição dos tipos de aplicações para cada banda.

Classificação por frequência operacional

Classificação de radares por frequência operacional – aplicações em cada faixa de frequência	
Faixa de frequência (banda)	Aplicações
HF [3 – 30MHz]	Radares de vigilância da costa e radar OTH (<i>over the horizon</i>). Ver slides 25 a 46 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf .
VHF [30 - 300 MHz]	Radares de muito longo alcance e radares de penetração no solo (GPR - <i>ground-penetrating radar</i>).
UHF [300 - 1000 MHz]	Radares de muito longo alcance e radar penetrante em vegetação/folhagem.
L (<i>long</i>) [1 - 2 GHz]	Controle e vigilância de tráfego aéreo de longo alcance.
S (<i>short</i>) [2 - 4 GHz]	Vigilância aérea de médio alcance, radar meteorológico de longo alcance e radares marítimos.
C (<i>compromise</i> - compromisso) [4 – 8] GHz	<i>Tracking</i> (rastreamento de alvos) de longo alcance, vigilância aérea de médio alcance e levantamento de perfis de vento.
X (frequências eram incógnitas “X” porque eram mantidas em sigilo durante a 2ª Guerra Mundial) [8 a 12 GHz]	<i>Guidance</i> (orientação de navegação) de mísseis, radar marítimo e mapeamento (SAR – <i>synthetic aperture radar</i>) de média resolução. Ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf .
Ku (<i>under K</i>) [12 - 18 GHz]	Imagens SAR de alta resolução e aplicações marinhas.
K (<i>kurz</i> – <i>short</i> em alemão) [18 - 24 GHz]	Detecção de nuvens e radar portátil de polícias rodoviárias.
Ka (<i>above K</i>) [24 - 40 GHz]	Mapeamento SAR de alta resolução e vigilância de curto alcance.

Classificação por tipo de *waveform*

A classificação de radares de acordo com o tipo de forma de onda (*waveform*) irradiada é talvez a classificação mais dinâmica, na medida em que não raro novos tipos de *waveforms* são propostos pela comunidade científica que desenvolve sistemas de radar.

Basicamente, as *waveforms* irradiadas incluem a onda contínua (CW – *continuous wave*), em que o sinal é transmitido continuamente em uma determinada frequência, bem como *waveforms* em que a onda é modulada em pulsos, resultando em um sinal onde *bursts* de sinal (ver slide 24 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_I.pdf) são transmitidos sob várias frequências de repetição de pulso (PRF – *pulse repetition frequency*).

Formas de onda mais complexas são frequentemente utilizadas, como formas de onda codificadas em fase (ver figura (B) no slide 12 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf).

A tabela no próximo slide resume as principais categorias de formas de onda comumente usadas em radar bem como as respectivas aplicações.

Classificação por tipo de *waveform*

Classificação de radares por tipo de <i>waveform</i> (forma de onda) irradiada		
Tipo de <i>waveform</i>	Particularidade	Aplicações
Onda contínua (CW – <i>continuous wave</i>)	Não-modulada	Radar portátil de polícias rodoviárias e radar para <i>human gait recognition</i> (ver <u>Nota 1</u> no próximo slide).
	Modulada (usualmente FMCW – <i>frequency modulation continuous wave</i>)	Radar para prevenção de colisão automotiva (<i>automotive collision avoidance</i>), sensores em casas inteligentes (<i>smart homes</i> – ver <u>Nota 2</u>), minimização dos ecos de <i>clutter</i> (ver <u>Nota 3</u>) gerados por objetos no solo, radares meteorológicos para medição da velocidade e direção do vento.
Pulsada (<i>pulsed waveform</i>)	<i>Low</i> PRF (baixa frequência de repetição de pulsos) – Ver <u>Nota 4</u> .	Indicação de alvo móvel (MTI – <i>moving target indication</i>) em radares de estação baseada em solo (<i>ground based</i>) e em radares aerotransportados (<i>airborne</i>). Vigilância de longo alcance.
	<i>Medium</i> PRF (média frequência de repetição de pulsos).	Radares <i>ground-based</i> p/ vigilância aérea e radares <i>airborne</i> em aeronaves interceptadoras (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Interceptor_aircraft).
	<i>High</i> PRF (alta frequência de repetição de pulsos).	Imageamento de alvos aéreos, detecção e rastreamento de mísseis (<i>missile seekers</i>) e controle de armas de curto alcance.
	Não-coerente	Radar de vigilância aérea e algumas aplicações MTI.
	Coerente (ver <u>Nota 5</u>)	Imageamento SAR (<i>synthetic aperture radar</i> – ver <u>Nota 7</u>), supressão de <i>clutter</i> e detecção/rastreamento de fenômenos meteorológicos.
<i>Waveforms</i> codificadas	Codificação em fase, em frequência e/ou no tempo.	Redução dos requisitos de potência de pico do <i>waveform</i> irradiado, aumento do alcance máximo (<i>maximum range</i>), redução das ambiguidades de <i>range</i> (alcance) e de Doppler e aumento da imunidade ao <i>jamming</i> (ver <u>Nota 6</u>).

Notas relativas à tabela do slide anterior:

Nota 1: Um sistema de reconhecimento de marcha (*human gait recognition*) usa a forma do corpo humano e a maneira como ele se move para identificá-lo. O algoritmo de reconhecimento detecta a silhueta humana a partir da onda EM irradiada pelo radar e refletida no corpo humano e analisa os movimentos do corpo, definindo um modelo de comportamento humano.

Nota 2: *Smart homes* e radar – ver <https://www.embeddedcomputing.com/technology/iot/wireless-sensor-networks/how-24ghz-radar-sensors-are-transforming-the-future-of-smart-homes> .

Nota 3 : *Clutter* – Ecos indesejados de objetos refletores que interferem na identificação dos ecos dos alvos de interesse - ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Clutter_\(radar\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Clutter_(radar)) .

Nota 4: PRF – *Pulse Repetition Frequency* – ver slide 20 a 22 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_I.pdf .

Nota 5: Radar coerente – ver slides 4 a 9 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf ,

Nota 6: *Jamming* – ver slides 76 a 83 https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf .

Nota 7: *Synthetic Aperture Radar* (SAR) – ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf .

Classificação por tipo de aplicação

Alternativamente, é possível classificar sistemas de radar de acordo com o tipo de aplicação específica. Por exemplo, o radar WSR-88D pode ser categorizado como um radar meteorológico dado que foi projetado, construído e colocado no mercado para o propósito específico de previsão meteorológica.

A tabela nos próximos dois slides resume as principais categorias de aplicação bem como mostra *links* com informação sobre sistemas usualmente disponíveis no mercado para cada categoria de aplicação.

Classificação por tipo de aplicação

Classificação de radares por tipo de aplicação

Aplicação	Sistemas disponíveis no mercado – exemplos:
Previsão meteorológica	WSR-88D (https://www.radartutorial.eu/19.kartei/10.weather/karte011.en.html), WF-44 (https://www.radartutorial.eu/19.kartei/11.ancient4/karte007.en.html), OU-PRIME (https://en.wikipedia.org/wiki/OU-PRIME), Baron Gen3 (https://baronweather.com/weather-radars).
Navegação marítima	Raymarine Quantum 2 (https://www.raymarine.com/marine-radar/radomes/quantum2/), Garmin GMR (https://buy.garmin.com/pt-BR/BR/p/556888), Furuno 1st Watch Wireless (https://www.furuno.com/en/products/radar/DRS4W).
Prevenção de colisão automotiva	Audi Pre Sense (https://www.audi-mediacycenter.com/en/electric-suvs-in-the-premium-compact-segment-the-audi-q4-e-tron-and-the-q4-sportback-e-tron-13887/driver-assist-systems-13905), BMW Active Protection (https://xenons4u.co.uk/blog/bmw-front-collision-warning-system-inactive-warning-message/), Ford Forward Alert (https://preview.thenewsmarket.com/Previews/NCAP/DocumentAssets/220985.pdf), GM Forward Collision Alert (https://gmauthority.com/blog/gm/general-motors-technology/gm-safety-technology/gm-active-safety-technology/gm-forward-collision-alert/)
<i>Airborne</i> militar	AN/APG-79 (https://en.wikipedia.org/wiki/AN/APG-79), AN/APG-82 (https://en.wikipedia.org/wiki/AN/APG-63_radar_family#AN/APG-82(V)1), AN/APY-12 (https://www.radartutorial.eu/19.kartei/08.airborne/karte087.en.html).
Controle de tráfego aéreo	Radar monopulso de vigilância aérea secundária (ver https://www.indracompany.com/pt-br/radar-modo-s-vigilancia-secundaria-monopulso e https://www.radartutorial.eu/02.basics/rp11.pt.html), Skyler(https://www.collinsaerospace.com/what-we-do/industries/air-traffic-management/surveillance/skyler), AN/SPY-6 (https://en.wikipedia.org/wiki/AN/SPY-6).
Defesa aérea e/ou contra mísseis	AN/MPQ-53 (https://www.radartutorial.eu/19.kartei/06.missile/karte003.en.html), AN/MPQ-64 (https://en.wikipedia.org/wiki/AN/MPQ-64_Sentinel), AN/TPQ-53 (https://www.lockheedmartin.com/en-us/products/tpq-53.html).

Classificação por tipo de aplicação

Classificação de radares por tipo de aplicação

Aplicação	Sistemas disponíveis no mercado – exemplos:
Defesa contra mísseis balísticos	AN/TPY-2 (https://en.wikipedia.org/wiki/AN/TPY-2_transportable_radar), UEWR (https://www.rtx.com/raytheon/what-we-do/strategic-missile-defense/upgraded-early-warning-radar), Long Range Discrimination Radar (https://missilethreat.csis.org/defsys/lrd/)
Radar de abertura sintética (SAR)	RADARSAT (https://www.geoimage.com.au/satellites-sensors/radarsat-1-and-2/), UAVSAR (https://uavsar.jpl.nasa.gov/education/what-is-uavsar.html), ASARS (https://www.radartutorial.eu/19.kartei/08.airborne/karte067.en.html), TRACER (https://www.lockheedmartin.com/en-us/products/tracer.html).

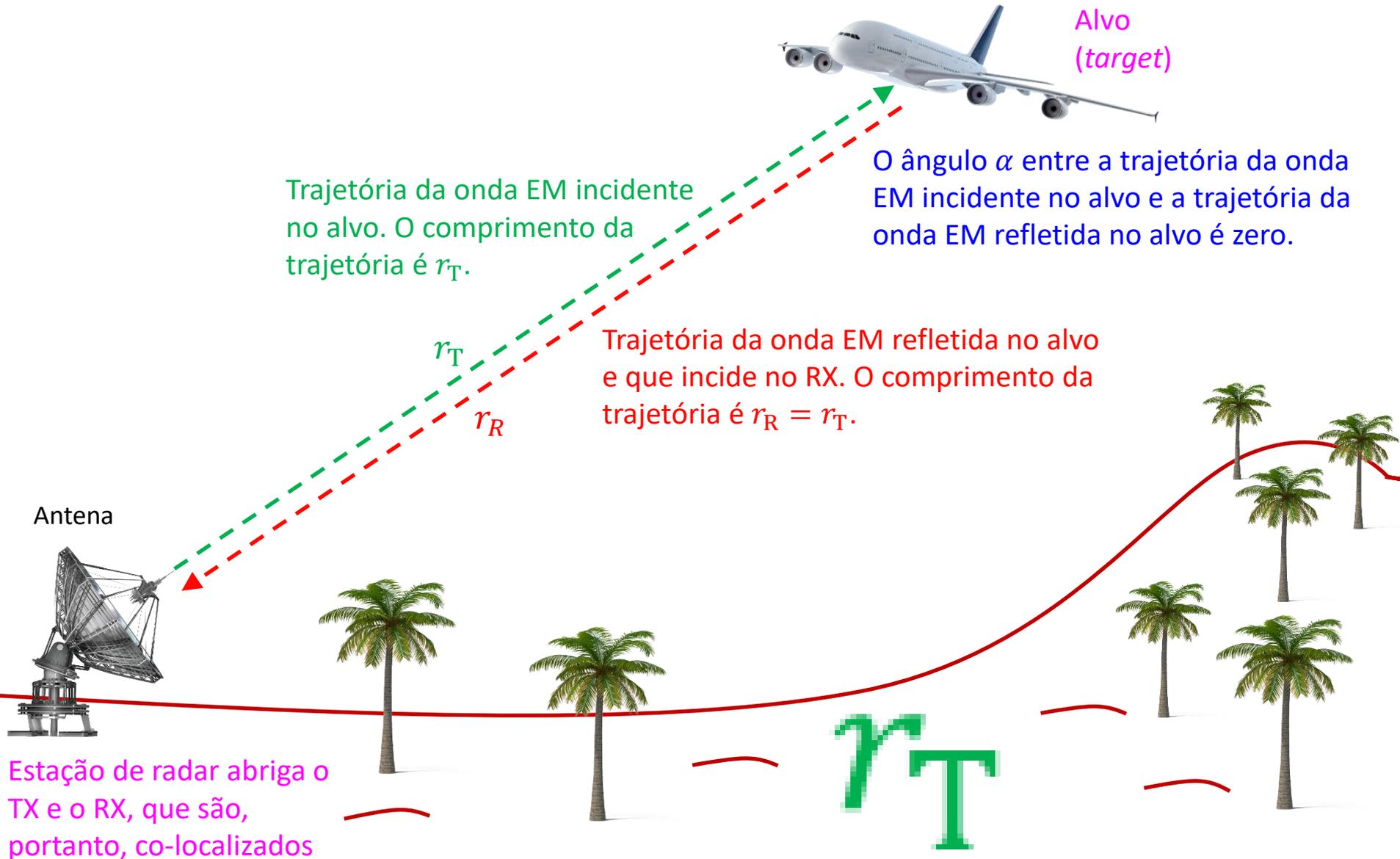
Classificação por configuração espacial das estações transmissoras (TX) e receptoras (RX).

A classificação de sistemas de radar pela configuração espacial das estações transmissoras (TX) e receptoras (RX) estabelecem 4 categorias: radar monostático, radar quase-monostático, radar bistático e radar multistático.

Com referência aos slides 23, 24 e 25 a seguir, estas categorias são definidas como segue (α é o ângulo entre a trajetória da onda EM incidente no alvo e a trajetória da onda EM refletida no alvo, denominado **ângulo bistático** – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Bistatic_radar):

- Sistemas **monostáticos** utilizam a mesma antena para transmissão e recepção ($\alpha = 0$).
- Sistemas **quase-monostáticos** têm as antenas de transmissão e recepção localizadas em coordenadas geográficas ligeiramente diferentes ($\alpha \cong 0$).
- Sistemas **bistáticos** têm as antenas de transmissão e recepção localizadas em coordenadas geográficas distintas ($\alpha \neq 0$).
- Sistemas **multistáticos** utilizam múltiplas antenas de transmissão e de recepção localizadas em coordenadas geográficas distintas ($\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \neq 0$).

Configuração monostática

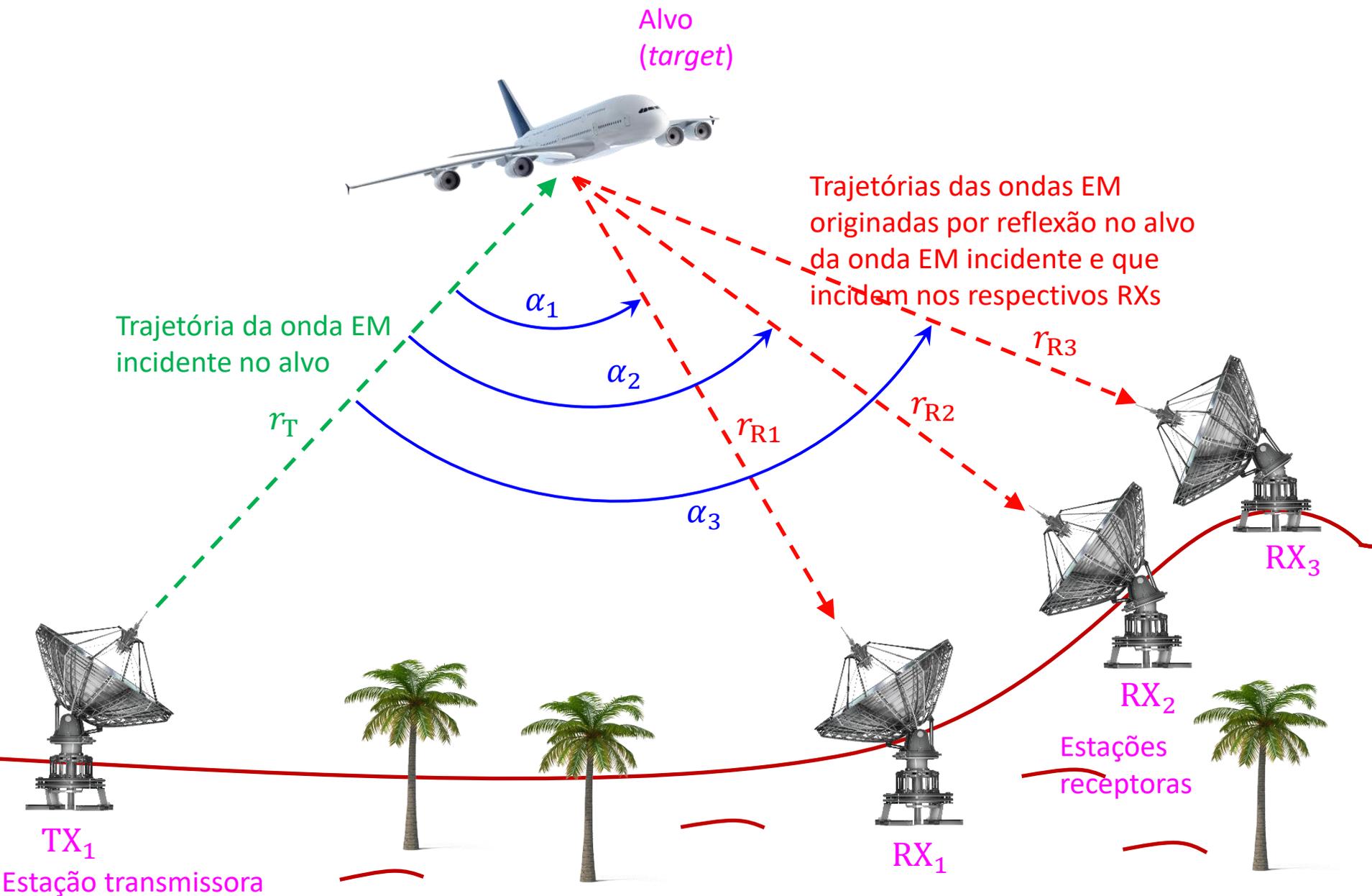


Configuração bistática

Ver <https://www.radartutorial.eu/05.bistatic/bs04.pt.html>



Configuração multistática (exemplo com 1TX e 3RXs)

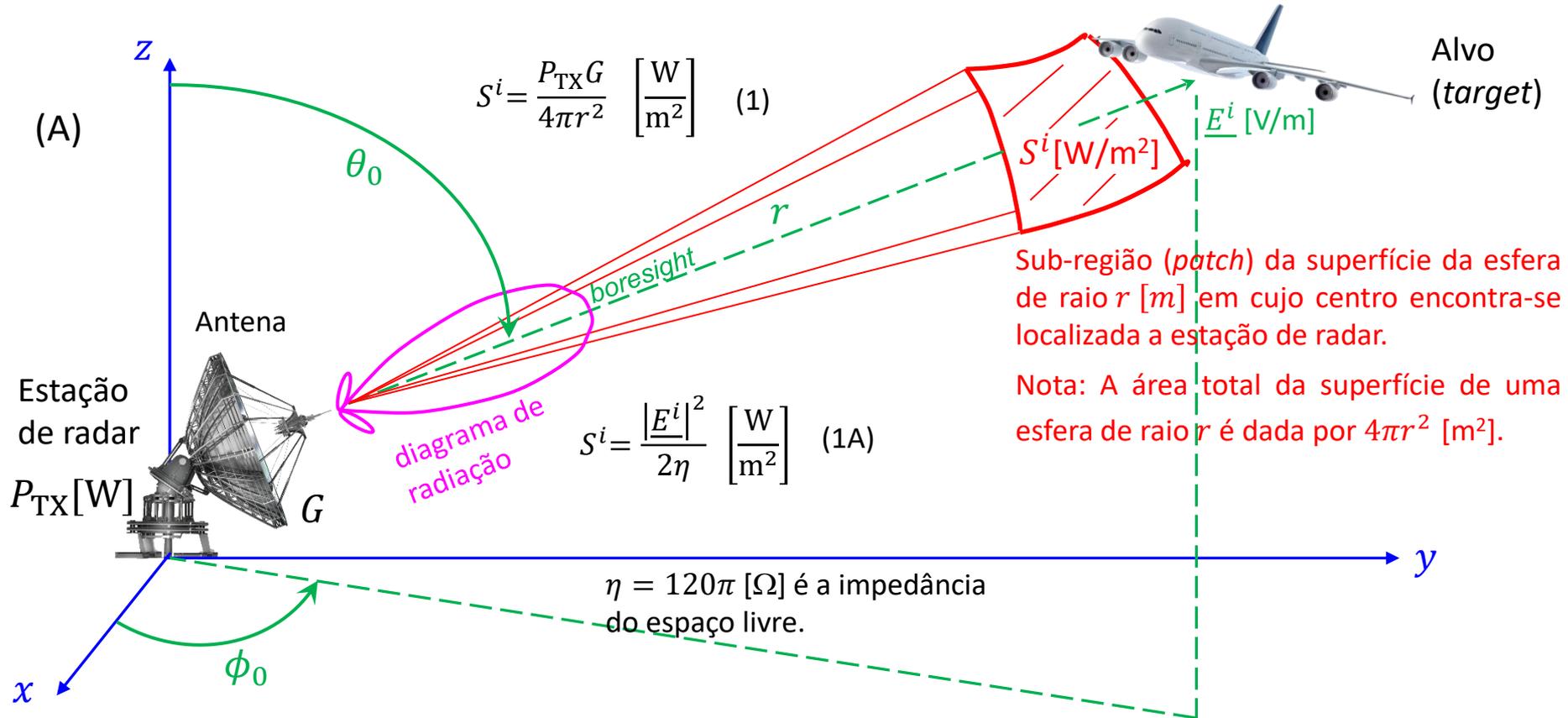


Range

A figura em (A) abaixo mostra uma estação de radar cujo antena é alimentada pelo amplificador de potência do TX com uma potência $P_{TX}[W]$, e, em consequência, irradia uma onda EM na direção do *boresight* do diagrama de radiação da antena (curva em magenta).

A direção (θ_0, ϕ_0) do *boresight* aponta para o alvo localizado nas coordenadas esféricas (r, θ_0, ϕ_0) a um **range** $r[m]$ da antena (= a uma distância r da antena), antena que possui um ganho G na direção (θ_0, ϕ_0) do *boresight*.

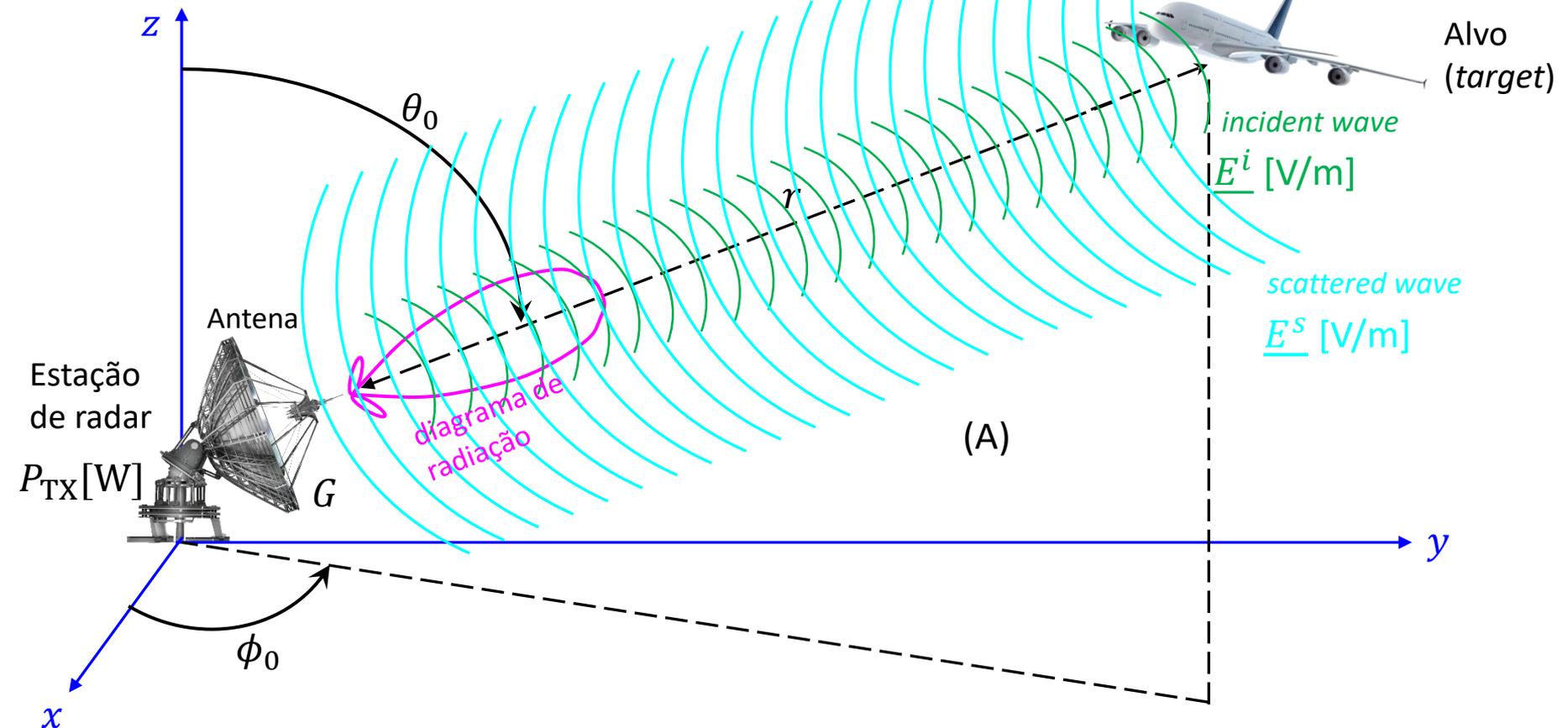
O campo elétrico \underline{E}^i [V/m] da onda EM que incide no alvo em consequência da onda EM irradiada pela antena gera um vetor de Poynting de magnitude S^i [W/m²] na sub-região da superfície esférica nas vizinhanças do alvo (em vermelho, abaixo) dado pela equação (1) ou alternativamente pela equação (1A) abaixo (ver discussão e exemplos nos slides 33 a 43 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf):



Range

Quando a onda EM irradiada pela antena do radar (em verde, abaixo) incide no alvo, as correntes elétricas induzidas pelo campo elétrico \underline{E}^i [V/m] incidente nas estruturas condutoras do alvo re-irradiam novamente a onda EM incidente (*incident wave*) e retornam no sentido contrário da propagação da onda incidente uma onda EM espalhada (*scattered wave*) com campo elétrico \underline{E}^s [V/m] nas vizinhanças do alvo. A onda EM com campo elétrico \underline{E}^s [V/m] é denominada de **eco do alvo**.

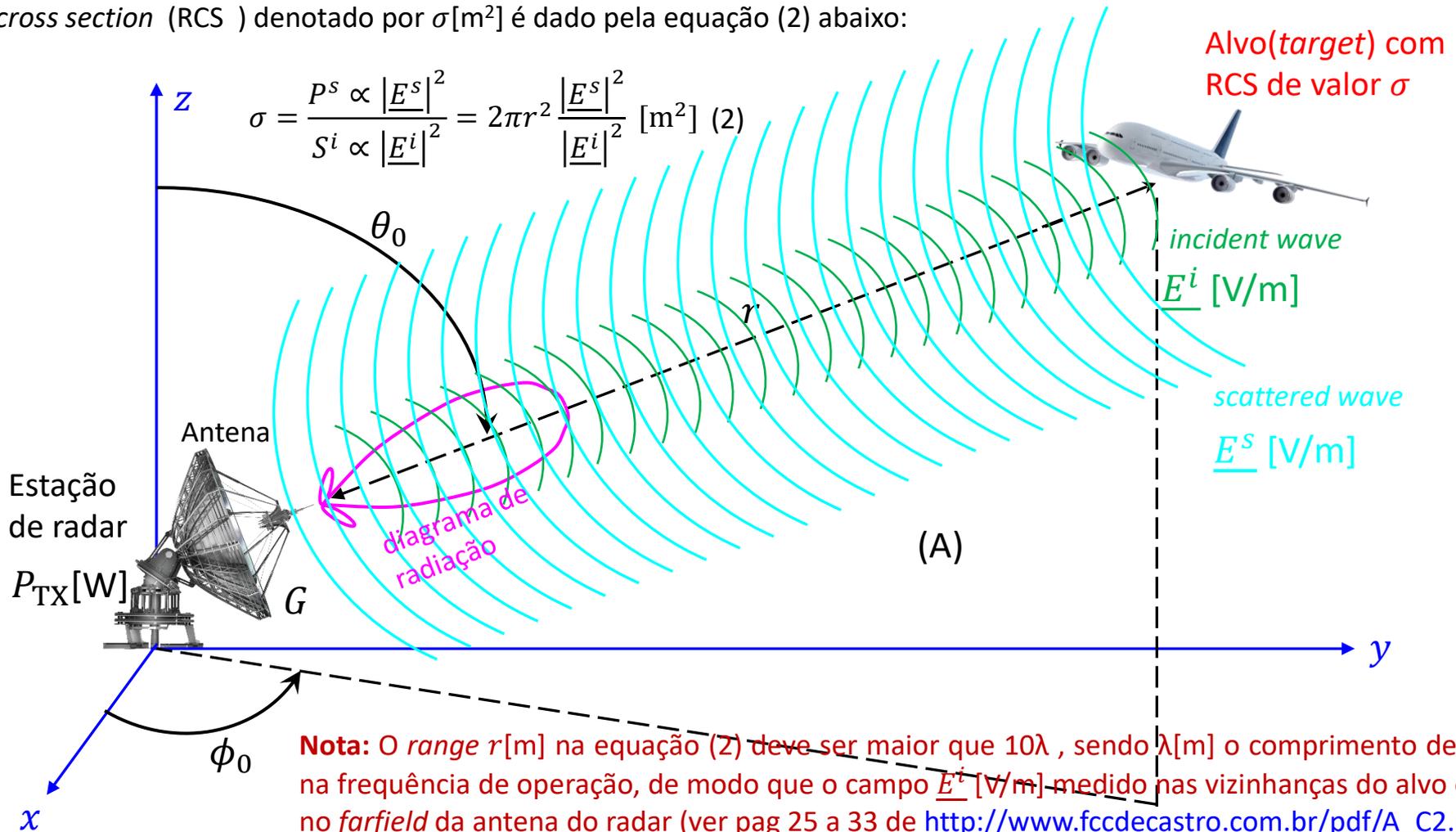
As frentes de onda da onda EM espalhada (em azul claro) ocupam no espaço \mathbb{R}^3 um ângulo sólido bem maior do que o ângulo sólido ocupado pelas frentes de onda da onda EM incidente. **A densidade superficial da potência espalhada (= magnitude do vetor de Poynting da onda espalhada) é basicamente proporcional ao tamanho do alvo e é função da orientação angular do alvo, da forma do alvo e da permissividade elétrica, da permeabilidade magnética e da condutividade elétrica dos materiais que constituem o alvo.**



Range e RCS (radar cross section) do alvo

Os efeitos de todos esses fatores do alvo são agrupados em um único parâmetro específico do alvo denominado **seção transversal do radar (RCS – radar cross section)** e denotado por $\sigma[\text{m}^2]$. O RCS de um alvo é definido como a razão entre a potência P^s [W] da *scattered wave* re-irradiada na direção da estação de radar, que é $\propto |E^s|^2$, e a magnitude S^i [W/m²] do vetor de Poynting da *incident wave* que incide no alvo, que não só é $\propto |E^i|^2$ como é dado por $S^i = |E^i|^2 / (2\pi r^2)$, sendo E^s e E^i medidos nas vizinhanças do alvo sob a mesma impedância do meio $\eta = 120\pi$ [Ω]. Neste contexto o *radar cross section* (RCS) denotado por $\sigma[\text{m}^2]$ é dado pela equação (2) abaixo:

$$\sigma = \frac{P^s \propto |E^s|^2}{S^i \propto |E^i|^2} = 2\pi r^2 \frac{|E^s|^2}{|E^i|^2} \text{ [m}^2\text{]} \quad (2)$$



Range e RCS (radar cross section) do alvo

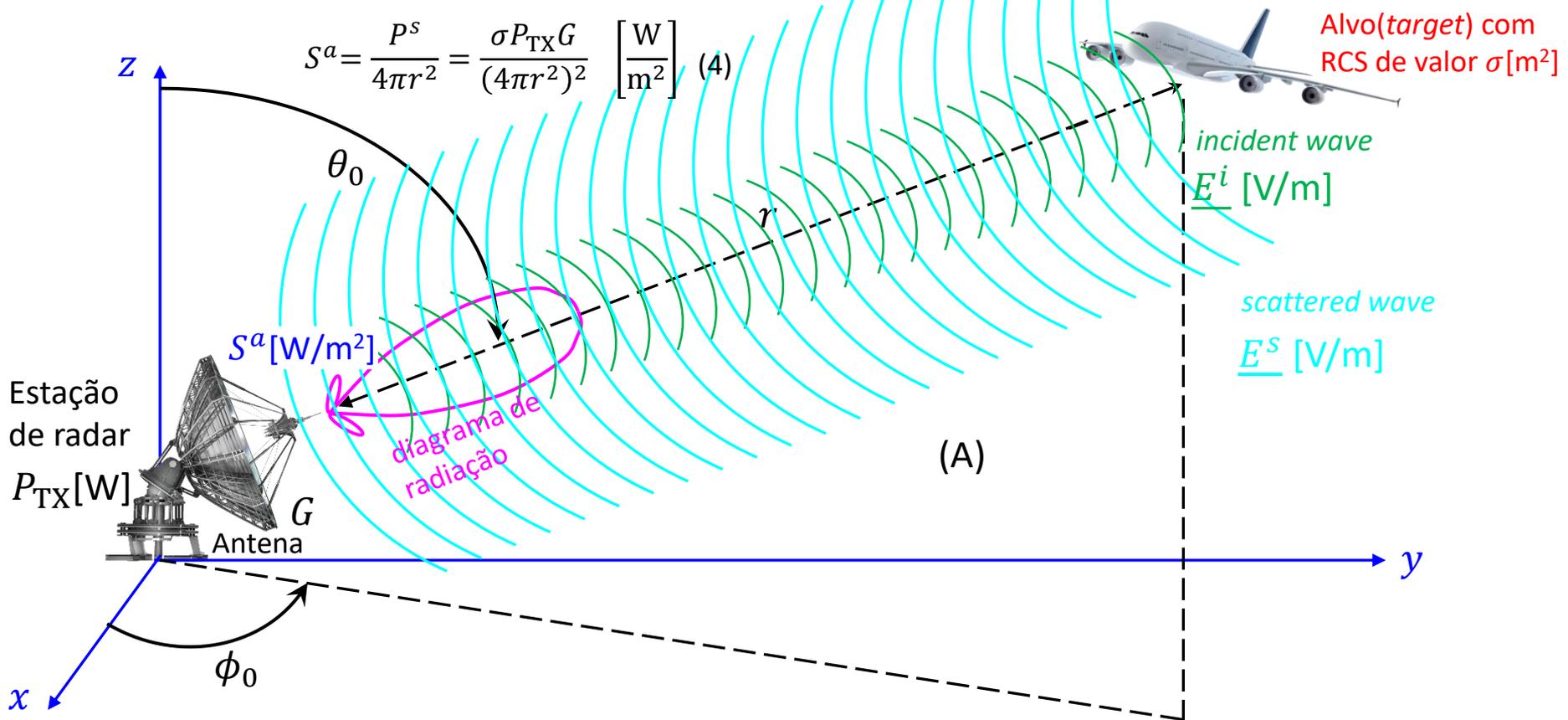
Das equações (2) e (1), a potência P^s [W] da *scattered wave* re-irradiada na direção da estação de radar e medida nas vizinhanças do alvo é dada por (3) abaixo:

$$P^s = \sigma S^i = \frac{\sigma P_{TX} G}{4\pi r^2} [W] \quad (3)$$

Neste contexto, o alvo pode ser interpretado como um **irradiador isotrópico** (ver discussão nos slides 34 e 35 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf) excitado pela potência P^s [W] dada por (3) medida nas vizinhanças do alvo, e esta antena isotrópica que representa o alvo re-irradia a *scattered wave* na direção da estação de radar.

Sob esta interpretação, a *scattered wave* originada pela potência P^s [W] nas vizinhanças do alvo se propaga na direção da estação de radar ao longo da distância r [m] e gera um vetor de Poynting de magnitude S^a [W/m²] nas vizinhanças da antena, conforme mostrado em (A) abaixo, sendo S^a [W/m²] dado por (4) abaixo (onde foi usada a equação (3)):

$$S^a = \frac{P^s}{4\pi r^2} = \frac{\sigma P_{TX} G}{(4\pi r^2)^2} \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (4)$$



Range e RCS (radar cross section) do alvo

O gráfico do RCS de um alvo é semelhante ao gráfico do padrão de radiação (= diagrama de radiação) de uma antena, conforme mostrado em (A) abaixo (ver também animação em <https://www.aereo.jor.br/2010/02/01/um-pouco-sobre-secao-reta-radar-rcs-e-tecnologia-stealth/>). O padrão de radiação de uma antena é originado na distribuição espacial de correntes na estrutura da antena, correntes que são estabelecidas pela potência gerada no TX conectado aos terminais (*port*) da antena por uma linha de transmissão (em geral um cabo coaxial ou uma guia de onda). De maneira análoga, o RCS é originado na distribuição espacial de correntes na estrutura do alvo, correntes que são induzidas na estrutura do alvo como resultado do campo elétrico \underline{E}^i [V/m] da onda EM incidente no alvo em consequência da onda EM irradiada pela antena do TX do radar. Ou seja, o mecanismo de radiação para uma antena com correntes estabelecidas pela excitação de um TX é o mesmo mecanismo de radiação para um alvo com correntes estabelecidas pelo campo elétrico \underline{E}^i [V/m] da onda EM que incide no alvo.

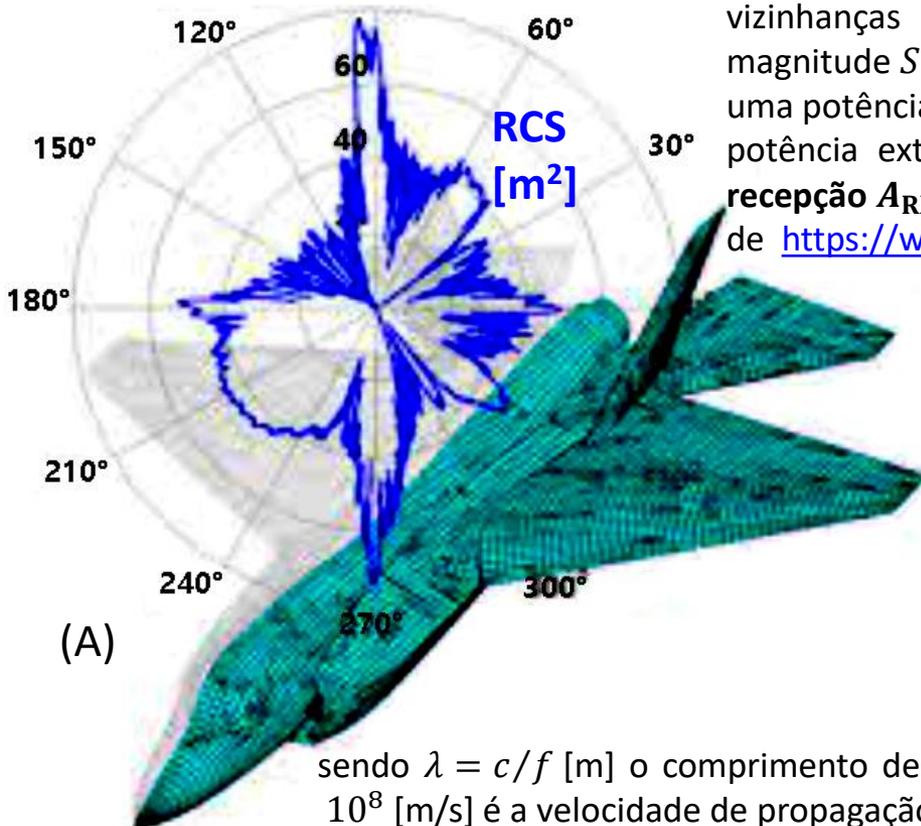
Neste contexto, a densidade superficial de potência das frentes de onda nas vizinhanças da antena do radar (expressa pelo vetor de Poynting de magnitude S^a [W/m²], conforme mostrado em (A) no slide anterior) entrega uma potência P_{RX} [W] aos terminais da antena do radar que é proporcional à potência extraída das frentes de onda da onda EM através da **área de recepção** A_{RX} [m²] da antena receptora (ver discussão sobre A_{RX} no slide 44 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf).

Assim, para determinar a potência P_{RX} [W] do sinal disponível nos terminais da antena do radar, potência que é entregue ao amplificador de baixo ruído (LNA – *low noise amplifier*) no *front-end* do RX do radar, basta multiplicar a densidade superficial de potência S^a [W/m²] dada por (4) pela área de recepção A_{RX} [m²] da antena do radar, conforme equação (5):

$$P_{RX} = S^a A_{RX} = \frac{\sigma P_{TX} G A_{RX}}{(4\pi r^2)^2} \quad [W] \quad (5)$$

$$\text{onde } A_{RX} = G \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad [m^2] \quad (6)$$

sendo $\lambda = c/f$ [m] o comprimento de onda na frequência f [Hz] de operação, e $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] é a velocidade de propagação da onda EM no espaço livre.



Equação do range

Substituindo (6) em (5) obtemos:

$$P_{RX} = \frac{\sigma P_{TX} G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 r^4} \quad [W] \quad (7)$$

Note em (7) que a potência P_{RX} [W] recebida no *front-end* do RX do radar é **inversamente proporcional a r^4** , sendo r o **range do alvo**. Isso significa que duplicar a distância do radar ao alvo (= duplicar o *range* do *target*) resulta em uma perda de potência de um fator de 16, o que equivale a $10\log(16) \cong 12$ [dB] de perda na potência P_{RX} [W] recebida. Em uma análise similar, para aumentar o alcance de detecção (*detection range*) de um alvo (*target*) por um fator de 2 exige 16 vezes mais potência irradiada pela antena do TX do radar (12 dB a mais na potência irradiada pela antena do TX do radar).

Note também em (7) que a **potência P_{RX} [W] recebida no *front-end* do RX do radar é diretamente proporcional ao RCS do alvo**, expresso por σ em (7). A tabela abaixo mostra o RCS de objetos-alvo quando os mesmos são iluminados por uma onda EM irradiada pelo TX de um radar que opera na banda X.

Valores de RCS típicos para objetos iluminados por uma onda EM de frequência na banda X		
Ver também https://www.fccdecastro.com.br/pdf/LOPSAAST.pdf .		
Objeto	RCS [m ²]	RCSdB = 10 log (RCS) [dBsm]
Navio p/ transporte de containers	50000	47
Refletor de canto	20000	43
Automóvel	100	20
Jato comercial	40	16
Lancha com cabine/ iate pequeno	10	10
Aeronave caça militar de tamanho grande (Mikoyan Gurevich MIG 29)	5	7
Corpo humano	1	0
Míssil superfície-ar	0.5	- 3
Aeronave caça militar de tamanho pequeno (Saab JAS 39 Gripen)	0.1	- 10
Aeronave caça tático de 5ª geração (Lockheed Martin F-35)	1×10^{-3}	- 30
Inseto	1×10^{-5}	- 50

Máximo alcance de detecção de um alvo (*target maximum detection range*)

A antena do RX de um radar entrega o sinal dos ecos dos alvos para o *front-end* analógico do RX. O primeiro bloco do *front-end* do RX de um radar é um amplificador de baixo ruído (LNA—*low noise amplifier*) com baixa *noise figure* (figura de ruído – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Noise_figure) de modo a amplificar o sinal dos ecos recebidos dos alvos sem adicionar ruído térmico excessivo ao sinal (ver slide 6 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf).

O LNA domina o nível de ruído térmico gerado internamente no *front-end* analógico do RX e, conseqüentemente, determina a sensibilidade do sistema de radar (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SLAA652.pdf>). Neste contexto, há um nível mínimo de potência de sinal P_{RXmin} [W] na entrada do LNA abaixo do qual o radar não consegue detectar os alvos porque a SNR (*signal to noise ratio*) cai abaixo do limiar que permite o RX demodular o sinal recebido sem que ocorram erros de detecção de sinal no demodulador do RX (ver slides 47 a 54 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf).

Quanto maior for o nível mínimo de potência de sinal P_{RXmin} [W] necessário na entrada do LNA para que não ocorra erros de detecção de sinal no demodulador menor será o *range* máximo r_{max} [m] alcançável na detecção de alvos. O valor de r_{max} pode ser obtido de (7), substituindo r por r_{max} e P_{RX} por P_{RXmin} e resolvendo para r_{max} , resultando em:

$$r_{max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma P_{TX} G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 P_{RXmin}}} \quad (8)$$

Exemplo 1: Um radar *pulse-Doppler* opera na frequência $f_0 = 10.745$ [GHz] e o seu TX tem uma potência de pico $P_{TX} = 12$ [KW]. O ganho na direção do *boresight* do diagrama de radiação da antena é 30 [dBi] e o RX do radar tem uma sensibilidade $V_{min} = 0.316$ [μ V] com uma impedância $Z_{in} = 50$ [Ω] na entrada do LNA. O alvo a ser detectado é um caça Boeing F-18E (https://en.wikipedia.org/wiki/Boeing_F/A-18E/F_Super_Hornet), cujo RCS é $\sigma = 0.75$ [m^2] (ver tabela de RCS em <https://www.aereo.jor.br/2010/02/01/um-pouco-sobre-secao-reta-radar-rcs-e-tecnologia-stealth/>). **Pede-se:** Determine o máximo *range* r_{max} do radar para este alvo.

$$P_{RXmin} = \frac{\left(\frac{V_{min}}{\sqrt{2}}\right)^2}{Z_{in}} = 1.000 \times 10^{-3} \text{ [pW]} \quad G = 10^{\frac{30 \text{ [dBi]}}{10}} = 1000 \quad \lambda = \frac{c}{f_0} = 27.901 \text{ [mm]}$$

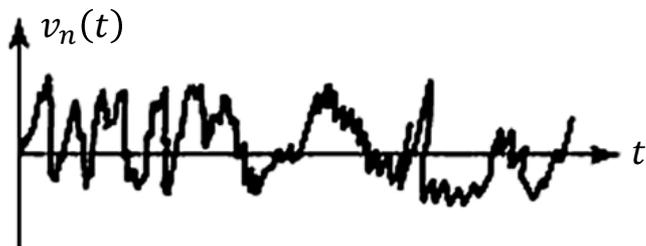
De (8):

$$r_{max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma P_{TX} G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 P_{RXmin}}} = 43.347 \text{ [Km]}$$

O efeito do ruído no mínimo sinal detectável

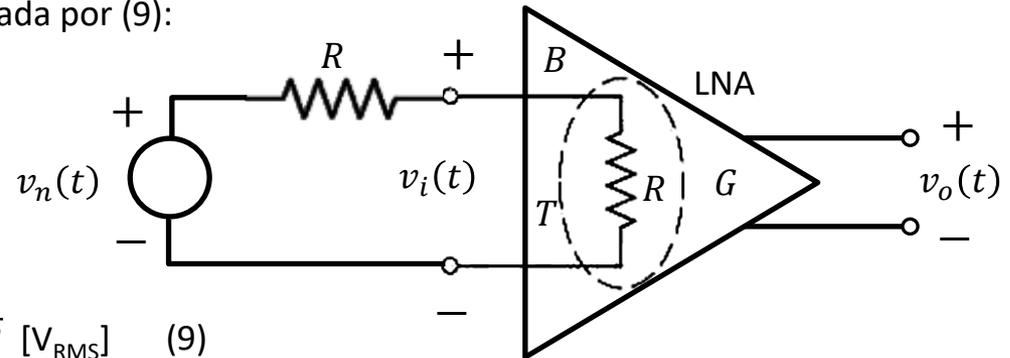
Conforme já discutido no slide anterior, o LNA domina o nível de ruído térmico gerado internamente no *front-end* analógico do RX do radar e este ruído térmico interno do *front-end* analógico degrada a inteligibilidade do sinal recebido pela antena diminuindo o alcance máximo r_{\max} de detecção de alvos do radar. **A degradação da inteligibilidade do sinal recebido ocorre porque há um nível mínimo de potência de sinal P_{RXmin} [W] na entrada do LNA abaixo do qual o radar não consegue detectar os alvos em consequência da SNR (*signal to noise ratio*) cair abaixo do limiar que permite o RX demodular o sinal recebido dos ecos sem que ocorram erros de detecção de sinal no demodulador do RX. Os erros de detecção de sinal passam a ocorrer a partir deste limiar de SNR porque o nível de ruído térmico passa a ser significativo em relação ao nível de sinal ao ponto de causar erros no processo de demodulação de símbolos IQs efetuado no demodulador do RX do radar (ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf).**

Consideremos um amplificador operando na temperatura T [K] com ganho G , banda de passagem B [Hz] e resistência de entrada R [Ω], conforme mostrado abaixo. O ruído térmico gerado internamente ao amplificador pode ser representado por um gerador de tensão $v_n(t)$ de ruído equivalente aplicado aos terminais do amplificador em série com um resistor de valor R , conforme abaixo. O valor eficaz $v_{n(\text{RMS})}$ de $v_n(t)$ é dado pela aproximação de Rayleigh-Jeans (ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/TNNM.pdf>), dada por (9):



$$v_{n(\text{RMS})} = \sqrt{4kTBR} \text{ [V}_{\text{RMS}}] \quad (9)$$

onde $k = 1.38064852 \times 10^{-23}$ [J/K] é a constante de Boltzmann.



A tensão $v_n(t)$ de ruído é um sinal com distribuição Gaussiana de amplitudes e com densidade espectral de potência $PSD(f)$ uniforme no domínio frequência f (= ruído branco) – ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SLAA652.pdf>. Por ser um ruído branco (*white noise*) a densidade espectral de potência do sinal de ruído térmico gerado nos terminais de entrada do amplificador é dada pela equação (10):

$$PSD(f) = kT \text{ [W/Hz]} \quad (10)$$

O efeito do ruído no mínimo sinal detectável

Em uma análise análoga, o ruído térmico de potência $N_{interno}$ gerado internamente ao amplificador pode ser expresso por uma fonte equivalente externa de ruído de mesma potência $N_{interno}$ conectada na entrada do amplificador. Assumindo que o amplificador em análise seja um LNA no *front-end* analógico do RX do radar, e que o RX do radar tenha uma largura de banda operacional B [Hz] e opera sob uma temperatura T [K], a potência de ruído $N_{interno}$ da fonte equivalente é dada pela equação (11), obtida a partir de (10):

$$N_{interno} = PSD(f)B = kTB \text{ [W]} \quad (11)$$

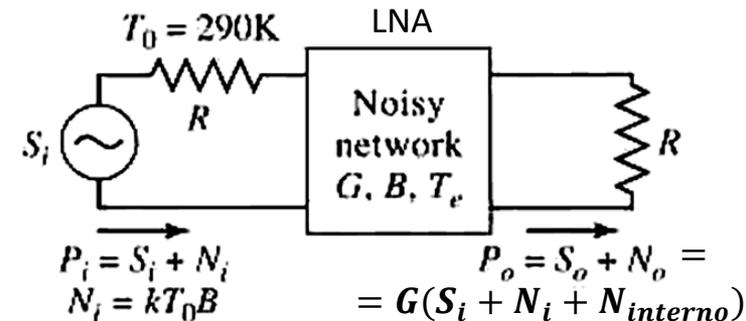
onde T [K] é denominado de **temperatura equivalente de ruído** $T_e = \frac{N_{interno}}{kB}$ do amplificador.

Embora amplificadores possam ser caracterizados quanto ao ruído térmico gerado internamente através da temperatura equivalente de ruído T_e do amplificador, nos *datasheets* destes dispositivos é usual-

mente adotada a caracterização através do fator de ruído F (*noise factor*) do amplificador, que, quando convertido para [dB], passa a ser denominado figura de ruído NF (*noise figure*) do amplificador, i.e, $NF = 10\log(F)$ [dB]. O fator de ruído F de um amplificador é dado por (12) (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SLAA652.pdf>):

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} = \frac{SNR_i}{SNR_o} \quad (12)$$

onde S_i [W] e N_i [W] são respectivamente as potências de sinal e ruído na entrada e S_o [W] e N_o [W] são respectivamente as potências de sinal e ruído na saída do amplificador cujo ganho de potência é G e cuja banda operacional é B [Hz], conforme mostra a figura acima. SNR_i e SNR_o são respectivamente a relação sinal-ruído (*signal to noise ratio*) na entrada e na saída do amplificador.



Neste contexto, o *noise figure* NF [dB] de um amplificador expressa quantos dBs devem ser subtraídos da SNR_i para representar a degradação de sinal causada pelo ruído interno do amplificador, resultando assim a relação sinal-ruído SNR_o [dB] = SNR_i [dB] - NF [dB] na saída do amplificador.

Note na figura acima que N_i é gerado por um resistor R de valor idêntico à resistência de entrada do amplificador. A temperatura de operação deve ser $T_0 = 290K$, conforme padronização estabelecida pelo IEEE para definição da NF .

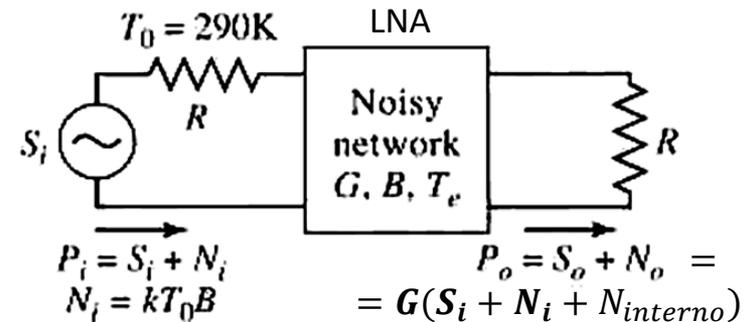
O efeito do ruído no mínimo sinal detectável

Note também que $F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} = \frac{SNR_i}{SNR_o}$ é sempre maior que 1.0 porque a potência $N_{interno}$ do ruído gerada internamente e com temperatura equivalente de ruído $T_e = \frac{N_{interno}}{kB}$ aumenta a potência de ruído N_o na saída do amplificador, de modo que a SNR_i na entrada do amplificador sempre será maior que a SNR_o na saída do amplificador.

Idealmente, deseja-se um amplificador com $F = 1.0$ ($NF = 10 \log(1.0) = 0$ [dB]), significando que a SNR_o na saída do amplificador não é degradada por ruído porque não há ruído térmico interno gerado no amplificador, e que, portanto, SNR_o é igual à SNR_i na entrada do amplificador. Obviamente não existe este amplificador ideal na prática.

Note ainda que $S_i/N_i = \frac{S_i}{kT_0B}$ e que $S_o/N_o = \frac{GS_i}{G(N_i + N_{interno})} = \frac{GS_i}{G(kT_0B + kT_eB)}$, e portanto, temos de (12):

$$F = \frac{S_i/N_i}{S_o/N_o} = \frac{S_i}{kT_0B} \frac{G(kT_0B + kT_eB)}{GS_i} = 1 + \frac{T_e}{T_0} \quad (13)$$



De (13), observe novamente que $F > 1.0$ a menos que a temperatura $T_e = \frac{N_{interno}}{kB}$ seja zero, situação em que $F = 1.0$, ou, equivalentemente $NF = 0$ [dB]. Por esta razão, não raro LNAs no *front-end* analógico de radares de longo alcance e no *front-end* analógico de rádio-telescópios são resfriados à temperaturas criogênicas, sendo imersos em nitrogênio líquido a +77 K (-196°C) de modo a se obter *noise figures* da ordem de $NF = 0.2$ [dB] (ver <https://www.microwavejournal.com/articles/2610-miniature-low-noise-cryogenic-amplifiers>). De (12), com

$SNR_i = S_i/N_i = \frac{S_i}{kT_0B}$, obtemos a potência de sinal S_i na entrada do LNA para que se obtenha uma determinada relação sinal-ruído SNR_o na saída do mesmo:

$$S_i = FkT_0B SNR_o \text{ [W]} \quad (14)$$

Fazendo S_i em (14) ser igual ao nível mínimo de potência de sinal P_{RXmin} [W] na entrada do LNA abaixo do qual o RX do radar não consegue detectar o alvo (o RX não consegue detectar o alvo porque a SNR na saída do *front-end* analógico cai abaixo do limiar SNR_{omin} que permite o demodulador do RX demodular o sinal recebido sem que ocorram erros de detecção de sinal), obtemos:

$$P_{RXmin} = FkT_0B SNR_{omin} \text{ [W]} \quad (15)$$

O efeito do ruído no mínimo sinal detectável

Substituindo (15) em (8) obtemos o range máximo r_{\max} em função da relação sinal-ruído mínima SNR_{omin} necessária na saída do *front-end* analógico do RX, conforme equação (16) abaixo.

$$r_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma P_{\text{TX}} G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 F k T_0 B SNR_{\text{omin}}}} \quad [\text{m}] \quad (16)$$

Um valor muito elevado para a relação sinal-ruído mínima SNR_{omin} necessária na saída do *front-end* significa que o RX do radar é insensível ao sinal dos ecos em consequência da degradação de sinal causada pelo nível de ruído térmico, só conseguindo detectar o sinal do eco do alvo quando o nível deste for muito maior que o nível de ruído térmico gerado internamente no *front-end*. Portanto, quanto maior for a especificação do SNR_{omin} necessária na saída do *front-end* para que o RX demodule o sinal do eco sem erros de detecção de sinal menor será o *range* máximo r_{\max} [m] alcançável na detecção de alvos. Note que isto está implícito na equação (16).

Para incluir a perda de sinal devido à atenuação na linha de transmissão que conecta o TX/RX à antena, incluir eventuais perdas de sinal por atenuação da onda EM ao se propagar (*fading* e *scintillation*), como também incluir demais eventuais perdas, é usual acrescentar à (15) um fator L que representa a totalidade destas perdas:

$$P_{\text{RXmin}} = F k T_0 L B SNR_{\text{omin}} \quad [\text{W}] \quad (17)$$

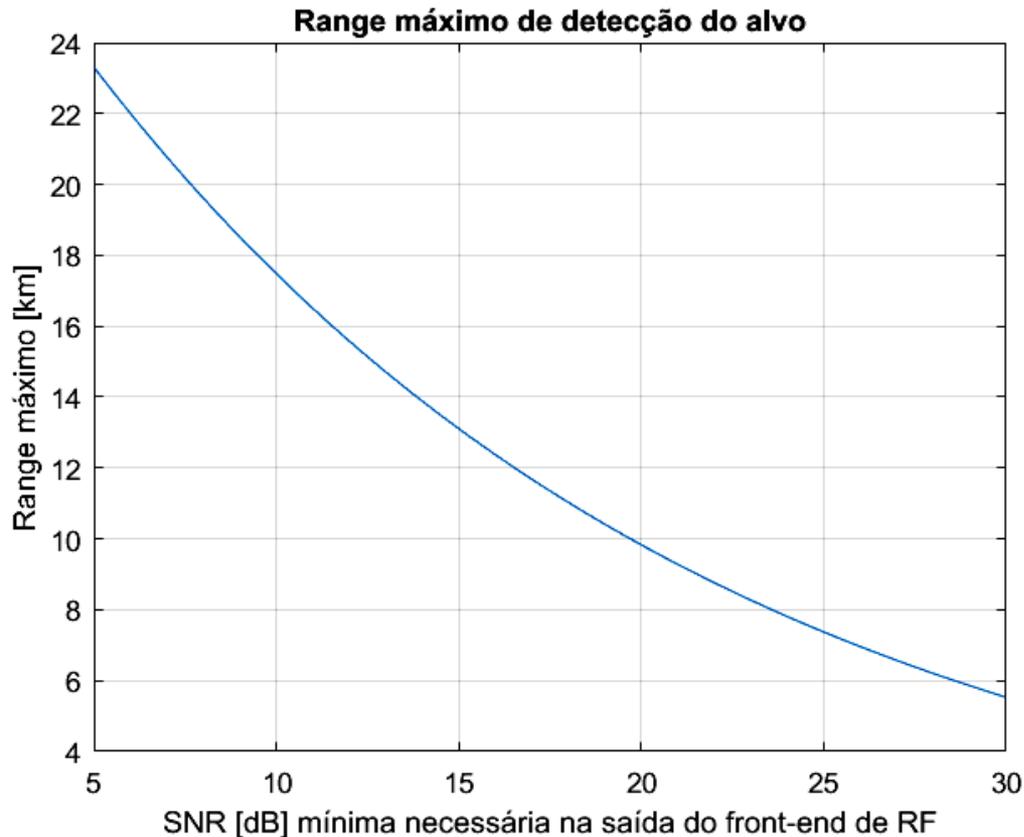
Com o acréscimo deste fator L em (17), e substituindo (17) em (8), o range máximo r_{\max} resulta:

$$r_{\max} = \sqrt[4]{\frac{\sigma P_{\text{TX}} G^2 \lambda^2}{(4\pi)^3 F k T_0 L B SNR_{\text{omin}}}} \quad [\text{m}] \quad (18)$$

O efeito do ruído no mínimo sinal detectável

Exemplo 2: Um radar *pulse-Doppler* opera na banda L na frequência $f_0 = 1.4$ [GHz] com uma banda operacional $B = 10$ [MHz]. O TX do radar tem uma potência de saída $P_{TX} = 5$ [KW_(peak)]. O *front-end* analógico do RX opera a uma temperatura $T_0 = 290K$ exibindo uma figura de ruído de 2.7 [dB]. A perda total na linha de transmissão que interliga TX/RX à antena é 2.2 [dB] e o ganho na direção do *boresight* do diagrama de radiação da antena é 25 [dBi]. O alvo a ser detectado exibe um RCS de 10 [dBsm]. **Pede-se:** (a) Plote o gráfico r_{max} [Km] \times SNR_{omin} [dB], com SNR_{omin} variando no intervalo [5dB, 30dB], sendo r_{max} o range máximo que o radar consegue detectar um alvo em função da limitação imposta pela relação sinal-ruído mínima SNR_{omin} necessária na saída do *front-end*. (b) Analise o resultado de (a) no contexto da operação do radar.

Solução: (a) O gráfico r_{max} [Km] \times SNR_{omin} [dB] pode ser obtido diretamente da equação (18), ou, alternativamente, através das equações (17) e (8). O script Matlab Exemplo2.m em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E2S28.zip implementa as equações (17) e (8), resultando no gráfico abaixo.



(b) Quanto maior for a relação sinal-ruído mínima SNR_{omin} necessária na saída do *front-end* analógico para que o RX demodule o sinal do eco sem erros de detecção de sinal menor será a sensibilidade do RX do radar ao sinal dos ecos em consequência da degradação de sinal causada pelo ruído térmico gerado internamente no *front-end*.

Para um valor muito elevado de SNR_{omin} o RX só conseguirá detectar o sinal do eco do alvo quando o nível deste for muito maior que o nível de ruído térmico gerado internamente no *front-end*.

Portanto, conforme mostra o gráfico, quanto maior for a SNR_{omin} necessária na saída do *front-end* para que o RX demodule o sinal do eco sem erros de detecção de sinal menor será o *range* máximo r_{max} alcançável na detecção de alvos.

Equação do range do radar bistático

Tem havido um crescente interesse na configuração bistática para radares, sejam passivos ou não (radares bistáticos passivos serão estudados no Cap III), em particular quando adota-se a configuração bistática *fence-like*, cuja operação se assemelha a uma cerca eletromagnética, sendo capaz de detectar alvos que cruzam a *baseline* entre TX e RX (reta tracejada de tamanho D em **marron** mostrada no próximo slide) com o ângulo bistático α próximo a 180° (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Bistatic_radar). Este é um caso especial de radar bistático, conhecido como radar de espalhamento frontal (*forward scatter radar*), designação que se refere ao mecanismo através do qual a energia irradiada pelo TX do radar é espalhada pelo alvo. No *forward scatter radar*, o espalhamento do alvo pode ser modelado através do princípio de Babinet (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/PCLWaveforms.pdf>). O *forward scatter radar* é potencialmente capaz de detectar alvos *stealth*, como os caças F-22 (https://en.wikipedia.org/wiki/Lockheed_Martin_F-22_Raptor) e F-35 (https://en.wikipedia.org/wiki/Lockheed_Martin_F-35_Lightning_II), já que a RCS dos alvos neste caso é determinada exclusivamente pela silhueta da aeronave vista pelo TX, não sendo afetada pelo revestimento absorvedor de ondas EM do alvo ou pela forma do alvo projetada para minimizar a reflexão e espalhamento da onda EM.

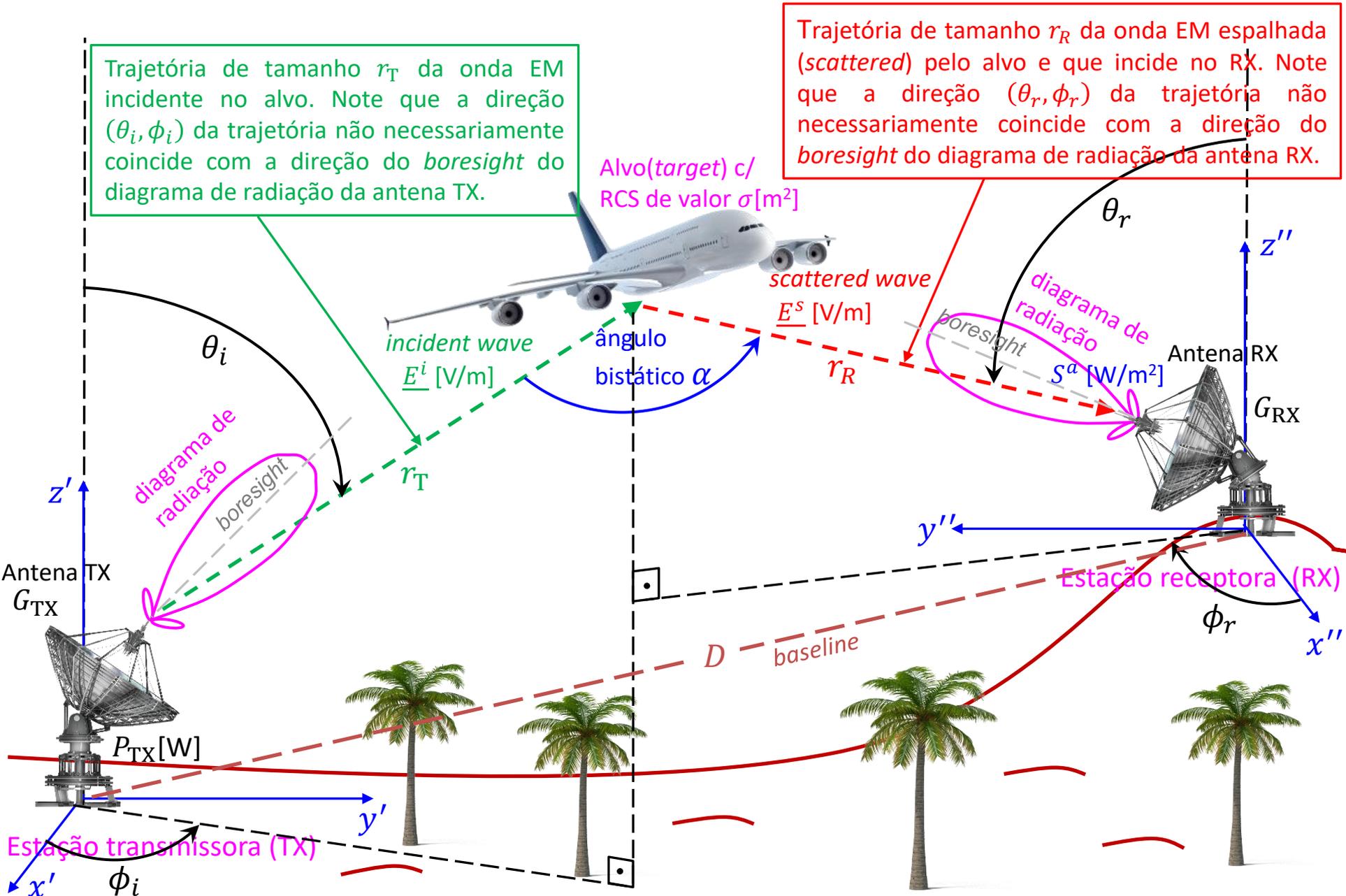
O próximo slide descreve um cenário típico de operação de um radar bistático no qual TX e RX não são co-localizados como no caso monostático. Dado que o RX está localizado longe do TX, reduz-se assim significativamente a probabilidade de ataques de mísseis anti-irradiação (https://pt.wikipedia.org/wiki/AGM-88_HARM) ou *jamming*. Note também que não há necessidade de *switch* TX-RX ou *duplexer* (<https://www.radartutorial.eu/06.antennas/Duplexer.en.html>), dispositivo que apresenta perdas, é de custo considerável e pesado. Além disto, radares bistáticos não sofrem do problema de *range* mínimo de radares monostáticos (ver slide 22 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_1.pdf), de modo que uma PRF (*pulse repetition frequency*) mais alta pode ser adotada.

No cenário operacional bistático mostrado no próximo slide, o campo elétrico \underline{E}^i [V/m] da onda EM que incide no alvo em consequência da onda EM irradiada pela antena TX gera um vetor de Poynting de magnitude S^i [W/m²] nas vizinhanças do alvo dado pela equação (19) abaixo (rever discussão e desenvolvimento algébrico no slide 26):

$$S^i = \frac{P_{TX} G_{TX}(\theta_i, \phi_i)}{4\pi r_T^2} \left[\frac{W}{m^2} \right] \quad (19)$$

Note que G_{TX} em (19) é função dos ângulos (θ_i, ϕ_i) da trajetória da onda EM incidente no alvo. Isto ocorre porque (θ_i, ϕ_i) não necessariamente coincide com a direção do *boresight* do diagrama de radiação da antena TX na operação bistática, conforme cenário operacional mostrado próximo slide.

Equação do range do radar bistático



Trajetória de tamanho r_T da onda EM incidente no alvo. Note que a direção (θ_i, ϕ_i) da trajetória não necessariamente coincide com a direção do boresight do diagrama de radiação da antena TX.

Trajetória de tamanho r_R da onda EM espalhada (scattered) pelo alvo e que incide no RX. Note que a direção (θ_r, ϕ_r) da trajetória não necessariamente coincide com a direção do boresight do diagrama de radiação da antena RX.

Alvo(target) c/ RCS de valor σ [m²]

Equação do range do radar bistático

Em um procedimento similar ao da dedução da equação (3) no slide 29, a potência P^s [W] da *scattered wave* de campo elétrico \underline{E}^s [V/m] re-irradiada na direção da estação RX do radar (ver cenário operacional no slide 39) e medida nas vizinhanças do alvo de RCS σ [m²] é dada por (20) abaixo:

$$P^s = \sigma S^i = \frac{\sigma P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}(\theta_i, \phi_i)}{4\pi r_T^2} \quad [\text{W}] \quad (20)$$

Importante notar que a RCS do alvo no caso bistático é função dos ângulos (θ_i, ϕ_i) da trajetória da onda EM incidente no alvo e dos ângulos (θ_r, ϕ_r) da trajetória da onda EM espalhada (*scattered*) pelo alvo (ver slide 39). Neste estudo, vamos aproximar o RCS bistático pelo RCS monostático do alvo para efeito de simplificação dos exemplos e exercícios.

A *scattered wave* originada pela potência P^s [W] nas vizinhanças do alvo se propaga na direção da estação RX do radar ao longo da distância r_R [m] e gera um vetor de Poynting de magnitude S^a [W/m²] nas vizinhanças da antena RX (ver cenário operacional no slide 39), sendo S^a [W/m²] dado por (21) abaixo (onde foi usada a equação (20)):

$$S^a = \frac{P^s}{4\pi r_R^2} = \frac{\sigma P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}(\theta_i, \phi_i)}{(4\pi)^2 r_T^2 r_R^2} \quad \left[\frac{\text{W}}{\text{m}^2} \right] \quad (21)$$

De maneira similar ao desenvolvimento analítico efetuado no slide 30, para determinar a potência P_{RX} [W] do sinal disponível nos terminais da antena RX do radar, potência que é entregue ao amplificador de baixo ruído (LNA – *low noise amplifier*) no *front-end* do RX do radar, multiplica-se a densidade superficial de potência S^a [W/m²] dada por (21) pela área de recepção A_{RX} [m²] da antena RX do radar, conforme equação (22):

$$P_{\text{RX}} = S^a A_{\text{RX}} = \frac{\sigma P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}(\theta_i, \phi_i) A_{\text{RX}}}{(4\pi)^2 r_T^2 r_R^2} \quad [\text{W}] \quad (22)$$

onde $A_{\text{RX}} = G_{\text{RX}}(\theta_r, \phi_r) \frac{\lambda^2}{4\pi}$ [m²], $\lambda = c/f$ [m] é o comprimento de onda na frequência f [Hz] de operação, e $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] é a velocidade de propagação da onda EM no espaço livre.

Note que A_{RX} no caso bistático é função dos ângulos (θ_r, ϕ_r) da trajetória da onda EM espalhada (*scattered*) pelo alvo. Isto ocorre porque (θ_r, ϕ_r) não necessariamente coincide com a direção do *boresight* do diagrama de radiação da antena RX, conforme cenário operacional mostrado no slide 39.

Equação do *range* do radar bistático

Substituindo $A_{RX} = G_{RX}(\theta_r, \phi_r) \frac{\lambda^2}{4\pi}$ [m²] em (22), obtemos:

$$P_{RX} = \frac{\sigma P_{TX} G_{TX}(\theta_i, \phi_i) G_{RX}(\theta_r, \phi_r) \lambda^2}{(4\pi)^3 r_T^2 r_R^2} \text{ [W]} \quad (23)$$

Substituindo (17) em (23) e resolvendo para SNR_{omin} obtemos a relação sinal-ruído mínima passível de ser obtida na saída do *front-end* analógico em função dos parâmetros operacionais do radar, conforme mostra a equação (24). A SNR_{omin} obtida de (24) deve ser maior que a especificação da SNR mínima necessária para que o demodulador digital do RX do radar consiga detectar o alvo. Caso esta condição não seja atendida, o nível de ruído térmico gerado internamente no *front-end* será demasiadamente alto em relação ao sinal de eco do alvo, de modo que o RX não conseguirá demodular o sinal recebido sem que ocorram erros de detecção de sinal no demodulador do RX.

$$SNR_{\text{omin}} = \frac{\sigma P_{TX} G_{TX}(\theta_i, \phi_i) G_{RX}(\theta_r, \phi_r) \lambda^2}{(4\pi)^3 F k T_0 L B r_T^2 r_R^2} \quad (24)$$

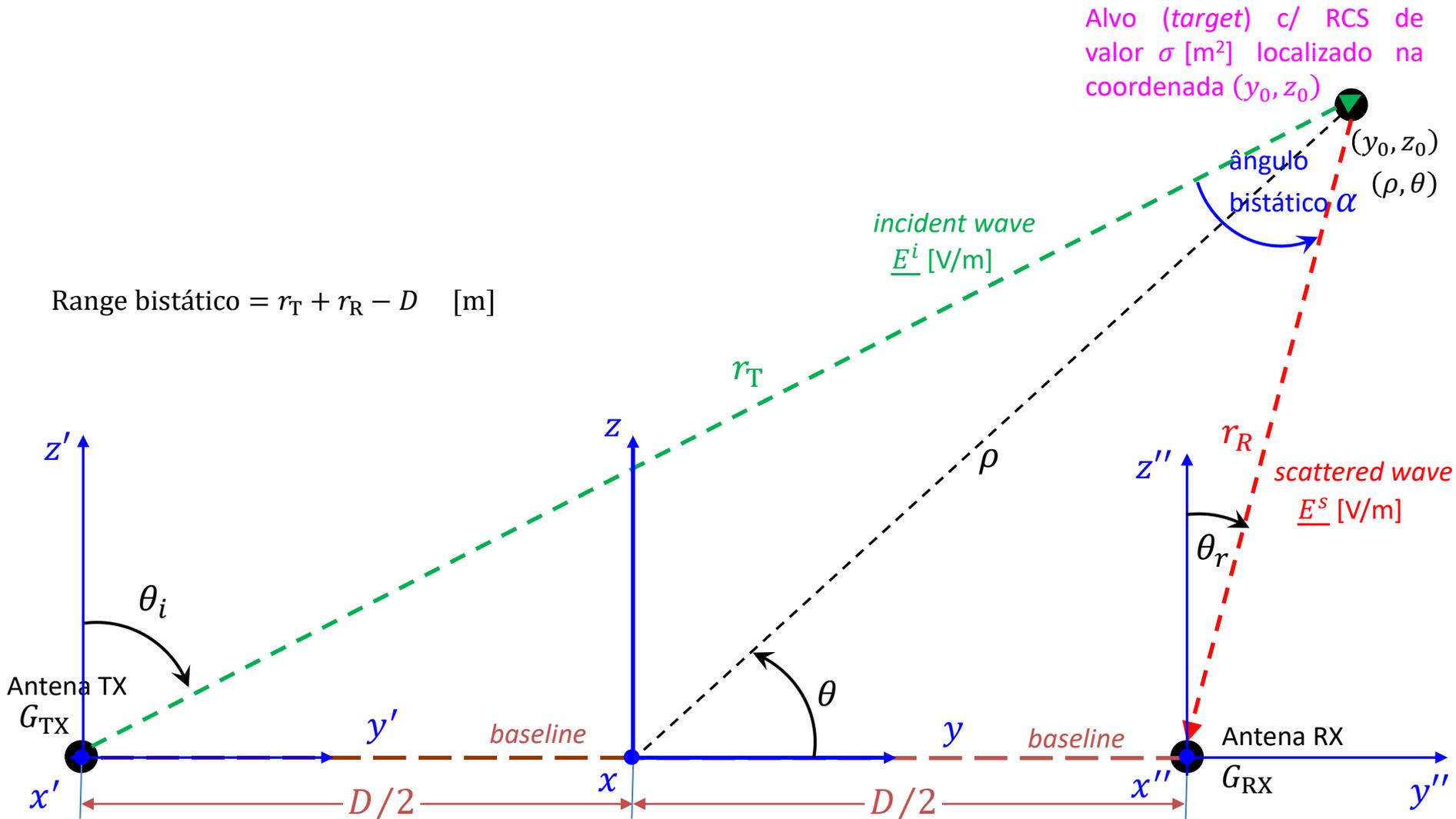
onde o fator L em (24) inclui: a perda de sinal por atenuação na linha de transmissão que conecta o TX à sua antena, a perda de sinal por atenuação na linha de transmissão que conecta o RX à sua antena, eventuais perdas de sinal por atenuação da onda EM ao se propagar na troposfera/ionosfera, como também inclui demais eventuais perdas no TX e RX.

Para facilitar a análise que segue vamos modificar o cenário operacional mostrado no diagrama do slide 39 convertendo-o para o diagrama simplificado mostrado no próximo slide. Note no diagrama simplificado que:

- (I) A *baseline* D é plotada na horizontal e é alinhada com o eixo y de 3 sistemas de eixos cartesianos.
- (II) O eixo x dos 3 sistemas cartesianos é perpendicular ao plano da página, sendo o plano da página denominado **plano bistático** (plano que contém o triângulo em cujos vértices estão localizados o TX, RX e alvo).
- (III) A origem dos 3 sistemas cartesianos e as coordenadas do alvo estão contidas no plano bistático. Observe que esta simplificação é válida para a grande maioria das situações operacionais práticas, não prejudicando a generalidade da representação.
- (IV) A antena do TX está localizada na origem do sistema (x', y', z') , a antena do RX está localizada na origem do sistema (x'', y'', z'') e a origem do sistema do sistema (x, y, z) encontra-se localizada na metade da *baseline* de tamanho D .

Um inconveniente menor da representação do cenário operacional planejado no plano bistático mostrada no próximo slide é que o eixo z dos 3 sistemas cartesianos são na grande maioria dos casos não-perpendiculares ao plano do solo real.

Equação do range do radar bistático



Máximo range de detecção do alvo para um radar bistático

No diagrama simplificado do slide 42 e descrito no slide 41, (ρ, θ) mostrado representa as coordenadas polares do alvo localizado nas coordenadas cartesianas (y_0, z_0) no plano bistático, tendo como referência o sistema (x, y, z) . Observe que ρ define a distância até o alvo a partir da origem do sistema (x, y, z) , conforme discutiremos no Cap III.

Note que ρ não é o **range bistático**, que é definido pela diferença entre o caminho de propagação da onda EM que incide e é espalhada (*scattered*) no alvo até chegar ao RX e o caminho da onda EM direta que se propaga ao longo da *baseline* D entre TX-RX, sendo portanto dado por **Range bistático** = $r_T + r_R - D$ (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Bistatic_radar).

No caso bistático, não é possível obter um único valor de range máximo r_{\max} , conforme obtivemos na equação (18) para o caso monostático. Isto ocorre porque no caso bistático a onda EM que incide e é espalhada no alvo até chegar ao RX percorre duas trajetórias, cada uma delas respectivamente de tamanho r_T e r_R , conforme diagrama no slide 42.

No entanto, a partir de (24), é possível obter um produto máximo dos ranges r_T e r_R , designado como $r_T r_{R(\max)}$ e dado por (25):

$$r_T r_{R(\max)} = \sqrt{\frac{\sigma P_{\text{TX}} G_{\text{TX}}(\theta_i, \phi_i) G_{\text{RX}}(\theta_r, \phi_r) \lambda^2}{(4\pi)^3 F k T_0 L B \text{SNR}_{\text{omin}}}} \quad [\text{m}^2] \quad (25)$$

Em duas dimensões, o produto $r_T r_{R(\max)}$ pertence a uma família de curvas conhecidas como ovais de Cassini. As ovais de Cassini são uma família de curvas quárticas, algumas vezes chamadas de elipses de Cassini. Uma oval de Cassini é definida como o lugar geométrico dos pontos no plano de forma que o produto das distâncias a dois pontos fixos (pontos focais onde se encontram o TX e o RX) seja constante (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Cassini_oval).

Para sistemas bistáticos, os valores máximos simultâneos de r_T e r_R para que a relação sinal-ruído SNR na saída do *front-end* analógico não caia abaixo de SNR_{omin} (se a SNR cair abaixo de SNR_{omin} o RX do radar não consegue detectar os alvos porque o nível de ruído térmico será demasiadamente alto em relação ao sinal de eco do alvo, de modo que o RX não consegue demodular o sinal recebido sem que ocorram erros de detecção de sinal no demodulador do RX) pode ser analisado plotando as ovais Cassini para várias SNR_{omin} . A geometria do diagrama mostrado no slide 42 permite escrever as seguintes relações algébricas:

$$r_T^2 = (\rho^2 + (D/2)^2) + \rho D \cos(\theta) \quad (26)$$

$$r_R^2 = (\rho^2 + (D/2)^2) - \rho D \cos(\theta) \quad (27)$$

Multiplicando (26) por (27) e simplificando:

$$r_T^2 r_R^2 = (r_T r_R)^2 = (\rho^2 + (D/2)^2)^2 - \rho^2 D^2 \cos^2(\theta) \quad (28)$$

Máximo range de detecção do alvo para um radar bistático

Substituindo (25) em (28):

$$\frac{\sigma P_{TX} G_{TX}(\theta_i, \phi_i) G_{RX}(\theta_r, \phi_r) \lambda^2}{(4\pi)^3 F k T_0 L B \text{ SNR}_{\text{omin}}} = (\rho^2 + (D/2)^2)^2 - \rho^2 D^2 \cos^2(\theta) \quad (29)$$

Isolando SNR_{omin} :

$$\text{SNR}_{\text{omin}} = \frac{K}{(\rho^2 + (D/2)^2)^2 - \rho^2 D^2 \cos^2(\theta)} \quad (30)$$

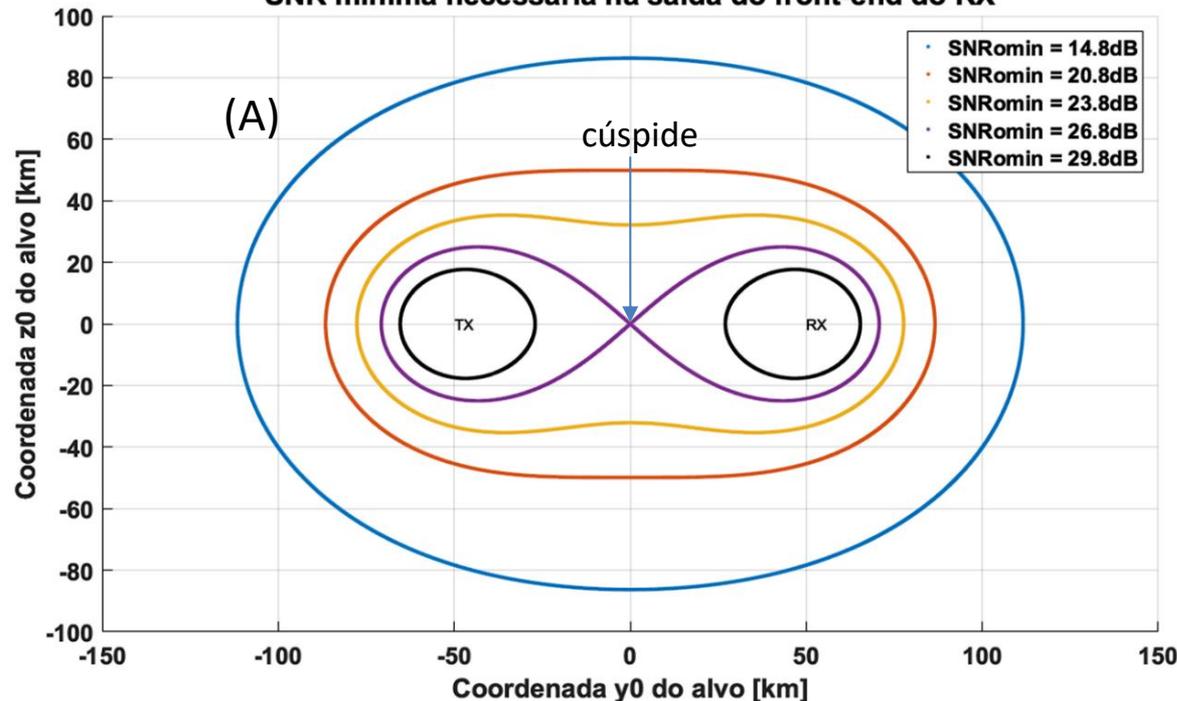
onde

$$K = \frac{\sigma P_{TX} G_{TX}(\theta_i, \phi_i) G_{RX}(\theta_r, \phi_r) \lambda^2}{(4\pi)^3 F k T_0 L B} \text{ [m}^4\text{]} \quad (31)$$

sendo K denominado de **constante bistática** (*bistatic constant*).

A equação (30) é parametrizada pelas coordenadas polares (ρ, θ) do alvo localizado em (y_0, z_0) no plano bistático. Os pontos nas coordenadas (ρ, θ) no plano bistático que resultam em uma $\text{SNR}_{\text{omin}} = \text{constante}$ na equação (30) geram uma curva formada dos pontos (ρ, θ) no plano bistático que obedecem a condição $\text{SNR}_{\text{omin}} = \text{constante}$.

SNR mínima necessária na saída do front-end do RX



Para $D = 100$ [Km] e $K = 30(D[\text{Km}])^4$ (valores hipotéticos apenas a título de exemplo), e resolvendo a equação (30) para ρ em função de θ variando no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, gerou-se o gráfico em (A) ao lado mostrando as curvas que obedecem a condição $\text{SNR}_{\text{omin}} = \text{constante}$ para cinco valores de SNR_{omin} no intervalo $14.8\text{dB} \leq \text{SNR}_{\text{omin}} \leq 29.8\text{dB}$.

Máximo range de detecção do alvo para um radar bistático

Cada oval do gráfico em (A) no slide 44 é, portanto, uma curva que obedece a condição $\text{SNR}_{\text{omin}} = \text{constante}$ e estas curvas estão contidas no plano bistático. Estas curvas assumem que existe linha de visada (LOS – *line of sight*) no caminho de propagação da onda EM entre TX–alvo e entre alvo–RX. É assumido também que o RCS e as perdas de sinal na propagação da onda EM sejam invariantes com as coordenadas (ρ, θ) do alvo, o que nem sempre é válido.

Note no gráfico em (A) no slide 44 que à medida que SNR_{omin} aumenta, as ovais encolhem, finalmente colapsando em torno das coordenadas do TX e do RX. O ponto na *baseline* entre TX e RX onde a curva de cor **roxa** se divide em duas partes é chamado de cúspide. Uma curva é chamada de lemniscata (de duas partes) se ela apresenta uma cúspide que a divide em duas partes. Note que $\rho = 0$ na cúspide. Daí, substituindo $\rho = 0$ na equação (30) obtemos o valor de $\text{SNR}_{\text{omin}_0}$ na cúspide:

$$\text{SNR}_{\text{omin}_0} = \frac{16K}{D^4} \quad (32)$$

Substituindo (31) em (25):

$$r_T r_{R(\text{max})} = \sqrt{\frac{K}{\text{SNR}_{\text{omin}}}} \quad [\text{m}^2] \quad (33)$$

Substituindo (32) em (33) fazendo $\text{SNR}_{\text{omin}} = \text{SNR}_{\text{omin}_0}$, fazendo $r_T r_{R(\text{max})} = \kappa$, simplificando e isolando D :

$$D = 2\sqrt{r_T r_{R(\text{max})}} = 2\sqrt{\kappa} \quad [\text{m}] \quad (34)$$

sendo $\kappa = r_T r_{R(\text{max})}$ denominado de **produto máximo dos ranges r_T e r_R** (*bistatic maximum range product*) e sendo $\sqrt{\kappa}$ denominado **range monostático equivalente**.

Máximo *range* de detecção do alvo para um radar bistático

De (34) temos então as seguintes relações de *range* em função do tamanho D da *baseline* e do valor de $\kappa = r_T r_{R(\max)}$ dado por (25):

- Uma oval permanece uma curva fechada única para $D < 2\sqrt{\kappa}$ (curvas **amarela**, **vermelha** e **azul** em (A) no slide 44).
- Uma oval se divide em duas curvas ovóides fechadas respectivamente em torno do TX e do RX para $D > 2\sqrt{\kappa}$ (curvas **pretas** em (A) no slide 44).
- Uma oval se torna uma lemniscata para $D = 2\sqrt{\kappa}$ (curva **roxa** em (A) no slide 44).

A tabela a seguir mostra as regiões de operação de um radar bistático para cada uma das relações de *range* acima discutidas e algumas possíveis respectivas aplicações:

Bistatic Radar Applications

<i>Bistatic Radar Operating Regions</i>	<i>Range Relationships</i>	<i>Transmitter Configuration</i>		
		<i>Dedicated</i>	<i>Cooperative</i>	<i>Noncooperative</i>
Receiver Centered	$D > 2\sqrt{\kappa}$ $r_T \gg r_R$	<ul style="list-style-type: none"> ● Air-to-ground attack (silent penetration) ● Semiactive homing missile (LOAL)^a 	<ul style="list-style-type: none"> ● Over-the-shoulder operation ● Passive situation awareness 	<ul style="list-style-type: none"> ● Passive situation awareness
Transmitter Centered	$D > 2\sqrt{\kappa}$ $r_R \gg r_T$	—	—	<ul style="list-style-type: none"> ● Monitoring ● Launch alert
Cosite	$D < 2\sqrt{\kappa}$	<ul style="list-style-type: none"> ● Medium-range air defense ● Satellite tracking ● Range instrumentation ● Semiactive homing missile (LOBL)^b ● Intrusion detection 	—	—

^aLOAL = Lock-on-after-launch.

^bLOBL = Lock-on-before-launch.

Máximo range de detecção do alvo para um radar bistático

Exemplo 3: Um radar *pulse–Doppler* opera na banda L na frequência $f_0 = 1.0$ [GHz] com uma banda limitante de ruído $B = 1.0$ [KHz], banda que resulta não somente do efeito dos filtros passa-banda no *front–end* analógico do RX do radar como também principalmente resulta do efeito de atenuação das altas frequências que é consequência do processo de integração de sinal efetuado na cadeia de processamento digital em bandabase do RX. O TX do radar tem uma potência de saída $P_{TX} = 50$ [KW_(peak)] e o tamanho da *baseline* entre TX e RX é $D = 100$ [Km]. O *front–end* analógico do RX opera a uma temperatura $T_0 = 290$ K exibindo uma figura de ruído de 6.0 [dB]. A perda de sinal por atenuação na linha de transmissão que conecta o TX à sua antena mais a perda de sinal por atenuação na linha de transmissão que conecta o RX à sua antena mais a perda de sinal por particularidades do meio de propagação da onda EM resulta $L = 6.0$ [dB]. O ganho do diagrama de radiação da antena TX na direção (θ_i, ϕ_i) da trajetória da onda EM incidente no alvo é $G_{TX}(\theta_i, \phi_i) = 20$ [dBi] (ver slide 39) e o ganho do diagrama de radiação da antena RX na direção (θ_r, ϕ_r) da trajetória da onda EM espalhada (*scattered*) no alvo na direção do RX é $G_{RX}(\theta_r, \phi_r) = 10$ [dBi] (ver slide 39). O alvo a ser detectado exibe um RCS de 10 [dBsm] e inicialmente encontra-se localizado no ponto A do plano bistático nas coordenadas $A(y_0, z_0) = (-50, 45.4)$ [Km], movendo-se até o ponto B do plano bistático nas coordenadas $B(y_0, z_0) = (-100, 40)$ [Km].

Pede-se:

(a) Plote o gráfico das 5 ovas de Cassini para o cenário operacional deste radar e para SNR_{omin} dada pela equação (30), com SNR_{omin} assumindo os respectivos 5 valores $\{+12, +6, +3, 0, -3\}$ [dB] em torno da SNR_{omin-0} dada pela equação (32) expressa em [dB].

A partir do resultado em (a), estime a especificação da SNR_{omin} necessária na saída do *front–end* analógico do RX de modo a ser assegurado que o RX do radar consiga detectar o alvo sem que o ruído térmico gerado no *front–end* analógico cause erros de detecção de sinal no demodulador do RX e/ou erros na cadeia de processamento digital em bandabase efetuada no RX após o processo de demodulação. A estimativa da especificação do SNR_{omin} deve ser efetuada para as seguintes situações:

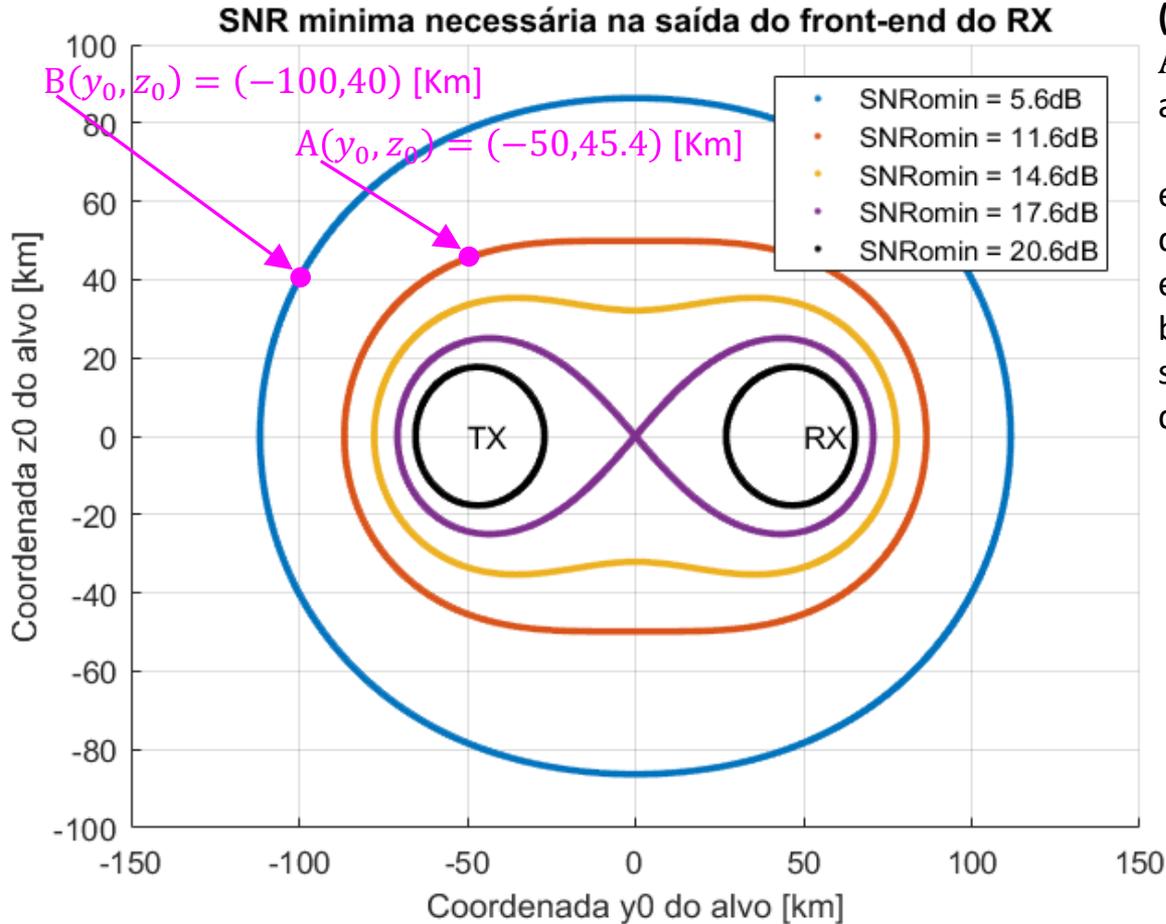
(b) O alvo encontra-se localizado no ponto A do plano bistático.

(c) O alvo encontra-se localizado no ponto B do plano bistático.

(d) Compare e analise os resultados obtidos em (b) e (c).

Máximo range de detecção do alvo para um radar bistático

Solução: (a) A curva de cada oval de Cassini é obtida da solução da equação (30) para ρ em função de θ variando no intervalo $0 \leq \theta \leq 2\pi$, para cada respectivo valor de SNR_{omin} especificado no enunciado. O *script* Matlab Exemplo3.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E3S38.zip implementa a solução da equação (30), resultando no gráfico abaixo (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo3.m).



(b) Para que este radar detecte o alvo no ponto $A(y_0, z_0)$ é necessário que a saída do *front-end* analógico do RX opere com uma especificação de $SNR_{omin} = 11.6$ dB ou menor. Esta especificação significa que o RX não consegue detectar o alvo em $A(y_0, z_0)$ se o demodulador e/ou a cadeia de processamento de sinal em bandabase do RX exigir $SNR_{omin} > 11.6$ dB na saída do *front-end* para que o alvo possa ser detectado.

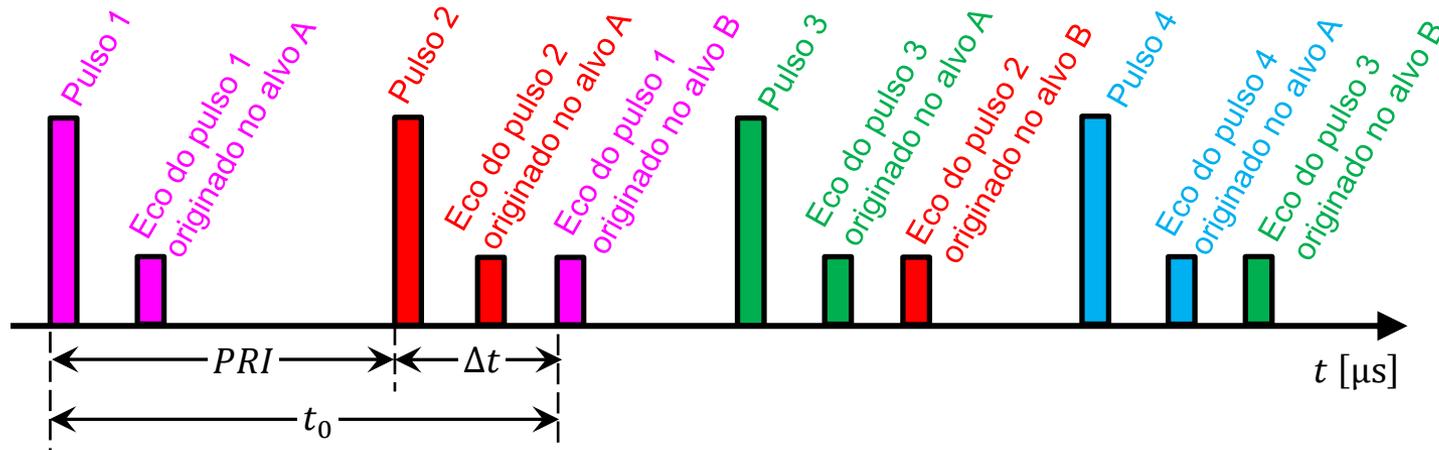
(c) Para que este radar detecte o alvo no ponto $B(y_0, z_0)$ é necessário que a saída do *front-end* analógico do RX opere com uma especificação de $SNR_{omin} = 5.6$ dB ou menor. Esta especificação significa que o RX não consegue detectar o alvo em $B(y_0, z_0)$ se o demodulador e/ou a cadeia de processamento de sinal em bandabase do RX exigir $SNR_{omin} > 5.6$ dB na saída do *front-end* para que o alvo possa ser detectado.

(d) Quanto maior for a SNR_{omin} necessária na saída do *front-end* menor será o *range* máximo alcançável na detecção de alvos. Por esta razão o menor *range* do ponto A permite um *front-end* com especificação de uma maior SNR_{omin} necessária (**11.6dB**). O maior *range* do ponto B demanda um *front-end* com especificação de uma menor SNR_{omin} necessária (**5.6dB**) para que o RX possa detectar o alvo.

Ambiguidade de *range* para um radar monostático

Conforme discutimos nos slides 4 e 5, o *range* de um alvo é determinado medindo-se o intervalo de tempo t_0 [μs] que o pulso da onda EM transmitida pela antena do radar demora para percorrer a distância $2 \times \text{range}$ no trajeto antena→alvo→antena, sendo o conseqüente eco de retorno recebido na antena após o pulso transmitido percorrer o trajeto antena→alvo→antena no intervalo t_0 [μs], intervalo que é denominado *round trip time*.

Para radares pulsados, podem ocorrer ambiguidades no *range* medido se o *round trip time* t_0 [μs] for maior que o intervalo de repetição de pulsos *PRI* (*pulse repetition interval*) – ver slides 4 e 5. Nesta situação, a onda EM de um determinado pulso não retornará ao RX do radar antes que o próximo pulso seja transmitido, resultando em uma ambiguidade de tempo e uma conseqüente ambiguidade de *range*. O pulso recebido pode ser o eco do pulso que acabou de ser transmitido e, portanto, um eco de um alvo próximo, ou pode ser o eco de um pulso transmitido anteriormente e, portanto, um eco de um alvo distante, conforme mostra a figura a seguir.



Os retângulos maiores representam pulsos transmitidos e os retângulos menores representam ecos recebidos de dois alvos A e B. A cor do eco de um alvo corresponde à cor do pulso que deu origem ao eco. Note na figura que o *round trip time* da onda EM que se reflete no alvo A é menor que o *PRI*, logo o eco do alvo A conseqüente de qualquer um dos pulsos transmitidos é recebido antes que o próximo pulso seja transmitido – sem ambiguidade, portanto. No entanto, o *round trip time* da onda EM que se reflete no alvo B é maior que o *PRI*. Especificamente, consideremos para o eco do alvo B que $t_0 = \text{PRI} + \Delta t$. Então, o eco do alvo B devido ao pulso 1 ocorre Δt [μs] após o pulso 2, conforme mostra a figura. Portanto, está evidenciada a ambiguidade: Não fica claro se este eco do alvo B é de um alvo localizado a um *range* curto correspondente a Δt [μs] de distância ou de um alvo localizado a um *range* longo correspondente a t_0 [μs] de distância.

Ambiguidade de *range* para um radar monostático

Ambiguidades de *range* podem ser evitadas garantindo que a forma de onda (*waveform*) apresente um *pulse repetition interval (PRI)* suficientemente longo ($PRI \geq t_0$), ou, equivalentemente, que o *pulse repetition frequency* $PRF = 1/PRI$ seja suficientemente baixa, de modo que todos os ecos de interesse de um determinado pulso retornem ao RX do radar antes do próximo pulso ser transmitido pelo TX. Da discussão dos slides 4 e 5 temos que o *round trip time* t_0 é dado por

$$t_0 = \frac{2 \textit{range}}{c} \text{ [s]} \quad (35)$$

onde $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] é a velocidade de propagação da onda EM. Portanto para evitar ambiguidade de *range* a seguinte condição deve ser satisfeita:

$$PRI \geq t_0 \quad \rightarrow \quad PRI \geq \frac{2 \textit{range}}{c} \text{ [s]} \quad (36)$$

Ou, equivalentemente, dado que $PRF = 1/PRI$:

$$PRF \leq \frac{c}{2 \textit{range}} \text{ [Hz]} \quad (37)$$

Note, portanto, que o bloco DSP (ver slide 2) precisa ajustar o *PRF* do sistema de radar de acordo com (37) em função do *range* da região de interesse no espaço \mathbb{R}^3 onde espera-se encontrar alvos.

Radars não-coerentes e radars coerentes

Sistemas de radar podem ser não-coerentes ou coerentes. Um sistema não-coerente detecta apenas a amplitude da onda EM recebida espalhada (*scattered*) pelos alvos e recebida na forma de eco na antena do RX. Já um sistema coerente detecta a cada instante t a amplitude e a fase da onda EM, representados pela sequência de amostras complexas $x[n] = I[n] + jQ[n]$, denominadas de símbolos IQ, resultantes na saída do bloco *down-converter* no slide 2. O módulo $|I + jQ|$ e a fase $\angle\{I + jQ\}$ de cada símbolo IQ efetivamente representa o módulo (amplitude) e a fase da superposição de ondas EM (ecos de alvos + *clutter*) recebida em cada respectivo instante pela antena do radar, conforme já discutido no slide 4.

Sistemas não-coerentes são basicamente capazes de identificar e plotar no *display (scope)* do radar as coordenadas polares (*range, azimuth*) que localizam o alvo no plano do solo. A amplitude do sinal do eco recebido em qualquer momento determina a intensidade luminosa do ponto na coordenada (*range, azimuth*) do *display*, a qual corresponde à coordenada (*range, azimuth*) que localizam o alvo no plano do solo. Radars não-coerentes são basicamente usados nos casos em que se sabe que a amplitude do sinal do eco do alvo excede a amplitude de qualquer sinal de interferência concorrente. Todos os primeiros radars eram não-coerentes, e a detecção de alvos dependia da habilidade do operador em discernir os ecos dos alvos dos ecos de *clutter* no ambiente circundante. Embora ainda existam aplicações para as quais a tecnologia de radar não-coerente é apropriada, a absoluta maioria dos sistemas de radar modernos são coerentes.

Em um sistema coerente, o RX determina a cada instante t a fase $\theta = \angle\{I + jQ\}$ de cada símbolo IQ, fase que representa a fase da onda EM recebida pela antena em cada respectivo instante t . A fase de qualquer onda EM avança $360^\circ (= 2\pi \text{ [rad]})$ para cada avanço na distância percorrida ao longo de sua trajetória de propagação correspondente a um comprimento de onda $\lambda = c/f$, onde f é a frequência da onda EM e $c = 2.9979246 \times 10^8 \text{ m/s}$ é a sua velocidade de propagação. Assim, a fase da onda EM medida em um ponto p fixo de sua trajetória distante r da origem é constante e dada por $\theta = 2\pi r/\lambda$.

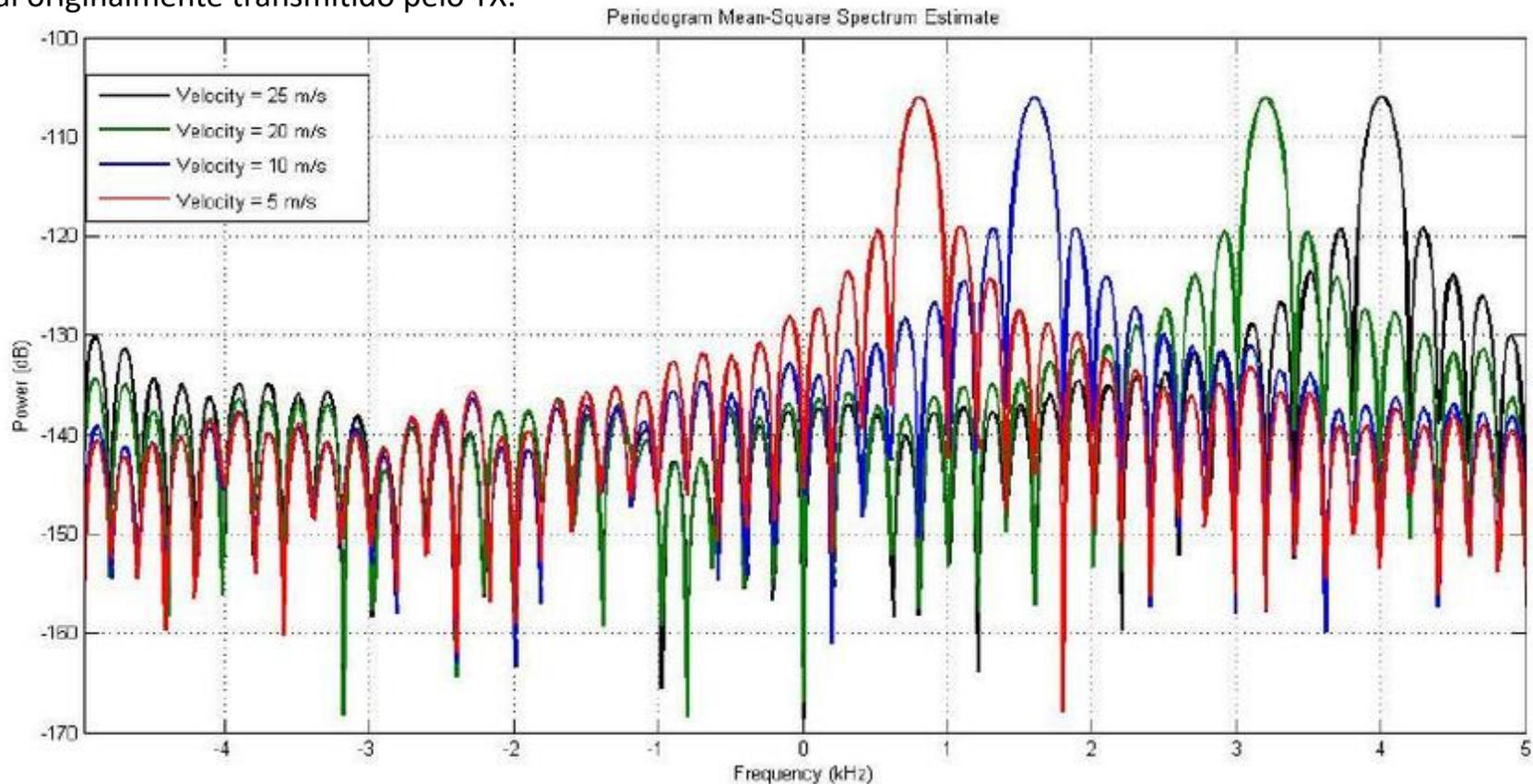
No entanto, se há movimento relativo entre a origem da onda EM (antena do radar) e o ponto p (alvo) com uma velocidade radial v_d [m/s] então a fase da onda EM varia no tempo t de acordo com $\theta(t) = 2\pi r(t)/\lambda = \angle\{I(t) + jQ(t)\}$, sendo $r(t)$ a distância percorrida ao longo de seu caminho de propagação até o instante t . Esta variação no tempo de $\theta(t)$ faz surgir um desvio na frequência f da onda EM dada por $\omega_d = 2\pi f_d = \frac{d\theta(t)}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{dr(t)}{dt} = \frac{2\pi}{\lambda} v_d$ [rad/s], ou equivalentemente, $f_d = \frac{v_d}{\lambda} = f \frac{v_d}{c}$ [Hz]. **Como o alvo em movimento re-irradia a onda EM incidente de volta para a antena, um novo desvio de frequência ocorre de modo que o eco do alvo que retorna à antena exibe um desvio de frequência $f_{doppler}$ dado por**

$$f_{doppler} = f \frac{2v_d}{c} \quad \text{[Hz]} \quad (38)$$

Radars não-coerentes e radars coerentes

Note, portanto, que o desvio de frequência $f_{doppler}$ dado por (38) é o desvio de frequência observado no espectro da sequência de amostras complexas $I[n] + jQ[n]$ resultantes na saída do bloco *down-convert* no slide 2, sendo n o índice da amostra no domínio tempo discreto. Usualmente o bloco DSP (slide 2) determina o espectro da sequência $I[n] + jQ[n]$ através de uma FFT (*Fast Fourier Transform* – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform). Por exemplo, o gráfico abaixo mostra o espectro Doppler de $I[n] + jQ[n]$ para 4 alvos de mesmo RCS e mesmo formato geométrico, todos posicionados no mesmo *range* mas movendo-se à velocidades radiais distintas. A sequência $I[n] + jQ[n]$ recebida é resultante da transmissão de 30 pulsos na direção dos alvos.

Desta maneira, o bloco DSP determina a velocidade radial v_d do alvo através de (38) identificando o desvio de frequência $f_{doppler}$ no espectro da sequência de amostras complexas $I[n] + jQ[n]$ recebidas no RX, tendo como referência o espectro do sinal originalmente transmitido pelo TX.



Desvio Doppler

Conforme discutimos nos slides anteriores, se houver movimento relativo entre o radar e o alvo com uma velocidade v_d radial (= orientada na direção do *range*), a frequência da onda EM refletida do alvo e recebida pelo RX do radar será diferente da frequência da onda irradiada pela antena do TX do radar de um valor $f_{doppler}$ dado por (38). Este é o clássico efeito Doppler, comum a todos os fenômenos de onda e originalmente identificado como um fenômeno acústico observado na propagação da onda sonora (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Doppler_effect).

Note que (38) é válida desde que a componente radial v_d da velocidade do alvo seja muito menor que a velocidade da luz c , o que é verdadeiro para todos os casos práticos. Note também que o desvio de frequência $f_{doppler}$ na frequência f da onda EM transmitida é positivo quando o alvo está se aproximando do radar (porque a velocidade radial v_d é positiva). Pelo mesmo motivo o desvio $f_{doppler}$ é negativo quando o alvo está se afastando do radar (porque a velocidade radial v_d é negativa).

Ambiguidade de Doppler

Observe que para a equação (37) ser obedecida significa ter que reduzir o *PRF* do radar para que não ocorram ambiguidades de *range*. No entanto, reduzir o *PRF* do radar também incorre em uma consequência negativa em termos de ambiguidade. Conforme discutimos no slide anterior, a maioria dos radares modernos mede o desvio Doppler da onda EM recebida através do espectro da sequência de amostras complexas $I[n] + jQ[n]$ recebidas no RX. Um radar pulsado basicamente utiliza o *PRF* como frequência de amostragem para gerar a sequência $I[n] + jQ[n]$. Isso pode levar a ambiguidades na determinação do desvio de frequência $f_{doppler}$ se a frequência de amostragem (*PRF*) não for alta o suficiente, não atendendo o critério de amostragem de Nyquist de que “a frequência máxima que pode ser medida inequivocamente é metade da frequência de amostragem” (ver slides 3 a 9 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapII.pdf).

Portanto, o máximo valor absoluto do desvio de frequência $f_{doppler}$ que pode ser medido na frequência f da onda EM transmitida é dado por:

$$PRF > 2f_{doppler(max)} \quad (39)$$

Ou, equivalentemente,

$$f_{doppler(max)} = PRF/2 \quad (40)$$

Desvio Doppler

Enquanto a maximização do *range* não-ambíguo exige *PRFs* mais baixos, a maximização do valor de Doppler medido de forma não-ambígua exige *PRFs* mais altos. Para minimizar os problemas decorrentes deste conflito entre ambiguidade de *range* e ambiguidade de Doppler, o processamento efetuado no bloco DSP (slide 2) permite configurar o radar de modo ao mesmo operar em três regimes distintos de *PRF*:

- *PRF* baixo ($100 \text{ [Hz]} \leq PRF \leq 3 \text{ [KHz]}$) – Evita ambiguidade na determinação do *range* do alvo. Utilizado na detecção de alvos distantes que se movem mais lentamente.
- *PRF* médio ($3 \text{ [KHz]} \leq PRF \leq 30 \text{ [KHz]}$) – Compromisso entre ambiguidade na determinação do *range* do alvo e ambiguidade na determinação da velocidade radial (Doppler) do alvo. Utilizado na detecção de alvos localizado a uma distância mediana se movendo a uma velocidade mediana.
- *PRF* alto ($30 \text{ [KHz]} \leq PRF \leq 200 \text{ [KHz]}$) – Evita ambiguidade na determinação da velocidade radial (Doppler) do alvo. Utilizado na detecção de alvos próximos que se movem mais rapidamente.

Para sistemas de radar que operam nas bandas de HF, VHF e UHF um conjunto diferente de condições se aplica à definição de *PRF* médio. Nestas bandas é possível que a *PRF* necessária para satisfazer o critério de amostragem de Nyquist também seja suficiente para medir o *range* do alvo de interesse mais distante de forma não-ambígua. Nesse caso, um sistema de *PRF* médio será não-ambíguo tanto na medição de *range* quanto na medição da velocidade (Doppler) do alvo.



Com base no que discutimos nos slides anteriores percebe-se que a determinação do desvio de frequência $f_{doppler}$ do eco de cada alvo, denominado processamento Doppler, é crucial para a detecção de múltiplos alvos em movimento. A determinação de $f_{doppler}$ a partir do espectro correspondente ao sinal de eco dos alvos é um processo realizado pelo bloco DSP (slide 2) e é usada para discriminar e classificar os alvos em função da sua velocidade radial v_d , conforme discutido no slide 52. Em particular, o processamento Doppler permite discriminar e assim eliminar os ecos de *clutter* originados em objetos estáticos no solo, cujo espectro apresenta $f_{doppler}$ nulo. Por exemplo, considere um radar estacionário detectando alvos móveis no solo. O eco da onda EM de um alvo em movimento (carros, caminhões tanques, etc...) resultará $f_{doppler}$ diferente de zero, enquanto o *clutter* originado da reflexão da onda EM em objetos estacionários (árvores, rochas, edifícios, etc.) apresentará essencialmente $f_{doppler}$ zero em seu espectro. Assim, o desvio Doppler pode ser usado para discriminar e classificar ecos de alvos e ecos de *clutter* empregando um filtro passa-alta no processador de sinal do radar. Esta é a essência dos radares MTI (*moving target indicator*) que estudaremos no Cap I.8. Radares *pulse-Doppler* e radares passivos usualmente efetuam o processamento Doppler através da detecção dos máximos da função de ambiguidade $\Psi(\text{range}, f_{doppler})$, que estudaremos no Cap I.7. De crucial importância tática é a capacidade do espectro Doppler de identificar componentes móveis em alvos (por explo., rotor da turbina em caças e hélices em helicópteros).

Resolução

O conceito de resolução descreve a capacidade de um radar para distinguir dois ou mais alvos que estão próximos, seja em *range*, ângulo (elevação e azimute) ou frequência Doppler. O conceito de resolução é ilustrado nos gráficos (a) a (d) no próximo slide, que plota o campo elétrico instantâneo $E(t)$ da onda EM medido na antena para um único pulso de largura PW transmitido e a seguir espalhado (*scattered*) por dois alvos separados da distância ΔR , conforme mostrado em (a), ambos os alvos sendo de mesmo RCS e em formato de ponto, o que assegura que o pulso espalhado (*scattered*) pelos alvos não seja distorcido no tempo pelo formato do alvo.

Se a distância ΔR de separação entre os dois alvos for longa o suficiente dois ecos distintos serão observados no gráfico de $E(t)$, conforme mostrado em (b). Nesta situação, os dois ecos são considerados resolvidos no *range* mostrado.

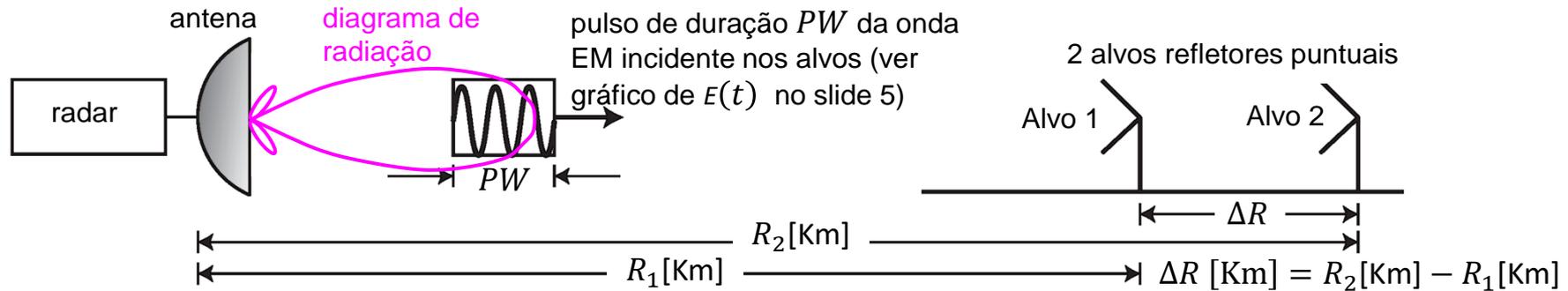
Na situação mostrada em (c), os alvos estão próximos o suficiente para que os dois ecos se superponham, formando um eco composto. Nesta situação, os dois ecos são considerados não-resolvidos no *range* mostrado. Dependendo do espaçamento ΔR entre os dois alvos, as ondas EM dos dois ecos podem se interferir construtivamente, destrutivamente ou se interferir de forma intermediária entre interferência construtiva e destrutiva. A onda EM resultante da superposição é extremamente sensível a pequenas variações no espaçamento ΔR porque estas variações determinam a diferença de fase $\Delta\theta = 2\pi\Delta R/\lambda$ entre as ondas e o tipo e grau de interferência entre elas, sendo $\lambda = c/f$ o comprimento de onda da onda EM, f é a frequência da onda EM e $c = 2.9979246 \times 10^8$ m/s é a sua velocidade de propagação. Por exemplo, se $\Delta R/\lambda = 0.5$ obtém-se $\Delta\theta = \pi$ e as ondas resultam defasadas de 180° ocorrendo interferência destrutiva entre elas. Se $\Delta R/\lambda = 1.0$ obtém-se $\Delta\theta = 2\pi$ e as ondas resultam defasadas de 360° ocorrendo interferência construtiva entre elas. Por exemplo, um radar operando na banda X irradia uma onda EM com λ de apenas 3 [cm], evidenciando a quão crítico é o fator $\Delta R/\lambda$ na definição da diferença de fase $\Delta\theta = 2\pi\Delta R/\lambda$ entre os dois ecos. Portanto, os ecos de dois alvos nesta situação de superposição não podem ser considerados resolvidos de forma confiável.

A situação limítrofe entre a situação de ecos não não-resolvidos e a situação de ecos resolvidos é mostrado em (d) no próximo slide onde os dois ecos encontram-se contíguos no tempo, situação que ocorre para

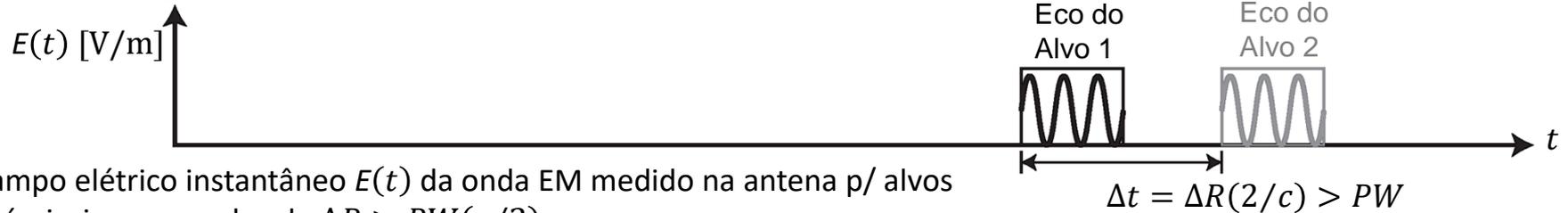
$$\Delta R = \frac{c PW}{2} \quad (41)$$

O valor ΔR dado por (41) é denominado de **resolução de range** (*range resolution*) do radar. Dois alvos espaçados em mais do que ΔR serão resolvidos no dado *range*. Alvos espaçados em menos do que ΔR não serão resolvidos no dado *range*.

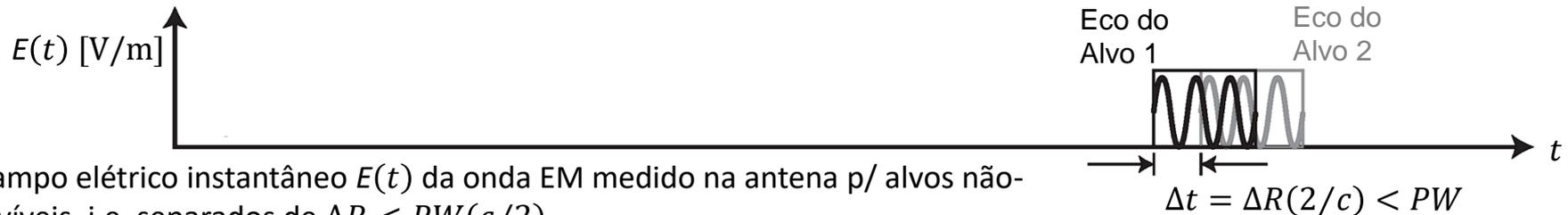
Resolução de range



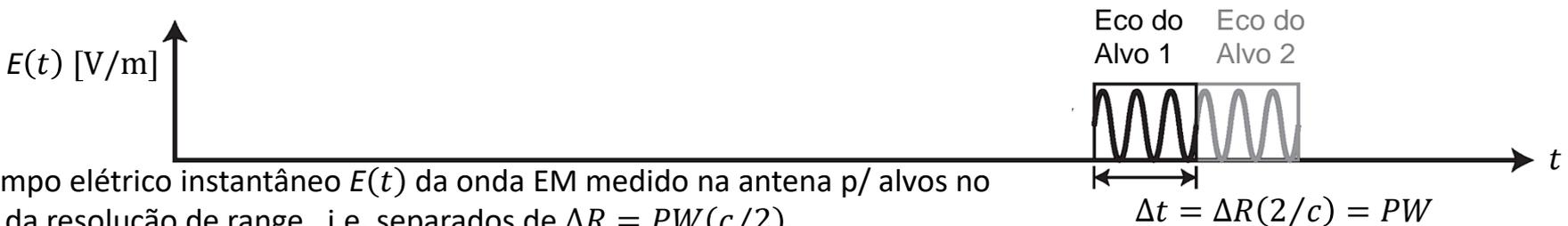
(a) Pulso irradiado na direção de dois alvos em formato de ponto, formato que assegura que o pulso espalhado (*scattered*) pelos alvos não seja distorcido no tempo pelo formato do alvo.



(b) Campo elétrico instantâneo $E(t)$ da onda EM medido na antena p/ alvos resolvíveis, i.e, separados de $\Delta R > PW(c/2)$.



(c) Campo elétrico instantâneo $E(t)$ da onda EM medido na antena p/ alvos não-resolvíveis, i.e, separados de $\Delta R < PW(c/2)$.

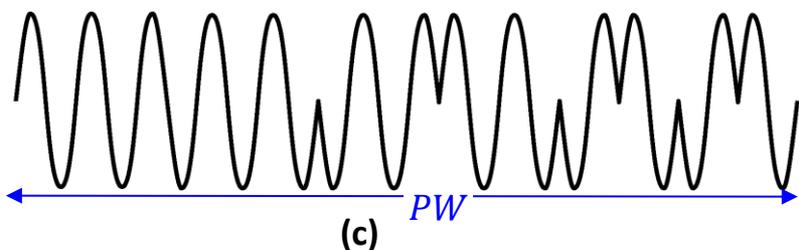
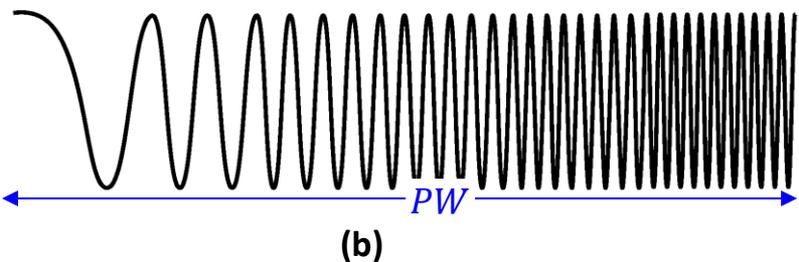
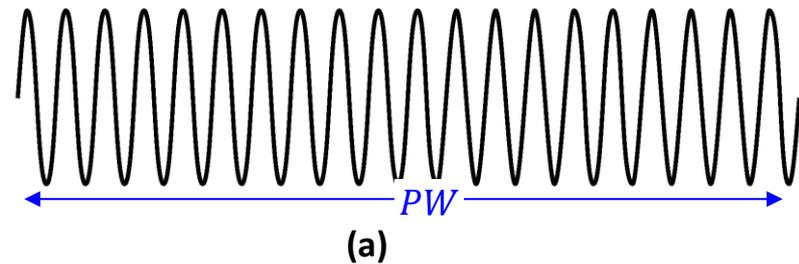


(d) Campo elétrico instantâneo $E(t)$ da onda EM medido na antena p/ alvos no limiar da resolução de range, i.e, separados de $\Delta R = PW(c/2)$.

Resolução de range

Note que (41) representa a resolução de *range* obtida com uma onda EM irradiada pelo TX na forma de um pulso simples e não modulado de duração PW . Por exemplo, um pulso irradiado de largura $PW = 1$ [μs] resulta em uma resolução de *range* $\Delta R = c PW/2 = 150$ [m]. Esta é a separação mínima na qual dois alvos podem ser resolvidos de forma confiável com um pulso simples e não modulado de duração 1 [μs].

Se uma resolução mais precisa é necessária, pulsos mais curtos podem ser usados. No entanto, pulsos muito curtos têm um espectro muito largo e a resposta em frequência do filtro que modela a transmitância do caminho de propagação da onda EM (ver slides 2 a 35 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD2_Cap%20II.pdf) inevitavelmente atenuará determinadas frequências do espectro do pulso irradiado pelo TX, distorcendo e atenuando o pulso no domínio tempo e deteriorando a sua inteligibilidade no âmbito da demodulação efetuada pelo RX. Veremos no Cap I.7 a técnica de compressão de pulso, que reduz a largura de pulso no RX sem necessitar reduzir a largura do pulso irradiado pelo TX.

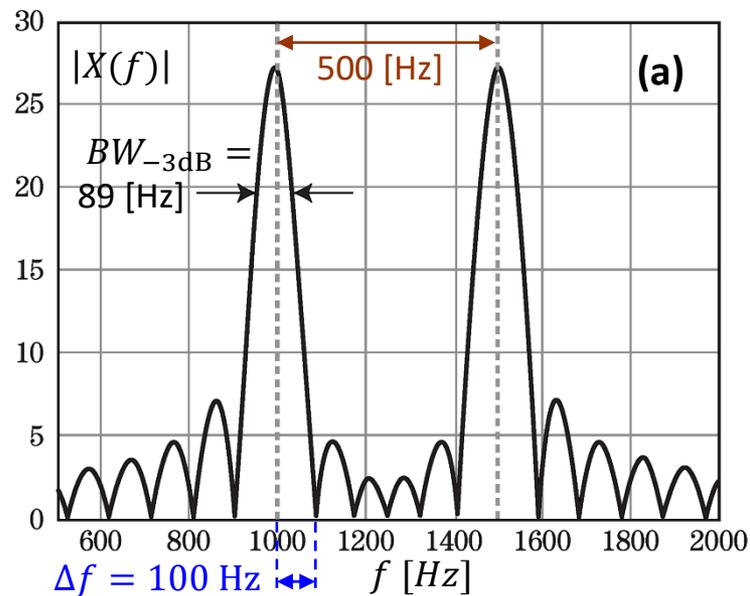


Vimos no gráfico de $E(t)$ no slide 5 o *timing* de uma forma de onda pulsada do tipo *burst* de RF, que é a forma de onda mais básica adotada por um sistema de radar pulsado, cujo pulso apresenta a forma de onda mostrada em (a) ao lado. A senoide do *burst* de RF mostrado em (a) tem uma frequência que corresponde à frequência de operação do radar. Em (b) é mostrado um pulso também muito comum denominado pulso LFM (*linear frequency modulation*) ou pulso *chirp*. O pulso *chirp* varia linearmente a frequência da senoide que constitui o pulso em uma banda de frequências de f_{\min} a f_{\max} , variação que é efetuada durante o tempo de transmissão do pulso. Por exemplo, um pulso *chirp* pode varrer de 8.9 a 9.1 [GHz] ao longo de um único pulso com $PW = 1$ [μs], resultando uma largura de banda de varredura de 200 [MHz]. Em (c) é mostrado um pulso codificado em fase. A senoide deste pulso tem uma frequência constante mas sua fase varia ao longo do tempo assumindo dois possíveis valores $\{0, \pi\}$ [rad], muito similar à modulação BPSK (*Binary Phase Shift Keying* – ver slide 23 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf). Como existem apenas dois valores da fase relativa, este pulso é denominado de pulso bifásico.

Resolução de Doppler

O gráfico em (a) abaixo mostra o módulo $|X(f)|$ do espectro de frequências Doppler da sequência de amostras complexas $x[n] = I[n] + jQ[n]$ resultantes na saída do bloco *down-converter* no slide 2, sendo $X(f) = \mathcal{F}\{x[n]\}$ a DTFT (*Discrete Time Fourier Transform* – ver http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula13&14_04052020.pdf) da sequência $x[n]$. A sequência $x[n]$ resulta do eco de 2 alvos de mesmo RCS e mesmo formato geométrico, todos posicionados no mesmo *range* mas movendo-se à velocidades radiais distintas.

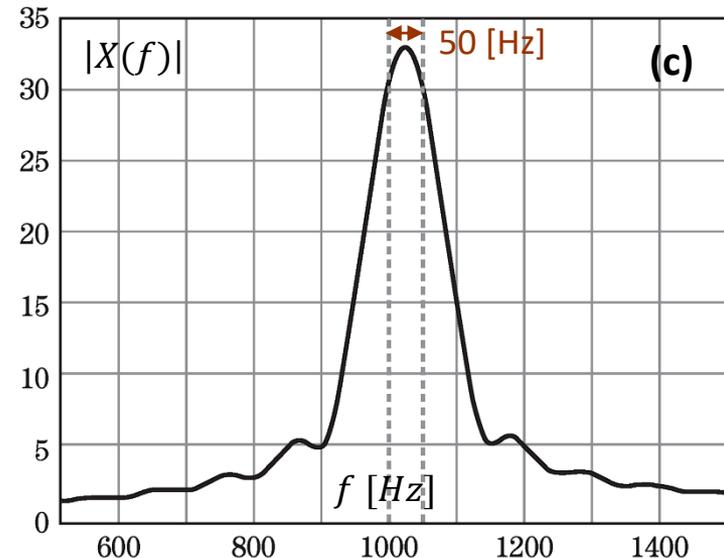
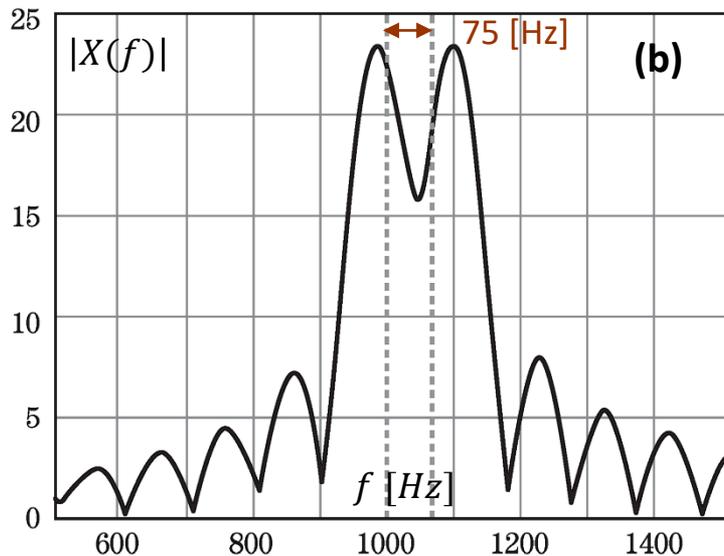
A sequência $x[n]$ recebida é resultante da transmissão de **um único pulso do tipo *burst*** na direção dos alvos, sendo a largura do pulso $PW = 1/\Delta f = 0.01$ [s], onde $\Delta f = 100$ [Hz] (ver gráfico de $|X(f)|$ abaixo) é a largura de banda entre máximo e 1° nulo da função $\text{sinc}(f) = \sin(f)/f$ que é característica do espectro de *bursts* de RF (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SAPMRF.pdf>). Note que o eixo f do gráfico em (a) mostra frequências relativas à frequência f_0 do *burst* de RF, portanto, o eixo f mostra especificamente valores de desvio de frequência $f_{doppler}$. Para uma função $\text{sinc}(f)$ a largura BW_{-3dB} do lobo principal é aproximada por $BW_{-3dB} = 0.89/PW$, sendo PW a largura do pulso. Para o espectro mostrado em (a) $BW_{-3dB} = 89$ [Hz].



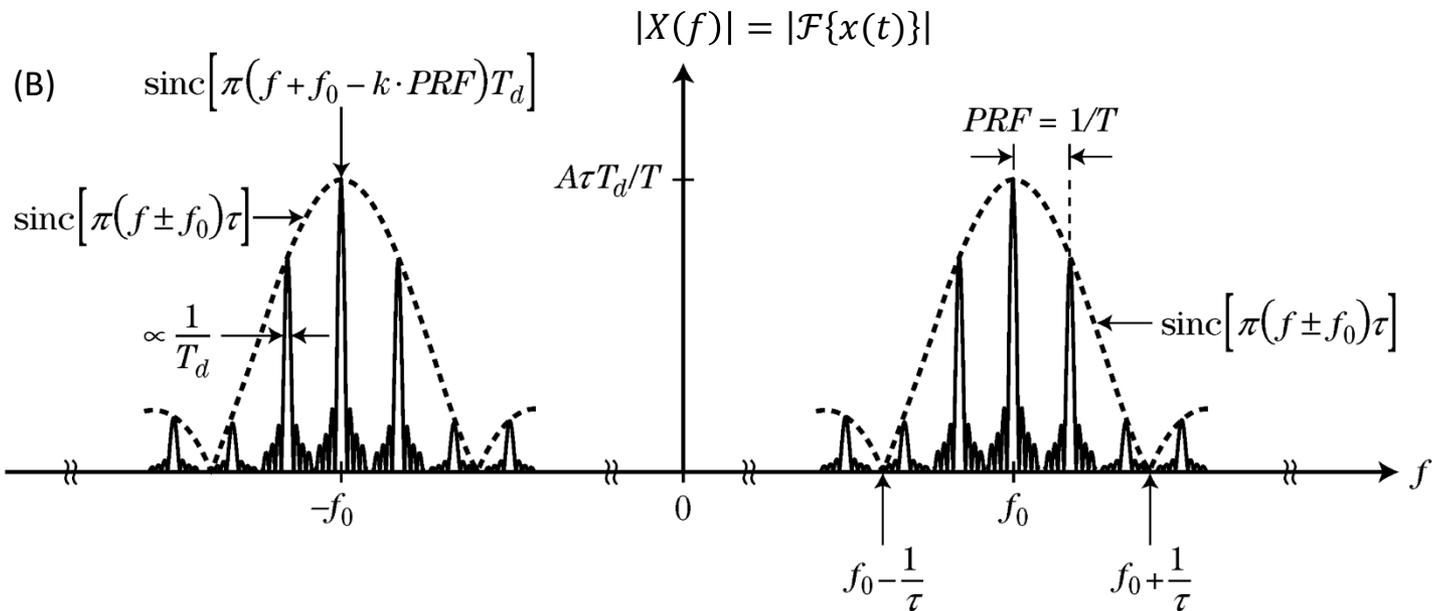
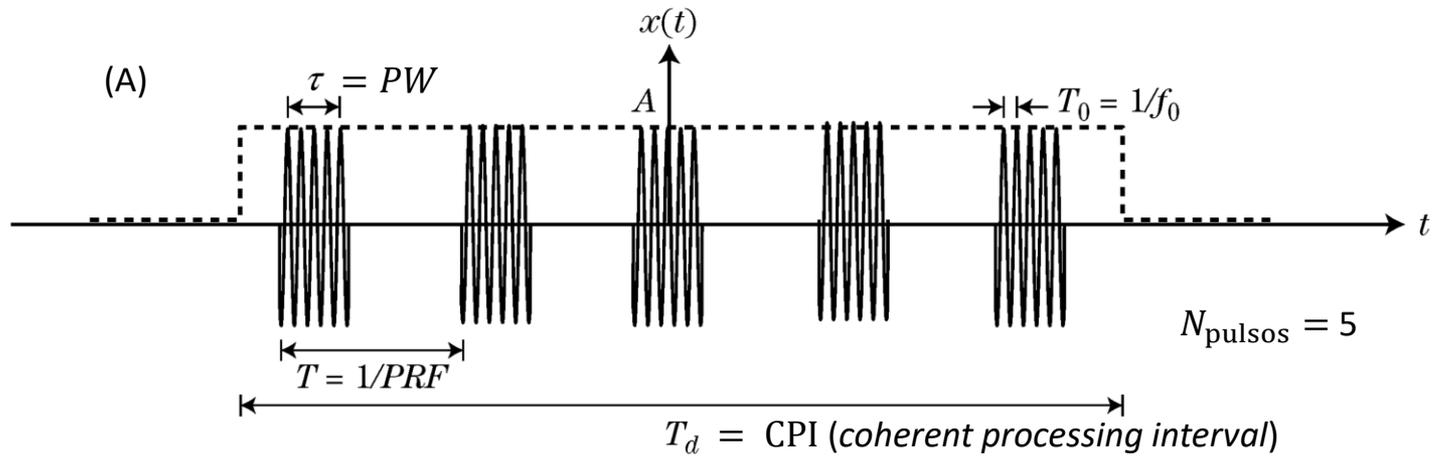
Resolução de Doppler

Quando os desvios Doppler respectivos aos ecos dos dois alvos estão separados de mais de $BW_{-3dB} = 89$ [Hz] observa-se que os ecos estão claramente resolvidos no domínio frequência Doppler, conforme mostrado em (a) no slide anterior. Quando as velocidades radiais dos alvos são próximas, a separação em frequência dos respectivos desvios Doppler se torna menor que 89 [Hz], conforme mostrado em (b) abaixo para uma separação de 75 [Hz], notando que em (b) os dois picos das respectivas funções $\text{sinc}(f)$ começam a se fundir. Embora dois picos sejam visíveis em (b), o “vale” entre ambos é raso, de modo que se ruído fosse adicionado aos sinais dos ecos, a capacidade de resolver essas duas frequências de maneira confiável seria degradada. Em (c) é mostrado o espectro de $x[n]$ quando os dois alvos se movem com velocidade radial quase iguais, resultando uma separação de apenas 50 [Hz], e evidenciando que o espectro dos dois ecos são claramente não-resolvidos no domínio frequência Doppler. Portanto, a resolução de Doppler de um radar pulsado é dependente da banda $BW_{-3dB} = 0.89/PW$ do lobo principal da função $\text{sinc}(f)$, sendo PW a largura do pulso.

Na prática, o processo de integração efetuado no bloco “processamento Doppler” no slide 6 (ver discussão nos slides 7 a 9) faz uso não de apenas um pulso, mas de uma sequência de N_{pulsos} pulsos transmitidos ($N_{\text{pulsos}} = 5$, por exemplo), de modo que a sequência $x[n]$ pode ser interpretada como um sinal periódico cujo período é o intervalo de tempo T_d do processo de integração efetuado para maximizar a SNR (*signal to noise ratio*) de $x[n]$, intervalo que é denominado **CPI** (*coherent processing interval*). Nesta situação, $x[n]$ (mostrada na forma contínua $x(t)$) e respectivo espectro bilateral $|X(f)|$ são conforme mostrado em (A) e (B) no próximo slide.

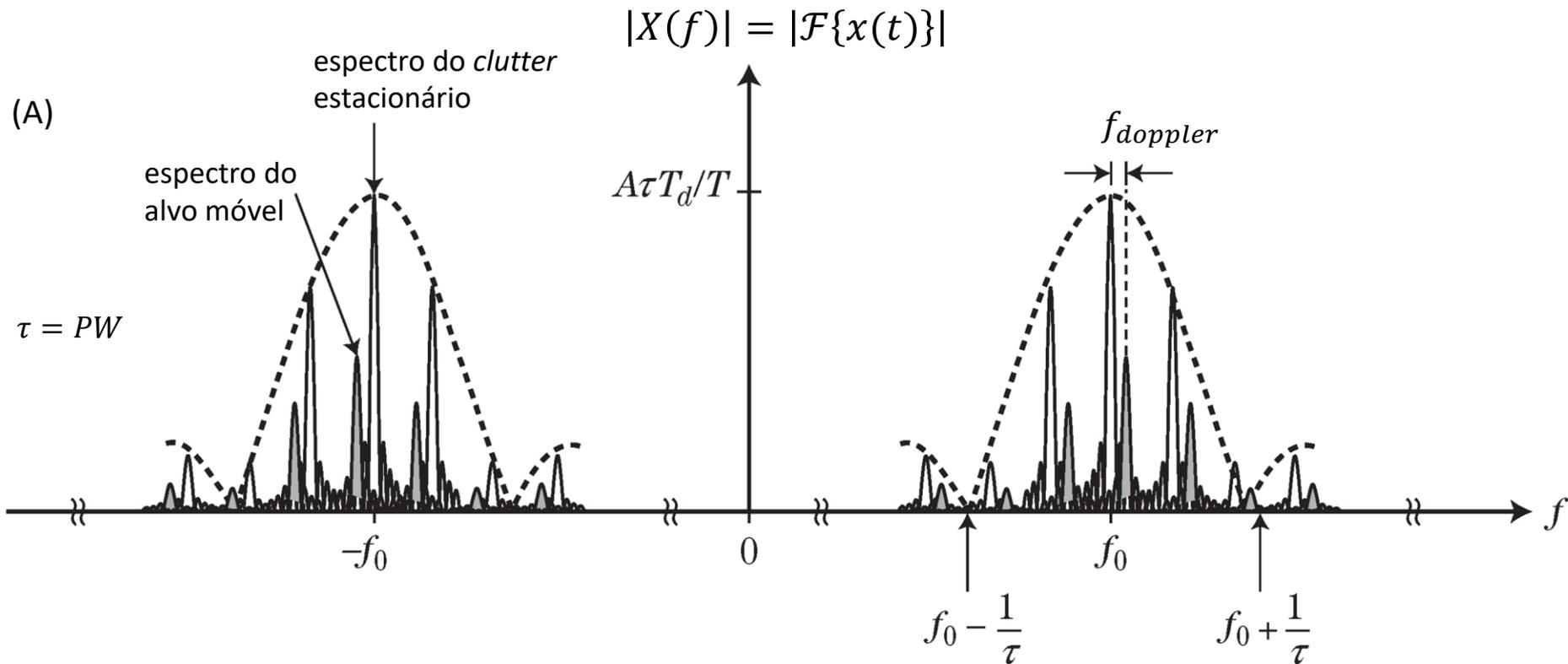


Resolução de Doppler



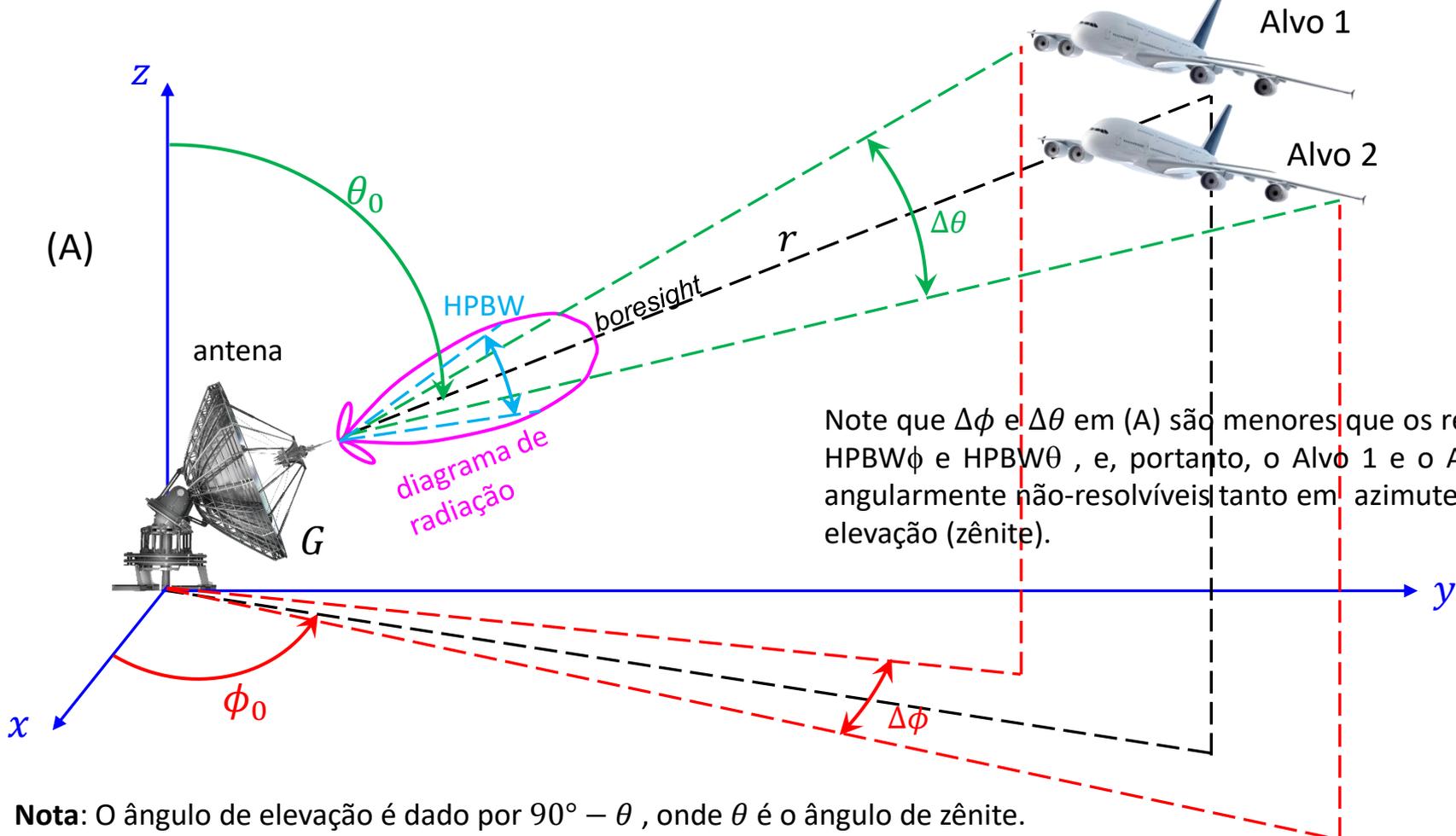
Resolução de Doppler

O gráfico em (A) abaixo mostra o exemplo do espectro bilateral de um alvo móvel e o espectro bilateral do *clutter* estacionário para o caso prático de uma sequência de pulsos $x(t)$ de largura $\tau = PW$ transmitida com uma duração T_d equivalente ao CPI (*coherent processing interval*), conforme mostrado em (A) no slide anterior. Note que o espectro do *clutter* estacionário está centrado na frequência f_0 do *burst* de RF e que o espectro do alvo móvel está deslocado de $f_{doppler}$ positivo em relação a f_0 (alvo se aproximando da antena do radar). Como a sequência de pulsos $x(t)$ aproxima uma sequência periódica de período T_d (na prática, truncada em T_d), seu espectro se aproxima do espectro de barras espectrais discretas de um sinal periódico (ver slides 6 a 13 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula7&8_02042020.pdf), e daí o limite máximo da resolução de Doppler possível de ser obtida em um radar pulsado é a separação $1/T_d$ entre barras espectrais.



Resolução de ângulo

Dois alvos podem ser resolvidos em ângulo se eles estiverem angularmente separados de uma variação do ângulo de azimute $\Delta\phi$ maior do que o ângulo HPBW ϕ de abertura -3dB do diagrama de irradiação da antena no plano de azimute (plano xy) e simultaneamente estiverem angularmente separados de uma variação do ângulo de zênite $\Delta\theta$ maior do que o ângulo HPBW θ de abertura -3dB do diagrama de irradiação da antena no plano de zênite (plano que contém o eixo z e o ângulo de zênite θ), conforme mostrado em (A) abaixo e em (A) no próximo slide. Por exemplo, o gráfico em (B) no próximo slide mostra o ganho em $\text{dBi} \times \Delta\theta$ no plano de zênite em torno do *boresight* do diagrama de irradiação de uma antena de radar típica da banda X, e identifica o ângulo HPBW θ de abertura -3dB ("3dB Beamwidth θ_3 ").



Resolução de ângulo

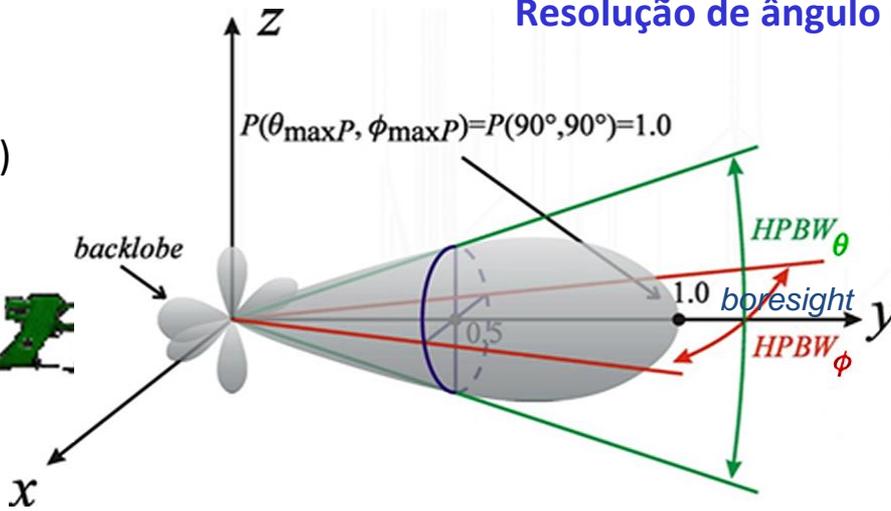
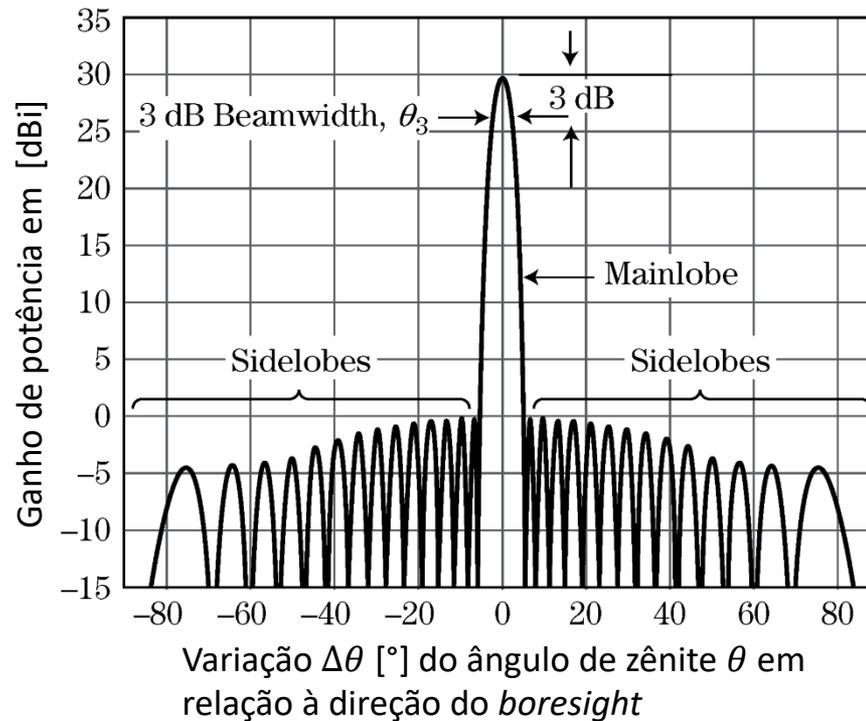


Diagrama de radiação de uma antena (padrão de potência da antena). Os *half power beam width* (ângulos de meia potência -3dB) são $\text{HPBW}_{\theta} = \text{HPBW}_{\phi} \approx 60^\circ$ neste diagrama.

(B)



Compressão de pulso

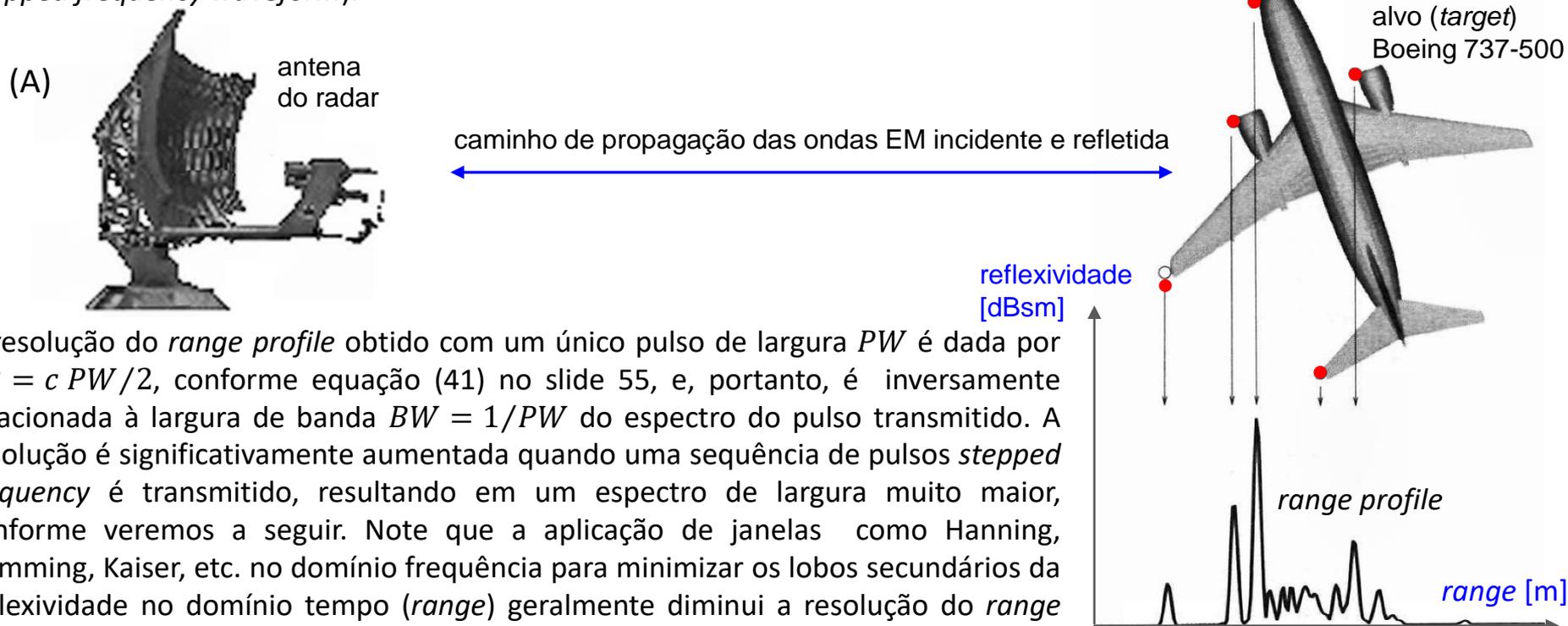
Conforme discutimos no slide 57 do Cap I.6 , quando uma resolução de *range* mais precisa se faz necessária, pulsos mais curtos necessitam ser transmitidos pelo TX do radar. No entanto, pulsos muito curtos têm um espectro muito largo e a resposta em frequência da transmitância do caminho de propagação da onda EM inevitavelmente atenuará determinadas frequências do espectro do pulso irradiado pelo TX, distorcendo e atenuando o pulso no domínio tempo e deteriorando a sua inteligibilidade no âmbito da demodulação efetuada pelo RX.

As técnicas de compressão de pulso produzem no RX uma largura de pulso efetiva muito menor do que a largura de pulso transmitida pelo TX, aumentando significativamente a resolução de *range* sem aumentar a largura do espectro da forma de onda irradiada pelo TX. O aumento de resolução de *range*, conforme discutimos no Cap I.6, melhora a detecção de alvos pouco espaçados no domínio *range*, bem como aprimora a detecção de alvos em cenários operacionais com presença generalizada de ecos de *clutter*. Existem várias técnicas para compressão de pulso, que podem ser classificadas em quatro grupos conforme abaixo. Neste estudo enfocaremos as técnicas (III) e (IV).

- (I) Compressão de pulso UWB (ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/PMMDBZUWB.pdf> e <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/MCUWBRPCSG.pdf>).
- (II) Compressão de pulso por técnicas de super-resolução , que fazem uso da matriz de covariância do sinal recebido para realizar uma estimativa ótima baseada na *eigen*-estrutura de sub-espacos do sinal (ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SRPCTFRSI.pdf>).
- (III) Compressão intrapulso, baseada na codificação em frequência e/ou em fase de cada um dos pulsos de RF (*burst*) irradiado pelo TX. A forma de onda codificada é então submetida a um *matched filter* no RX que produz em sua saída um pulso de largura reduzida. Simultaneamente o *matched filter* atenua a potência do ruído térmico gerado no *front-end* do RX, maximizando a SNR (*signal to noise ratio*) do sinal dos ecos e, portanto, aumentando a sua inteligibilidade no processo de demodulação no RX (ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf).
- (IV) Compressão interpulso, que consiste em aumentar em passos Δf a frequência da portadora de cada um dos N_{pulsos} pulsos de RF transmitidos sucessivamente durante o intervalo de tempo T_a . T_a é o intervalo do processo de integração efetuado para maximizar a SNR (*signal to noise ratio*) de $x[n]$, intervalo denominado CPI (*coherent processing interval*). $x[n]$ é a sequência de símbolos IQ resultante na saída do bloco *down-converter* no slide 2 em consequência da transmissão da sequência de pulsos com frequência crescente em passos Δf . A compressão é obtida integrando de forma coerente (ver Cap 1.5) durante o CPI a série de pulsos (*bursts*) com frequências distintas através de Transformada de Fourier inversa, que atua como um *matched filter* conforme estudaremos adiante. Esta técnica é denominada *stepped frequency waveform compression*, conforme veremos a seguir.

Stepped frequency waveform compression

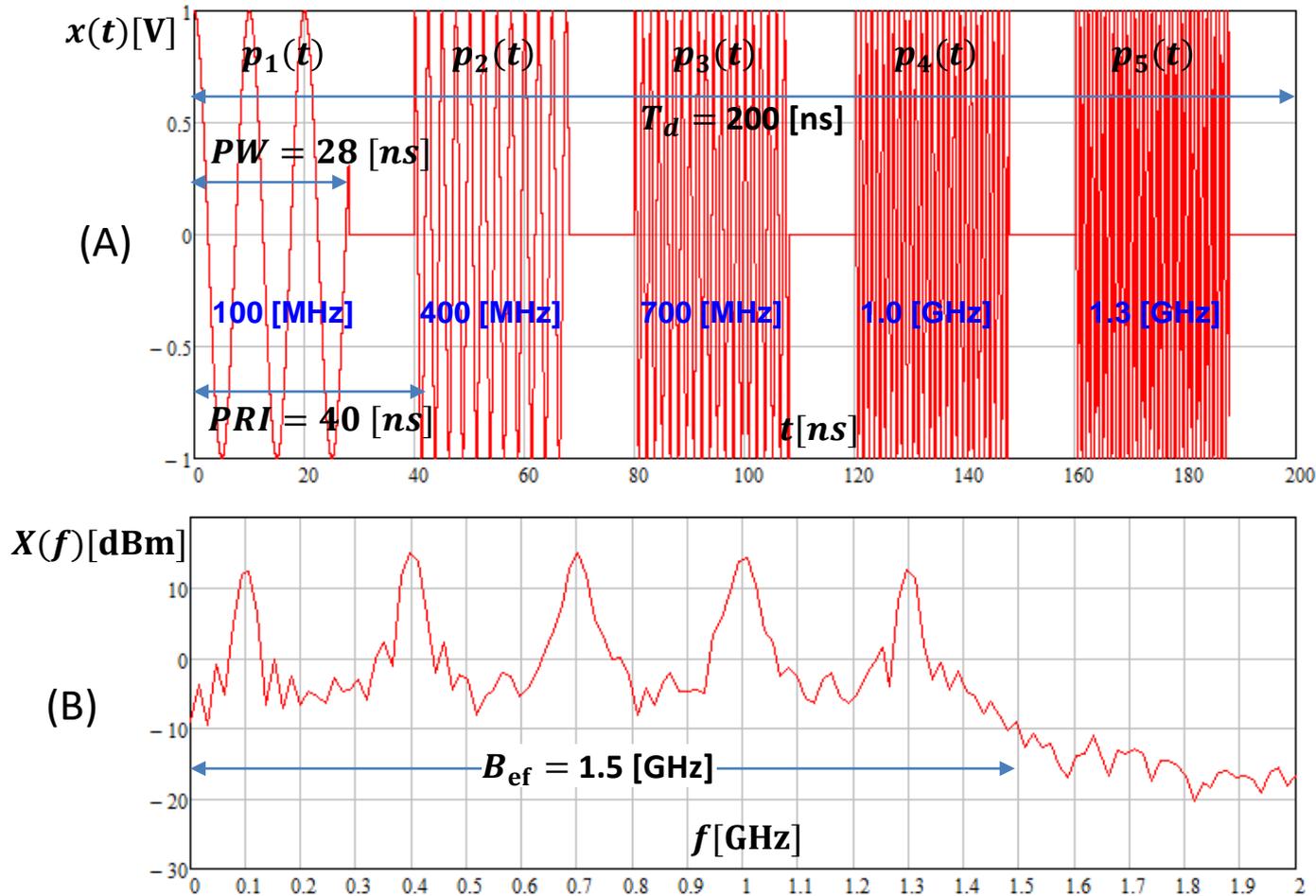
Perfis de *range* (*range profiles*) resultam em gráficos cartesianos da reflexividade (= RCS de alta resolução) do alvo em função do *range*, conforme mostrado em (A) abaixo para um Boeing 737-500. Se um *range profile* for medido com resolução suficiente, as contribuições separadas dos **scatterers**, i.e., partes do alvo que refletem fortemente a onda EM incidente (pontos **vermelhos** em (A) abaixo), estarão resolvidas em *range*. *Range profiles* fornecem informação sobre a geometria do alvo e, portanto, são cruciais para os algoritmos de IA para classificação de alvos (ver <https://www.mathworks.com/help/radar/ug/radar-target-classification-using-machine-learning-and-deep-learning.html>). O *range profile* de um alvo é obtido através da irradiação pelo TX de uma onda EM cujo espectro compreende uma ampla faixa de frequência, o que é usualmente obtido através da transmissão de uma sequência de pulsos com frequência crescente (*stepped frequency waveform*), conforme mostrado em (A) no próximo slide. Um *range profile* é definido pela magnitude da Transformada de Fourier inversa da sequência sub-amostrada dos símbolos IQ $x[n] = I[n] + jQ[n]$ na saída do bloco *down-converter* no slide 2 em consequência da transmissão da sequência de pulsos com frequência crescente (*stepped frequency waveform*).



A resolução do *range profile* obtido com um único pulso de largura PW é dada por $\Delta R = c PW / 2$, conforme equação (41) no slide 55, e, portanto, é inversamente relacionada à largura de banda $BW = 1/PW$ do espectro do pulso transmitido. A resolução é significativamente aumentada quando uma sequência de pulsos *stepped frequency* é transmitido, resultando em um espectro de largura muito maior, conforme veremos a seguir. Note que a aplicação de janelas como Hanning, Hamming, Kaiser, etc. no domínio frequência para minimizar os lobos secundários da reflexividade no domínio tempo (*range*) geralmente diminui a resolução do *range profile* (https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function).

Stepped frequency waveform compression

Em (A) abaixo é mostrado o exemplo de uma *stepped frequency waveform* $x(t)$, a qual transmite um bloco de $N_{\text{pulsos}} = 5$ pulsos de RF (*bursts*) $p_k(t)$ sucessivos, sendo $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$. Cada pulso $p_k(t)$ tem uma largura $PW = 28$ [ns] e o bloco de N_{pulsos} pulsos é transmitido durante o intervalo de tempo $T_d = 200$ [ns] correspondente ao **CPI - coherent processing interval**. A frequência da portadora de cada respectivo *burst* $p_k(t)$ é 100, 400, 700, 1000 e 1300 [MHz], e, portanto, o *step* de frequência entre cada *burst* sucessivo é $\Delta f = 300$ [MHz]. $PRI = 1/PRF$ é o *pulse repetition interval*, sendo PRF o *pulse repetition frequency* do radar. Em (B) é mostrado o espectro $X(f)$ de $x(t)$.



Stepped frequency waveform compression

Note em (A) e (B) no slide anterior que a frequência f_k do k -ésimo *burst* $p_k(t)$, $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$, é dada por

$$f_k = f_0 + (k - 1)\Delta f \text{ [Hz]} \quad (42)$$

sendo $f_0 = 100$ [MHz] a frequência da portadora do *burst* $p_1(t)$ de menor frequência. A largura de banda instantânea do espectro de cada pulso é $B_{\text{inst}} = 1/PW = 35.714$ [MHz], no entanto, a largura de banda efetiva B_{ef} do espectro do bloco de N_{pulsos} *bursts* é muito maior ($B_{\text{ef}} = 1.5$ [GHz] conforme (B) no slide anterior) e é dada por

$$B_{\text{ef}} = N_{\text{pulsos}} \Delta f \text{ [Hz]} \quad (43)$$

O *range resolution* do exemplo de *stepped frequency waveform* $x(t)$ mostrado em (A) no slide anterior é dado por

$$\Delta R = \frac{c}{2B_{\text{ef}}} \text{ [m]} \quad (44)$$

e resulta em $\Delta R = 0.1$ [m] para o exemplo em análise, sendo $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] a velocidade de propagação da onda EM.

Este valor $\Delta R = 0.1$ [m] representa um significativo aumento na resolução de *range* se compararmos com o *range resolution* ΔR_0 que seria obtido com um único pulso de largura $PW = 28$ [ns] e frequência constante (ver equação (41) no slide 55), dado por

$$\Delta R_0 = \frac{c PW}{2} = \frac{c}{2B_{\text{inst}}} \text{ [m]} \quad (45)$$

, resultando em $\Delta R_0 = 4.197$ [m]. O fator ρ com que a precisão do *range resolution* é aumentada (que também é o fator de compressão de pulso) é dado por

$$\rho = \frac{\Delta R_0}{\Delta R} \quad (46)$$

, resultando em $\rho = 42$ para o exemplo em análise.

Stepped frequency waveform compression

As etapas do processo para determinação do *range profile* de um ou mais alvos utilizando uma *stepped frequency waveform* para maximizar o *range resolution* através de compressão **interpulso** é conforme segue:

(I) Uma sequência de N_{pulsos} pulsos (*bursts*) $p_k(t)$ de largura PW e banda instantânea estreita $B_{\text{inst}} = 1/PW$ são irradiados pela antena do TX, sequência que constitui um bloco de pulsos, sendo $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$. A frequência da portadora de cada *burst* sucessivo $p_k(t)$ no bloco de pulsos é adicionada de um valor constante Δf . A onda EM irradiada pela antena ilumina os *scatterers* (pontos **vermelhos** em (A) no slide 65).

(II) O sinal resultante da superposição das ondas EM de cada respectivo eco recebido de cada *scatterer* é amostrado pelo ADC (ver slide 2) a uma frequência de amostragem f_s e a sequência de símbolos $I + jQ$ na saída do *down-converter* (ver slide 2) resultante dos ecos dos *scatterers* é armazenada em memória.

(III) A sequência de símbolos $I + jQ$ armazenada na memória é submetida a uma sub-amostragem de tal forma a resultar para cada *scatterer* em uma amostra $s_k = A_k e^{j\phi_k}$ para o eco do pulso $p_k(t)$ recebido no instante t_k , sendo o instante t_k de cada sub-amostra correspondente ao instante do centro do respectivo pulso de eco recebido. O instante t_k do centro de cada pulso de eco recebido é determinado através da detecção do máximo da função de correlação entre um *template* de cada pulso (*burst*) $p_k(t)$ de frequência f_k transmitido e respectivo eco (ver slides 99 a 102 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_1.pdf). O instante em que ocorre o máximo da função de correlação entre o pulso $p_k(t)$ transmitido e o eco recebido identifica o instante do centro do pulso recebido, tendo como referência o instante em que o pulso $p_k(t)$ de frequência f_k foi transmitido. **Note que o módulo e a fase de cada amostra $I + jQ = s_k = A_k e^{j\phi_k}$ assim obtida para cada eco recebido do respectivo *scatterer* na frequência f_k expressa o módulo e a fase da onda EM refletida no *scatterer* para cada uma das respectivas N_{pulsos} frequências f_k transmitidas, e portanto expressa a reflexividade de cada *scatterer* no domínio frequência. Portanto, se aplicarmos a Transformada de Fourier inversa à sequência $I + jQ = s_k = A_k e^{j\phi_k}$ em banda-base obteremos a reflexividade do *scatterer* no domínio tempo, o que é equivalente ao *range profile* discutido no slide 65.**

(IV) Antes de aplicar a Transformada de Fourier inversa à sequência $I + jQ$ aplica-se janelamento (Hanning, Hamming, Kaiser, etc. – https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function) no domínio frequência para minimizar os lobos secundários da reflexividade no domínio tempo (*range*), permitindo assim a identificação de *scatterers* de pouca reflexividade. Para *scatterers* em alvos distintos movendo-se em velocidades distintas, efetua-se correção p/ os respectivos desvios Doppler.

(V) Aplica-se a Transformada de Fourier inversa à sequência $I + jQ$ resultante do janelamento, e obtém-se o *range profile* para este bloco de pulsos. O processo é repetido para cada novo bloco de pulsos transmitido.

Stepped frequency waveform compression

Conforme procedimento indicado no passo (III) do slide anterior, para cada *scatterer*, o módulo A_k e a fase ϕ_k de cada k -ésima sub-amostra $s_k = A_k e^{j\phi_k}$ obtida para a onda EM do eco na frequência f_k recebido no instante t_k do respectivo *scatterer* é dada por:

$$A_k \propto \sqrt{\text{RCS} [\text{m}^2]} \text{ do } \textit{scatterer} \text{ na frequência } f_k [\text{Hz}] \quad (47)$$

$$\phi_k = 2\pi f_k t_k [\text{rad}] \quad (48)$$

sendo $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$ e $f_k = f_0 + (k - 1)\Delta f$, conforme equação (42). Note que (47) resulta do fato de a magnitude do campo elétrico da onda EM do eco que incide na antena do radar ser proporcional à raiz quadrada da magnitude do vetor de Poynting da onda EM incidente (rever discussão nos slides 26 a 31). O instante t_k em que o eco do *scatterer* é recebido na frequência f_k relaciona-se com o *range* r_k do *scatterer* através de:

$$t_k = \frac{2r_k}{c} [\text{s}] \quad (49)$$

sendo $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] a velocidade de propagação da onda EM e sendo r_k o *range* do *scatterer* cujo eco é recebido na frequência f_k e no instante t_k , dado por:

$$r_k = r_0 - (k - 1) v_r \text{ PRI} [\text{m}] \quad (50)$$

onde r_0 é o *range* do *scatterer* no instante inicial $t = 0$ [s], v_r [m/s] é a velocidade radial do alvo ao qual o *scatterer* é associado, sendo $v_r > 0$ para *scatterers* que se aproximam da antena do radar, e *PRI* [s] é o *pulse repetition interval*, conforme mostrado em (A) no slide 66. De (42), (47), (48), (49) e (50) obtemos:

$$s_k = A_k e^{j\phi_k} = A_k e^{-j\frac{4\pi}{c}(f_0 + (k-1)\Delta f)(r_0 - (k-1)v_r \text{ PRI})} [\text{V}] \quad (51)$$

Ocorre que o *down-converter* no slide 2 converte para bandabase o espectro do sinal dos ecos recebidos, de modo que (42) torna-se $f_k = k\Delta f$ [Hz] (i.e., não há f_0), tendo como consequência que apenas a variação Δf em bandabase é relevante no cômputo de (51). Simultaneamente, para manter coerência com o fato de não haver f_0 em bandabase, apenas a variação do *range* em relação à r_0 é relevante no cômputo de r_k , de modo que (50) torna-se $r_k = r_0 - k v_r \text{ PRI}$ [m]. Sob esta interpretação em bandabase, (51) simplifica então para:

$$s_k = A_k e^{j\phi_k} = A_k e^{-j\frac{4\pi}{c}(k\Delta f)(r_0 - k v_r \text{ PRI})} [\text{V}] \quad (52)$$

Stepped frequency waveform compression

Para um cenário operacional com $N_{\text{scatterers}}$, a equação (52) é generalizada para a forma da equação (53) abaixo, onde $s_{k,m}$ representa a magnitude $A_{k,m}$ e a fase $\phi_{k,m}$ da onda EM do eco do m -ésimo *scatterer* recebido na k -ésima frequência. $r_{0,m}$ é o range do m -ésimo *scatterer* no instante inicial $t = 0$ [s] e $v_{r,m}$ [m/s] é a velocidade do alvo ao qual o m -ésimo *scatterer* é associado, sendo $m = 1, 2 \dots N_{\text{scatterers}}$ e $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$.

$$s_{k,m} = A_{k,m} e^{j\phi_{k,m}} = A_{k,m} e^{-j\frac{4\pi}{c}(k\Delta f)(r_{0,m} - k v_{r,m} PRI)} \quad (53)$$

Para o cenário operacional com $N_{\text{scatterers}}$, a reflexividade Γ para cada valor de *range* do *range profile* é obtida aplicando-se a Transformada de Fourier inversa à sequência u_k que resulta da soma de $N_{\text{scatterers}}$ sequências $s_{k,m} = A_{k,m} e^{j\phi_{k,m}}$ dadas por (53), onde cada m -ésima sequência $s_{k,m}$ é determinada para o respectivo m -ésimo *scatterer*:

$$u_k = \sum_{m=1}^{N_{\text{scatterers}}} s_{k,m} = \sum_{m=1}^{N_{\text{scatterers}}} A_{k,m} e^{-j\frac{4\pi}{c}(k\Delta f)(r_{0,m} - k v_{r,m} PRI)} \quad (54)$$

O índice $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$ em (54) é o índice de cada frequência f_k , de modo que u_k é uma sequência de amostras no domínio frequência. Para converter u_k para o domínio tempo (domínio *range*) fazemos:

$$\Gamma(\text{range}) = \text{IFFT}\{u\} \quad (55)$$

sendo $\text{IFFT}\{\cdot\}$ o operador que retorna a *Inverse Fast Fourier Transform* da sequência no domínio frequência que é argumento $\{\cdot\}$ do operador (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform).

Quando os *scatterers* estão localizados em alvos distintos que se movem em velocidades radiais v_r , significativamente distintas pode ocorrer o denominado **fenômeno de dispersão**, que achata e desloca o pico da curva do *range profile* que identifica o *scatterer* (comprometendo, portanto, o *range resolution* e a precisão do *range profile*). Uma medida da dispersão D é dada por:

$$D = \frac{v_r N_{\text{pulsos}} PRI}{\Delta R} \quad (56)$$

onde ΔR é o *range resolution* dado por (44). Para cada *scatterer* movendo-se a uma velocidade v_r , é recomendado $D < 3$, caso contrário ocorrerá o achatamento e o deslocamento do pico da curva do *range profile* que identifica o *scatterer*.

Stepped frequency waveform compression

Aeronaves *stealth* ([https://en.wikipedia.org/wiki/Stealth aircraft](https://en.wikipedia.org/wiki/Stealth_aircraft)) têm a sua fuselagem recoberta por uma "pele" (*skin*) de RAMs (*radiation absorbent materials*) para efeito de minimizar a probabilidade de que a onda EM irradiada por um radar de vigilância aérea seja refletida na forma de eco, minimizando assim a probabilidade de detecção da aeronave pelo radar ([https://en.wikipedia.org/wiki/Radiation-absorbent material](https://en.wikipedia.org/wiki/Radiation-absorbent_material)).

Ocorre que o RAM é otimizado para uma única banda de frequência operacional (em geral, banda X), e neste contexto, os fabricantes de radares passaram a construir radares na banda de VHF, banda em que o RAM das aeronaves *stealth* têm baixa eficiência de absorção da onda EM incidente (ver <https://thediomat.com/2014/08/the-f-35-vs-the-vhf-threat/> , <http://www.ausairpower.net/SP/DT-Rus-VHF-Radar-2008.pdf> e <https://coffeordie.com/iran-russian-radar/>).

Embora sejam capazes de detectar aeronaves *stealth*, radares de VHF apresentam a desvantagem de uma pobre resolução de *range* comprometida pela limitação de banda da *waveform* da onda EM irradiada na banda de VHF. Mesmo adotando um *stepped frequency waveform*, um radar de VHF apresenta uma pobre resolução de *range* ΔR (ver equação (44)) em consequência da limitada largura de banda efetiva B_{ef} (ver equação (43)) que é passível de ser adotada na banda de VHF.

Veremos nos próximos slides que a resolução de *range* ΔR de um radar de VHF é de dezenas de metros, de modo que não há precisão suficiente para determinar o *range profile* de *scatterers* separados de apenas alguns poucos metros em um único alvo, conforme vimos no diagrama (A) no slide 65 para um Boeing 737-500. O caso do *range profile* de *scatterers* em um Boeing 737-500 será analisada adiante no Exemplo 8 para um radar da banda X que adota *stretch processing*.

A baixa resolução de *range* de um radar de VHF viabiliza detectar o alvo, mas sem precisão suficiente para identificar um ou mais pontos de reflexão da onda EM refletida em *scatterers* ao longo do alvo. Nesta situação, o *range profile* de um radar de VHF é perfeitamente capaz de identificar o *range* de cada alvo, mas é incapaz de identificar a posição detalhada de *scatterers* em um alvo, conforme veremos no exemplo que segue.

Stepped frequency waveform compression

Exemplo 4: Um radar *pulse-Doppler stepped frequency* opera na banda de VHF e o diagrama de radiação de seu *phased-array* ilumina 4 aeronaves que voam em formação, conforme mostrado em (A) abaixo. A tabela abaixo mostra o RCS na banda de VHF e o *range* de cada alvo (aeronave) em um determinado instante, identificando também a velocidade medida para cada alvo pelo processamento Doppler do radar. Para minimizar o efeito de dispersão no *range profile* da formação de aeronaves, o processamento Doppler refere a velocidade de todos os demais alvos em relação à velocidade do alvo mais próximo da antena (F35), conforme mostra a tabela.

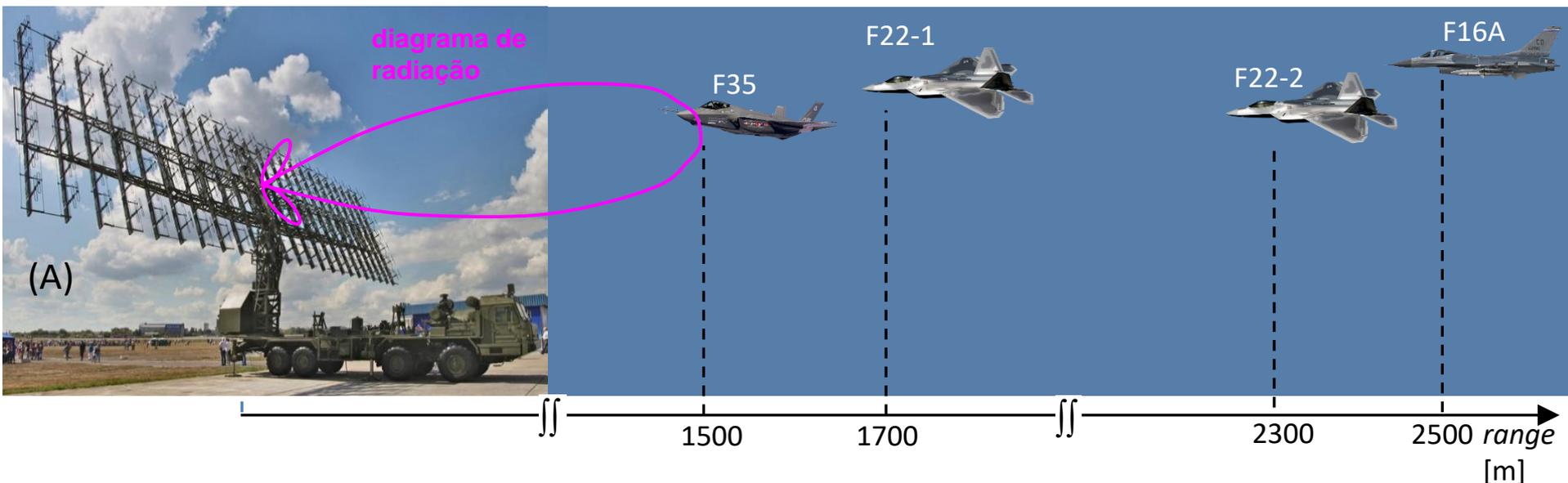
A forma de onda *stepped frequency* deste radar apresenta os seguintes parâmetros:

$$PRF = 100 \text{ [Hz]} \quad PW = 7 \text{ [ms]}$$

$$N_{\text{pulsos}} = 64 \quad \Delta f = 50 \text{ [KHz]}$$

Tipo de janela aplicada na sequência u_k :
Janela retangular.

Alvo	RCS [m ²]	Range [m]	Velocidade [m/s]	Velocidade relativa ao alvo "F35" [m/s]
F35	1	1500	411.6 (800 knots)	0
F22-1	5	1700	411.6 (800 knots)	0
F22-2	5	2300	463.0 (900 knots)	51.4
F16A	10	2500	463.0 (900 knots)	51.4



Stepped frequency waveform compression

Pede-se:

- (a)** Determine a sequência do domínio frequência $u_k = I_k + jQ_k$, $k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$ (ver equação (54)), para o cenário operacional que contempla 4 aeronaves voando em formação, conforme tabela dada no enunciado.
- (b)** A partir do resultado de (a), plote o gráfico $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$.
- (c)** A partir do resultado de (a), plote o gráfico $\angle u_k[^\circ] \times f_k[\text{KHz}]$.
- (d)** Interprete os gráficos obtidos em (b) e (c) no contexto das ondas EM refletidas nos alvos e que retornam incidindo na antena do radar.
- (e)** Determine e plote o *range profile* $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ deste cenário operacional (ver equação (55)).
- (f)** Determine numericamente o *range resolution* através da equação (44) e compare com o *range resolution* obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo que ocorre para o alvo “F35” no gráfico $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ obtido em (e).
- (g)** Determine o *range resolution* ΔR_0 dado pela equação (45) que seria obtido com um único pulso de largura PW . Compare com o *range resolution* ΔR dado pela equação (44) que é obtido com o *stepped frequency waveform* especificado no enunciado.
- (h)** Determine o fator de compressão de pulso ρ resultante de (g).

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo4.m e funções associadas disponíveis em http://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E4S72.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo4.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

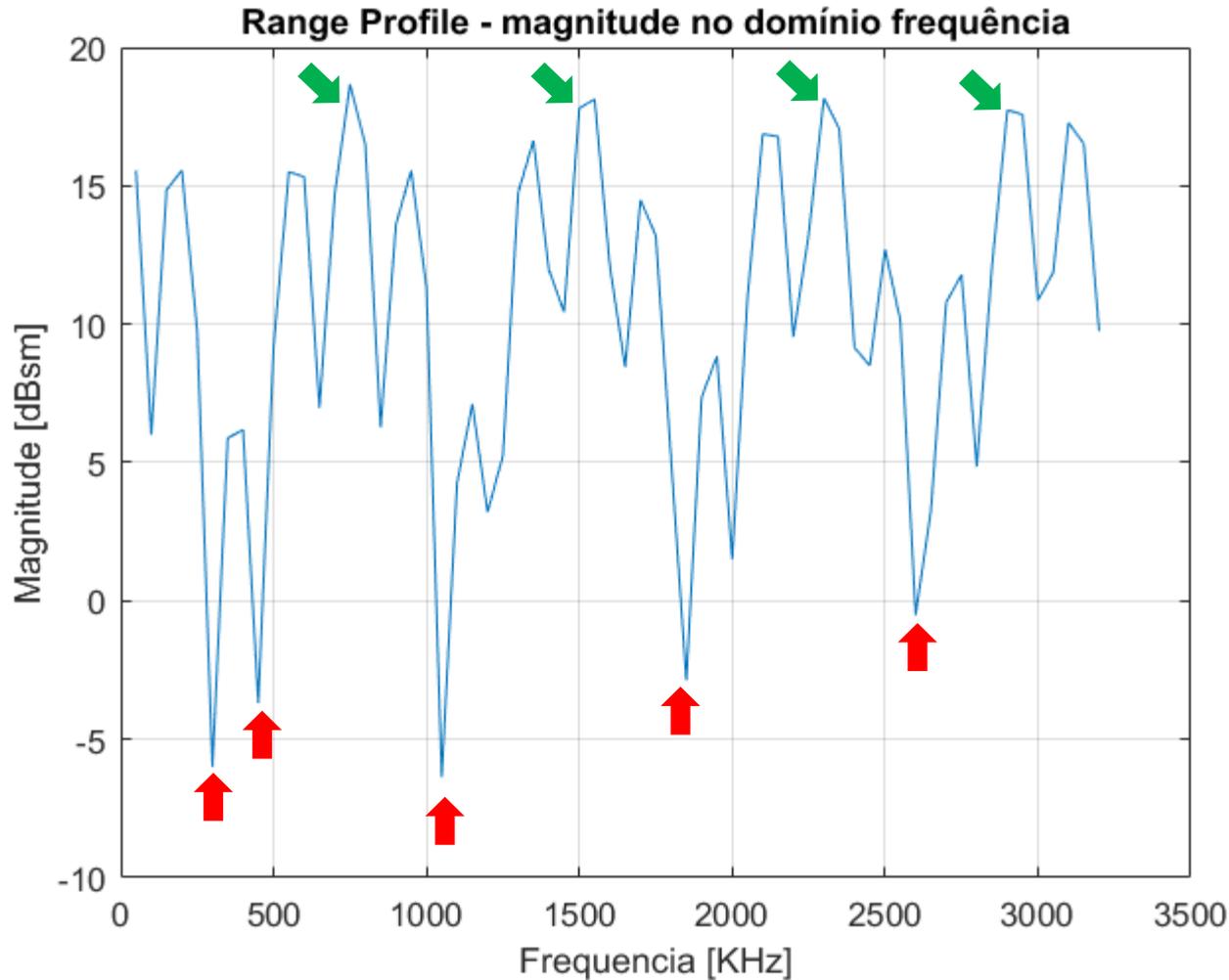
(a) $u =$

-1.2136 + 5.8746i	1.7321 - 1.4643i	-0.8551 - 4.5086i
-1.2712 + 1.5399i	1.1184 + 0.9172i	8.0964 - 0.2028i
-5.5291 + 0.0155i	1.8178 + 0.2222i	-1.9901 + 6.8479i
1.2170 - 5.8746i	-0.8962 + 5.3986i	-2.7221 - 0.9027i
2.8452 + 1.1567i	-6.1661 - 2.8337i	-2.5624 - 0.7217i
0.5001 + 0.0335i	2.0127 - 3.4253i	1.3423 - 4.1011i
1.2538 + 1.5182i	1.7372 - 2.8347i	2.7651 + 1.6342i
-1.3019 + 1.5668i	6.7319 + 3.8761i	-0.7071 + 0.6251i
-0.6471 - 0.0916i	-5.8402 + 5.5574i	1.3910 + 0.4356i
-2.7106 + 0.9452i	-2.3770 - 3.2378i	-1.7117 + 3.0100i
-0.9530 - 5.8865i	-1.5547 - 2.1388i	-2.9349 - 2.5437i
5.8265 + 0.3982i	4.0511 - 3.4203i	0.7449 - 1.5808i
0.7520 + 2.1046i	2.0076 + 4.1074i	2.1892 - 3.3878i
0.4796 + 5.4145i	-1.7545 + 0.4399i	5.4609 + 5.4374i
-8.5354 - 0.9033i	0.2142 + 0.6863i	-6.7610 + 3.3892i
2.3152 - 6.2603i	-2.2284 + 0.6856i	-1.4645 - 3.1712i
2.0180 - 0.4020i	-0.7536 - 2.6635i	-1.3038 - 3.6972i
4.6872 + 0.9265i	0.9108 - 0.7648i	7.1288 - 1.6243i
-2.2486 + 5.5572i	2.7103 - 2.2603i	-0.6735 + 6.6658i
-3.0093 - 2.1203i	3.3037 + 6.1444i	-2.9436 - 0.8794i
0.1423 - 0.4589i	-6.7632 + 1.3833i	
-0.8405 - 1.3993i	-0.8837 - 2.8658i	

Note que , como $N_{\text{pulsos}} = 64$, então u é uma sequência de valores IQ com 64 amostras complexas.

Stepped frequency waveform compression

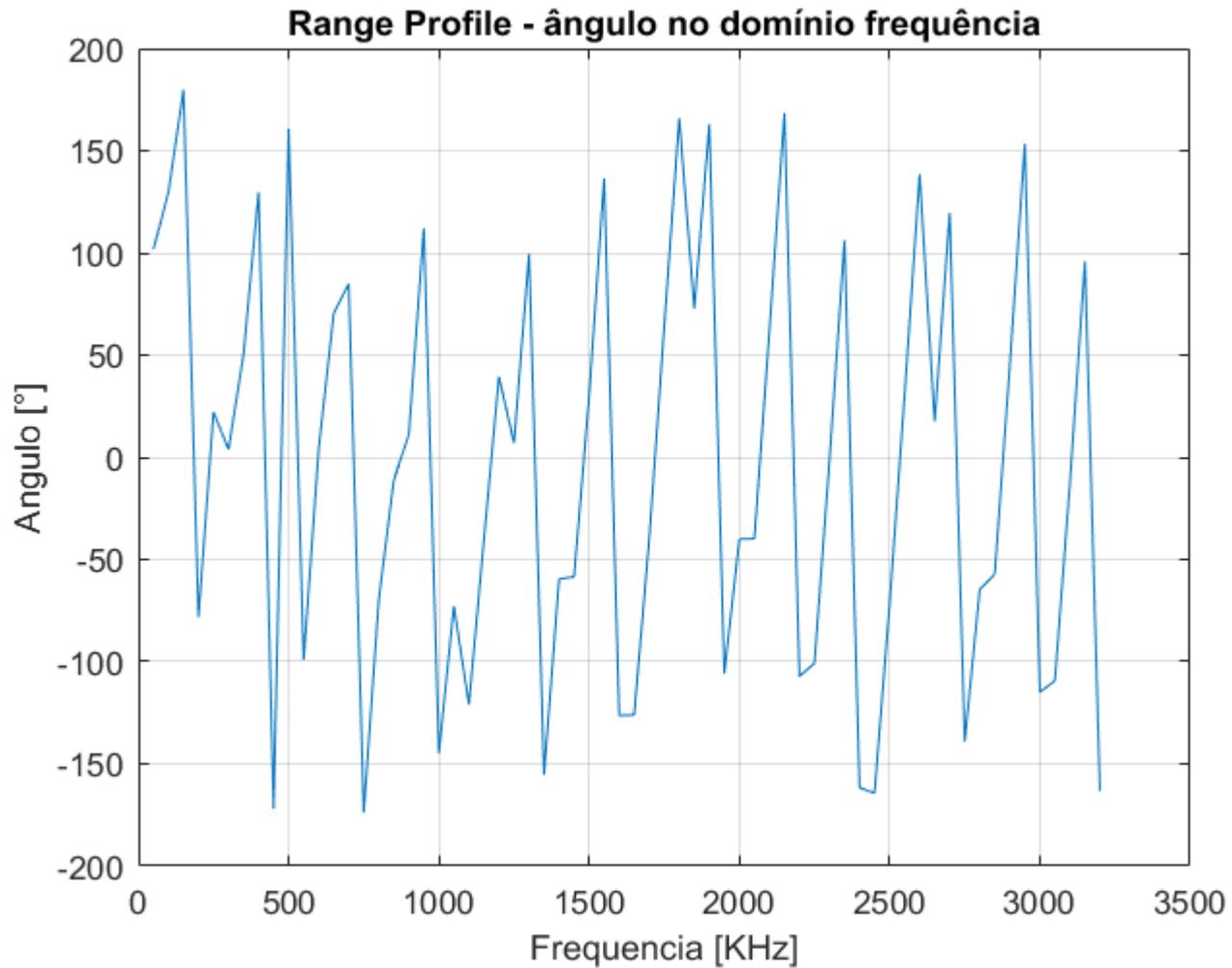
(b)



Nas frequências em que a curva é marcada pelas setas **verdes** ocorre intensa **interferência construtiva** entre as 4 ondas EM refletidas nos respectivos 4 alvos (F35, F22-1, F22-2 e F16A) e que retornam incidindo na antena do radar na forma de eco do alvo.

Nas frequências em que a curva é marcada pelas setas **vermelhas** ocorre intensa **interferência destrutiva** entre as 4 ondas EM refletidas nos respectivos 4 alvos (F35, F22-1, F22-2 e F16A) e que retornam incidindo na antena do radar na forma de eco do alvo.

(c)



(d)

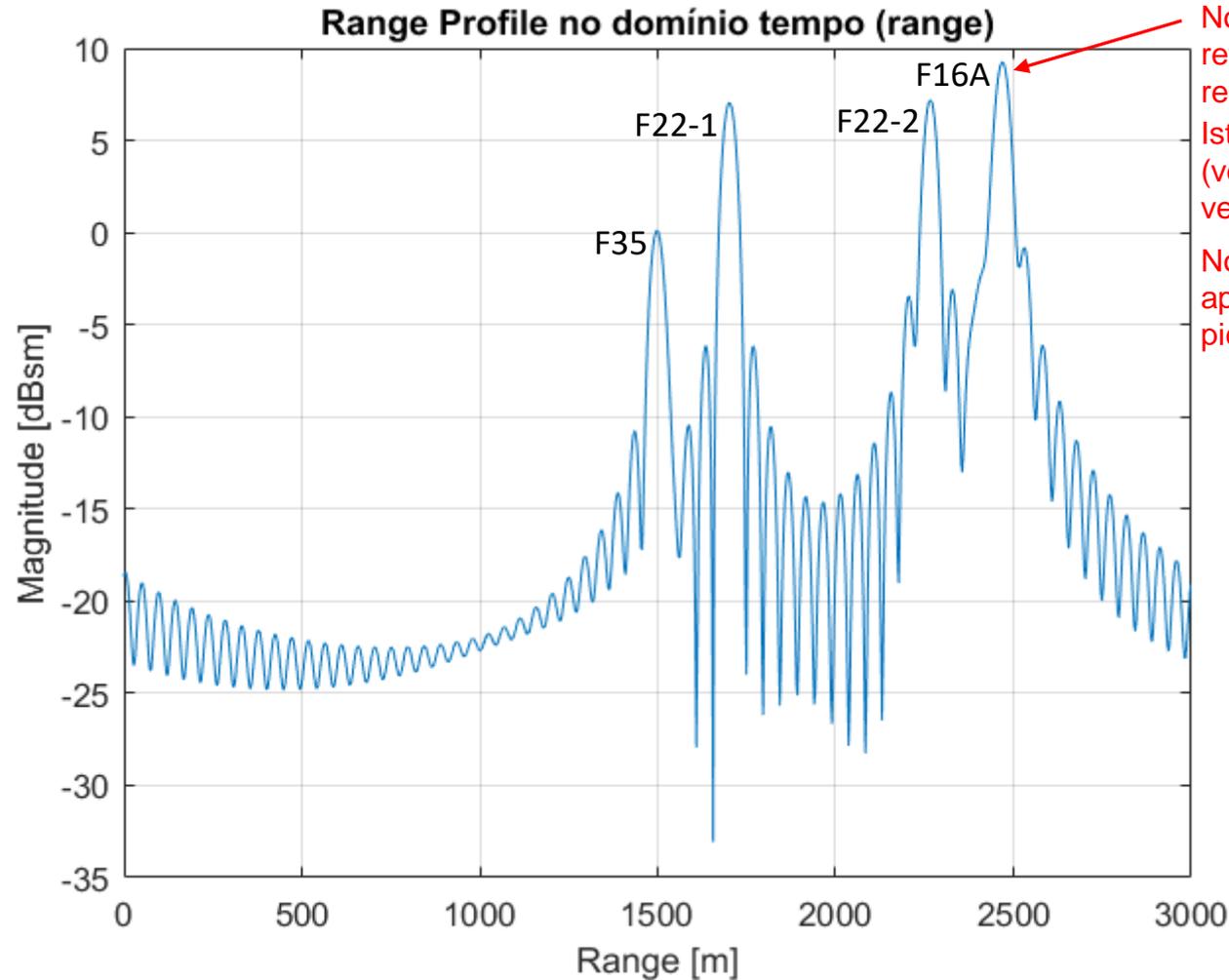
O gráfico $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ e o gráfico $\angle u_k[^\circ] \times f_k[\text{KHz}]$ obtidos em (b) e (c) representam em cada frequência f_k o módulo $|u_k|$ e a fase $\angle u_k$ da onda EM resultante da superposição das 4 ondas EM refletidas nos respectivos 4 alvos (F35, F22-1, F22-2 e F16A) e que retornam incidindo na antena do radar na forma de eco do alvo.

Para frequências f_k em que ocorre interferência construtiva entre as 4 ondas EM recebidas na antena, a curva $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ exibe um máximo local (pico).

Para frequências f_k em que ocorre interferência destrutiva entre as 4 ondas EM recebidas na antena, a curva $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ exibe um mínimo local (*notch* = vale abrupto e profundo).

Stepped frequency waveform compression

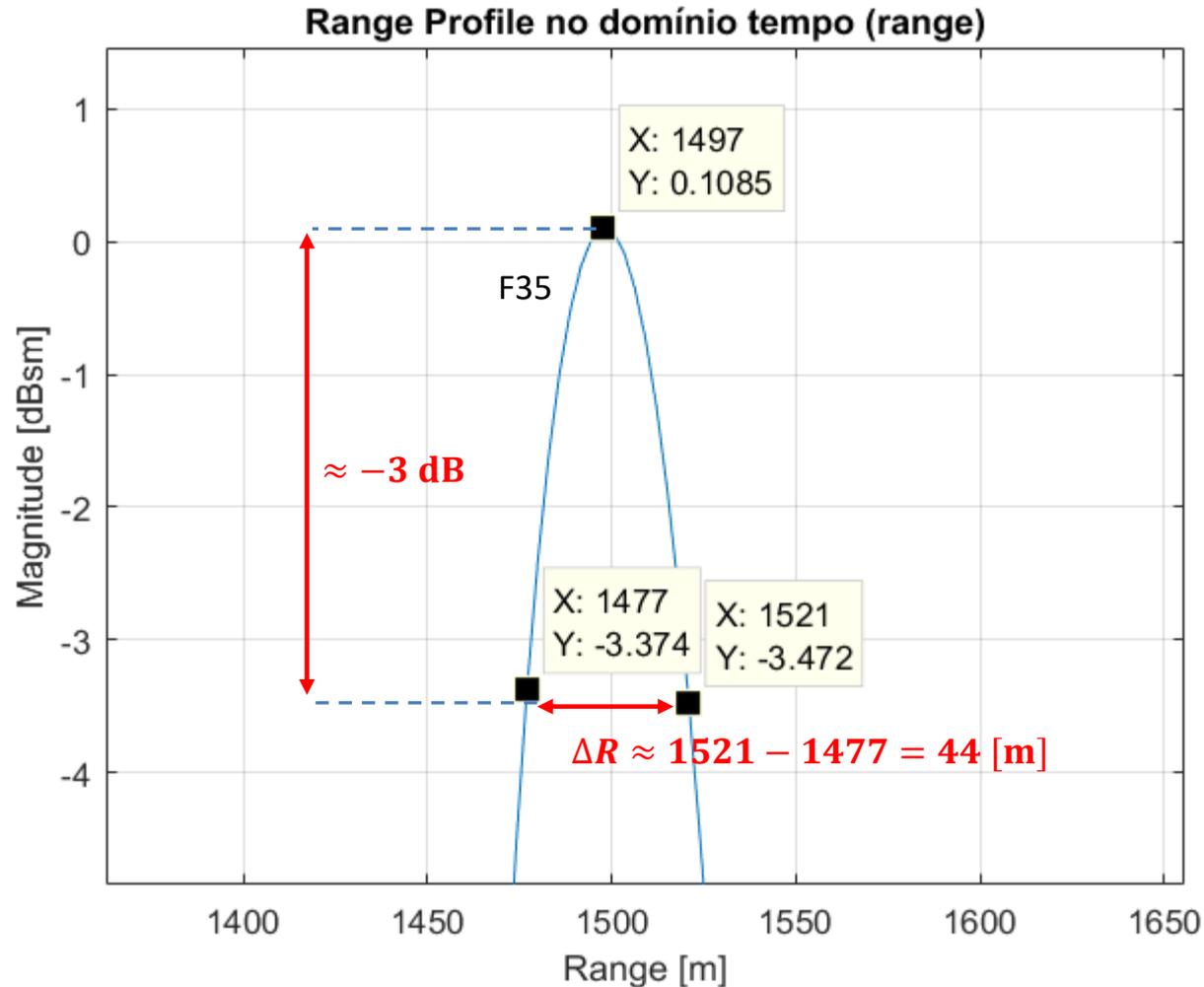
(e)



Note o deslocamento do pico da curva de reflexividade que identifica o alvo F16A em relação ao *range* efetivo deste alvo (2500 [m]). Isto ocorre em consequência da dispersão D (ver discussão no slide 70) devido à velocidade relativa não nula deste alvo.

Note que os alvos F35 e F22-1 não apresentam deslocamento dos respectivos picos porque a velocidade relativa é nula.

(f)



Da equação (43):

$$B_{ef} = N_{pulsos} \Delta f = 3.2 \text{ [MHz]}$$

Da equação (44):

$$\Delta R = \frac{c}{2B_{ef}} = 46.8 \text{ [m]}$$

Portanto o *range resolution* ($\Delta R = 44$ [m]) obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo que ocorre para o alvo F35 na curva de reflexividade Γ [dBsm] \times *range*[m] se aproxima do *range resolution* ($\Delta R = 46.8$ [m]) obtido da equação (44).

(g) Da equação (45):

$$\Delta R_0 = \frac{c PW}{2} = 1049.3 \text{ [Km]}$$

Do item (f), temos que $\Delta R = 46.8$ [m], evidenciando um radical aumento do *range resolution* obtido quando se utiliza a técnica *stepped frequency waveform*, em comparação ao *range resolution* $\Delta R_0 = 1049.3$ [Km] obtido com a transmissão de um único pulso de largura PW .

(h) Da equação (46), o fator de compressão de pulso resulta:

$$\rho = \frac{\Delta R_0}{\Delta R} = 2.24 \times 10^4$$

Stepped frequency waveform compression

Exemplo 5: Um radar *pulse-Doppler stepped frequency* opera na banda L e o diagrama de radiação de sua antena ilumina 2 aeronaves que voam em formação, conforme mostrado em (A) abaixo. A tabela abaixo mostra o RCS na banda L e o *range* de cada alvo (aeronave) em um determinado instante, identificando também a velocidade radial medida para cada alvo pelo processamento Doppler do radar. A velocidade radial é medida pela detecção dos picos da função ambiguidade no domínio Doppler – ver slides 96 a 104, de modo que a velocidade radial pode ser compensada resultando em uma velocidade radial compensada zero, conforme mostra a tabela.

A forma de onda *stepped frequency* deste radar apresenta os seguintes parâmetros:

$$PRF = 1000 \text{ [Hz]} \quad PW = 0.7 \text{ [ms]}$$

$$N_{\text{pulsos}} = 256 \quad \Delta f = 50 \text{ [KHz]}$$

Tipo de janela aplicada na sequência u_k : Janelas retangular, Hanning, Hamming e Kaiser – a que melhor permitir a detecção do F22.

Alvo	RCS [m ²]	Range [m]	Velocidade [knots]	Velocidade compensada [m/s]
F22	0.0001	2000	800	0
F15	25	2500	805	0

Nota: Para estimativas do RCS na banda X de aeronaves militares, ver "Table 1" em <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/LOPSAAST.pdf>.



Pede-se:

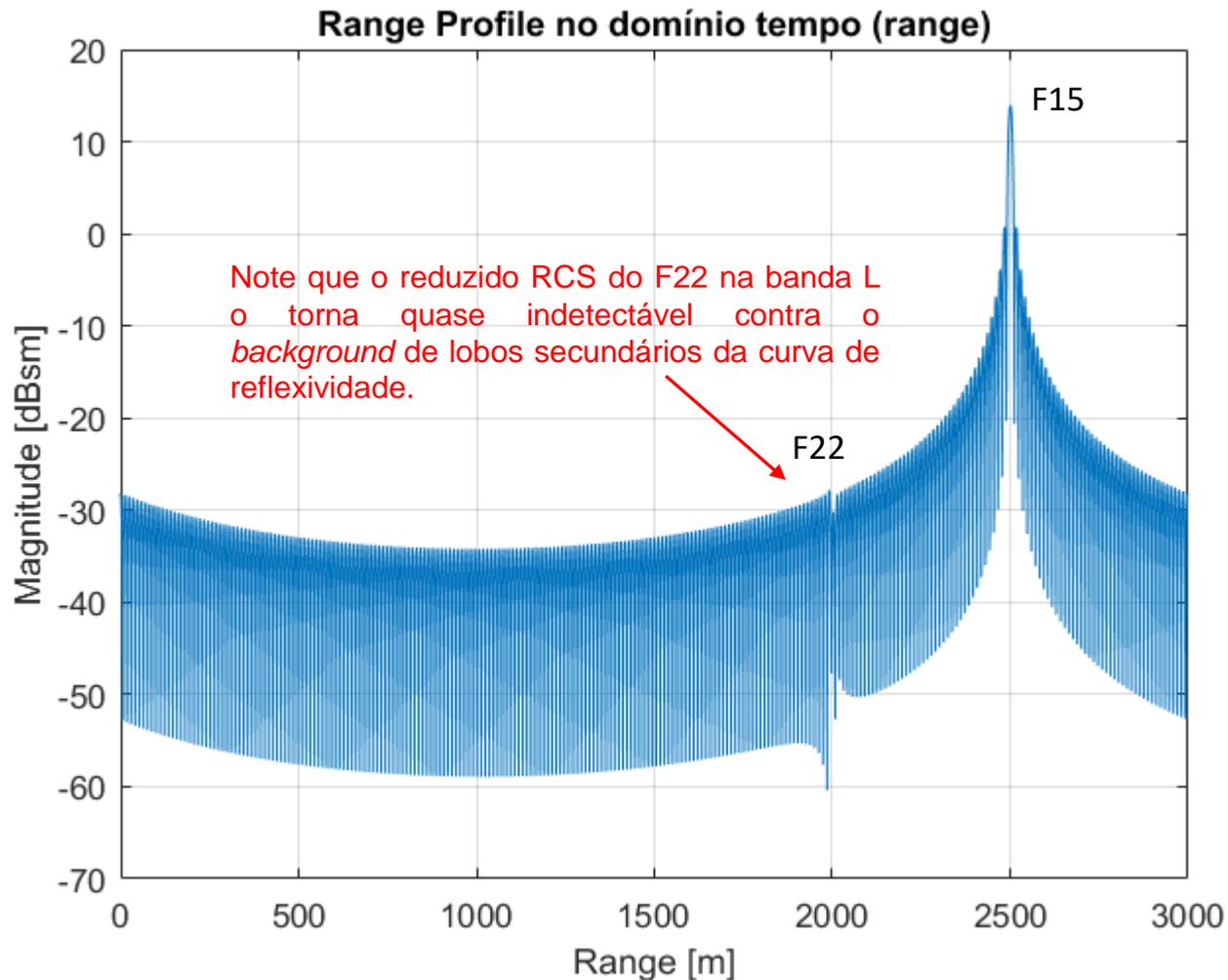
- (a) Determine e plote o *range profile* $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ deste cenário operacional aplicando uma janela retangular na sequência do domínio frequência $u_k = I_k + jQ_k, k = 1, 2 \dots N_{\text{pulsos}}$.
- (b) Determine numericamente o *range resolution* através da equação (44) e compare com o *range resolution* obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo que ocorre para o alvo “F15” no gráfico $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ obtido em (a).
- (c) Determine o fator de compressão de pulso ρ .
- (d) Determine e plote o *range profile* $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ deste cenário operacional aplicando uma janela de Hanning na sequência $u_k = I_k + jQ_k$.
- (e) Determine e plote o *range profile* $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ deste cenário operacional aplicando uma janela de Hamming na sequência $u_k = I_k + jQ_k$.
- (f) Determine e plote o *range profile* $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ deste cenário operacional aplicando uma janela de Kaiser com parâmetro $\text{Alpha} = \{3, 6, 12\}$ na sequência $u_k = I_k + jQ_k$.
- (g) Compare os resultados de (a), (d), (e) e (f). Qual janela é a recomendada para este cenário operacional do radar? Justifique a sua escolha.
- (h) Plote o gráfico $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$.
- (i) Plote o gráfico $\angle u_k[^\circ] \times f_k[\text{KHz}]$.
- (j) Interprete os gráficos obtidos em (h) e (i) no contexto das ondas EM refletidas nos alvos e que retornam incidindo na antena do radar.

Stepped frequency waveform compression

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo5.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E5S81.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo5.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

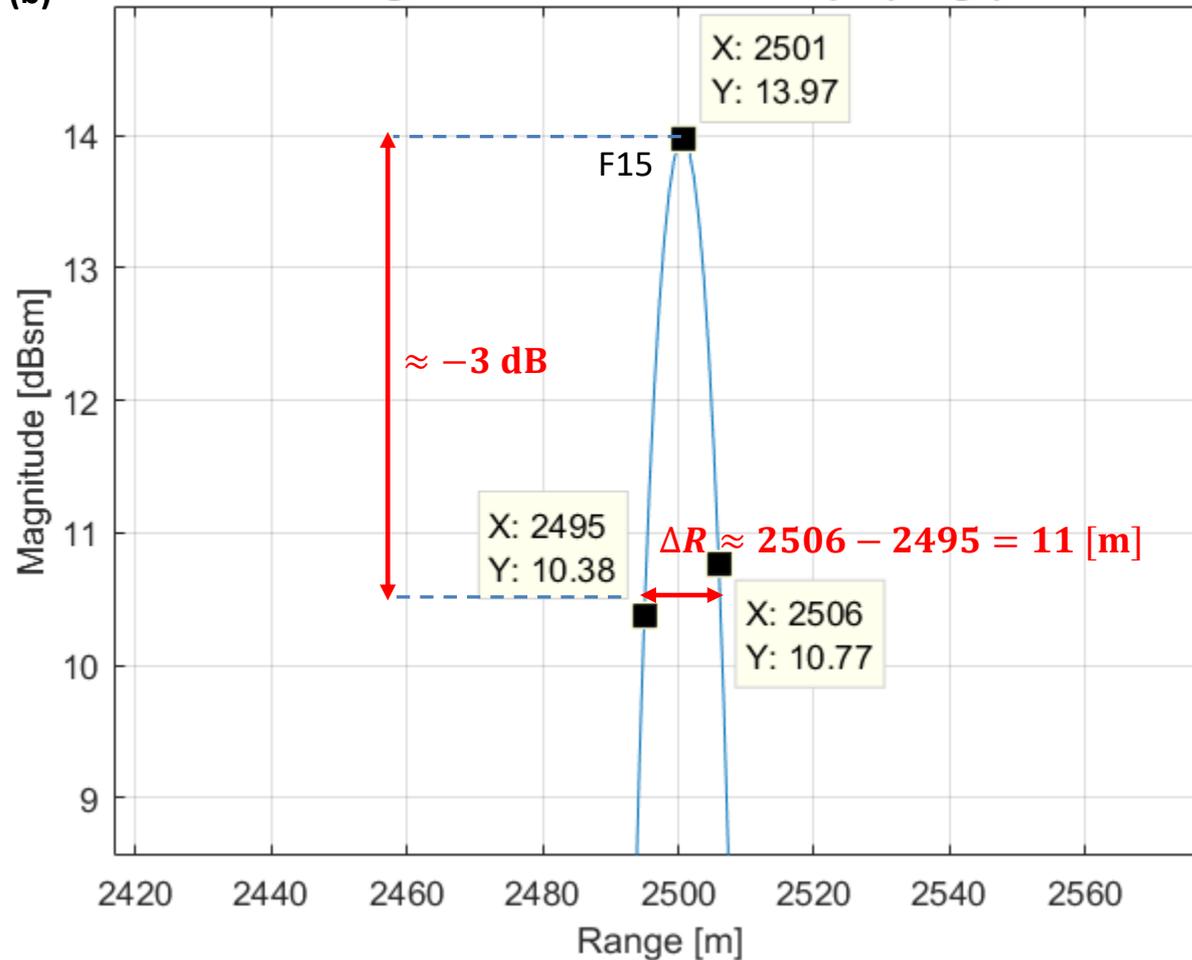
(a) *Range profile* (equação (55)) com janela retangular aplicada à sequência u_k obtida da equação (54):



Stepped frequency waveform compression

(b)

Range Profile no domínio tempo (range)



Da equação (43):

$$B_{\text{ef}} = N_{\text{pulsos}} \Delta f = 12.8 \text{ [MHz]}$$

Da equação (44):

$$\Delta R = \frac{c}{2B_{\text{ef}}} = 11.7 \text{ [m]}$$

Portanto o *range resolution* ($\Delta R = 11$ [m]) obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo que ocorre para o alvo F15 na curva de reflexividade Γ [dBsm] \times *range*[m] se aproxima do *range resolution* ($\Delta R = 11.7$ [m]) obtido da equação (44).

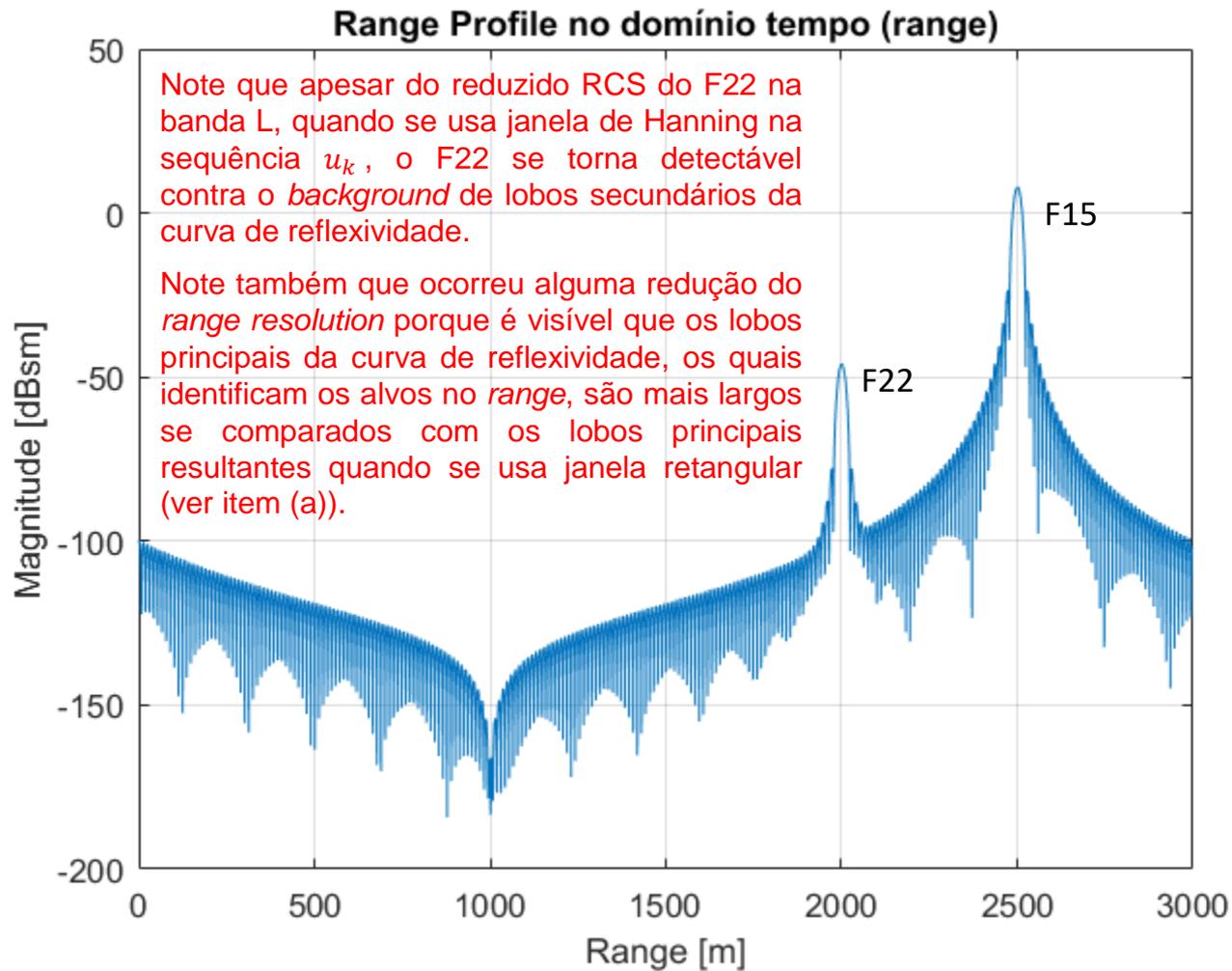
(c)

Da equação (45): $\Delta R_0 = \frac{c PW}{2} = 104.9 \text{ [Km]}$

Da equação (46), o fator de compressão de pulso resulta: $\rho = \frac{\Delta R_0}{\Delta R} = 8.96 \times 10^3$

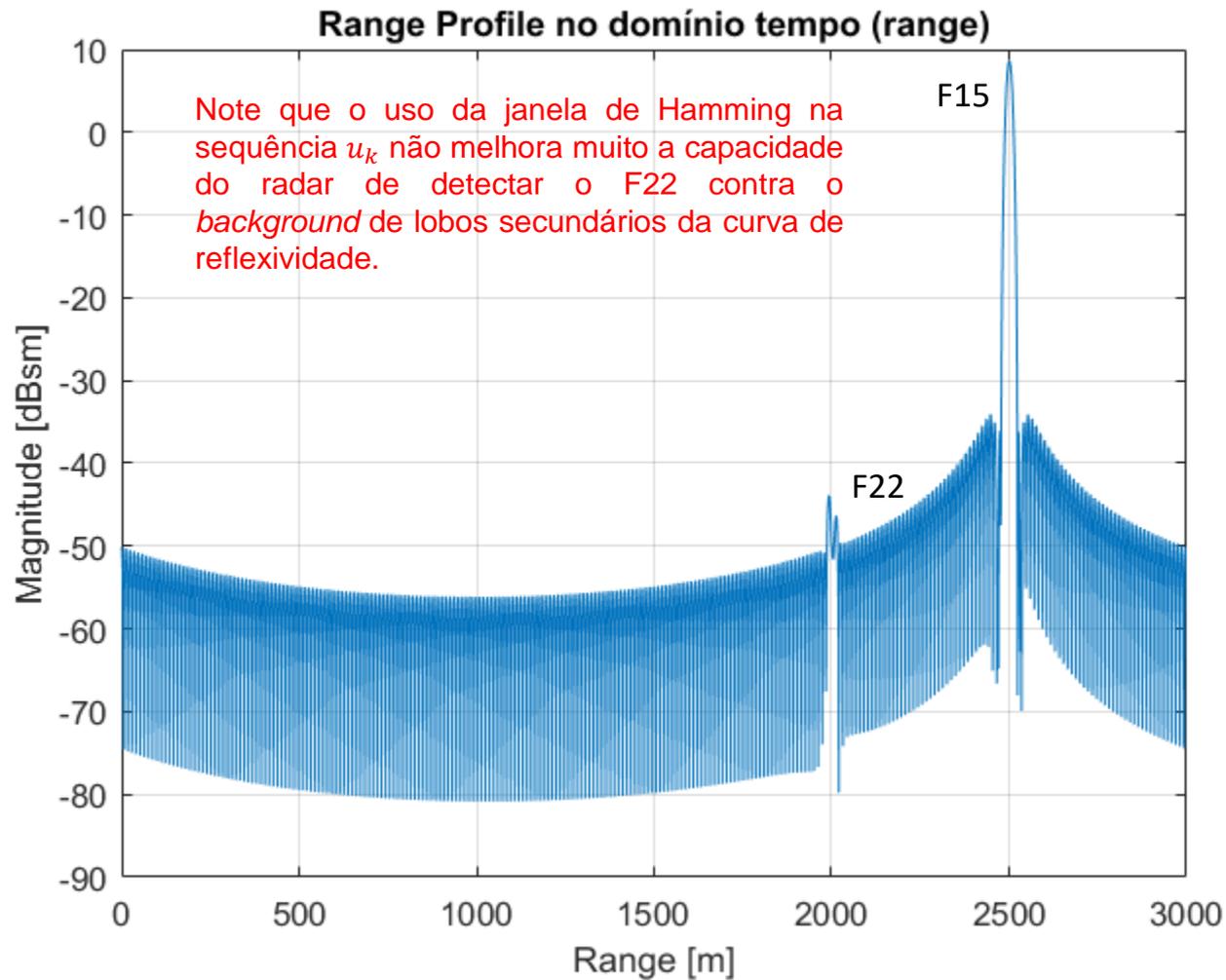
Stepped frequency waveform compression

(d) *Range profile* (equação (55)) com janela de Hanning aplicada à sequência u_k obtida da equação (54):



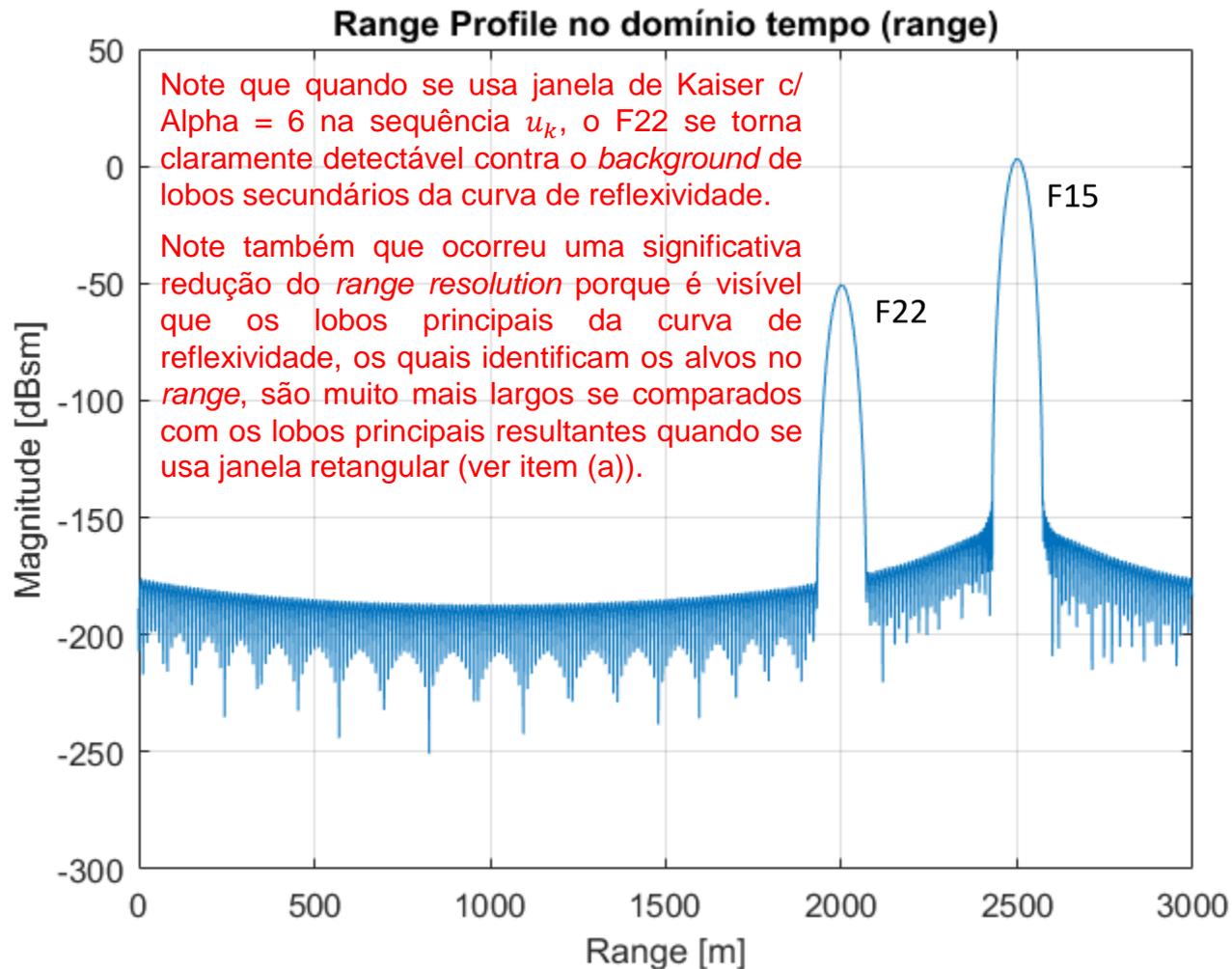
Stepped frequency waveform compression

(e) *Range profile* (equação (55)) com janela de Hamming aplicada à sequência u_k obtida da equação (54):



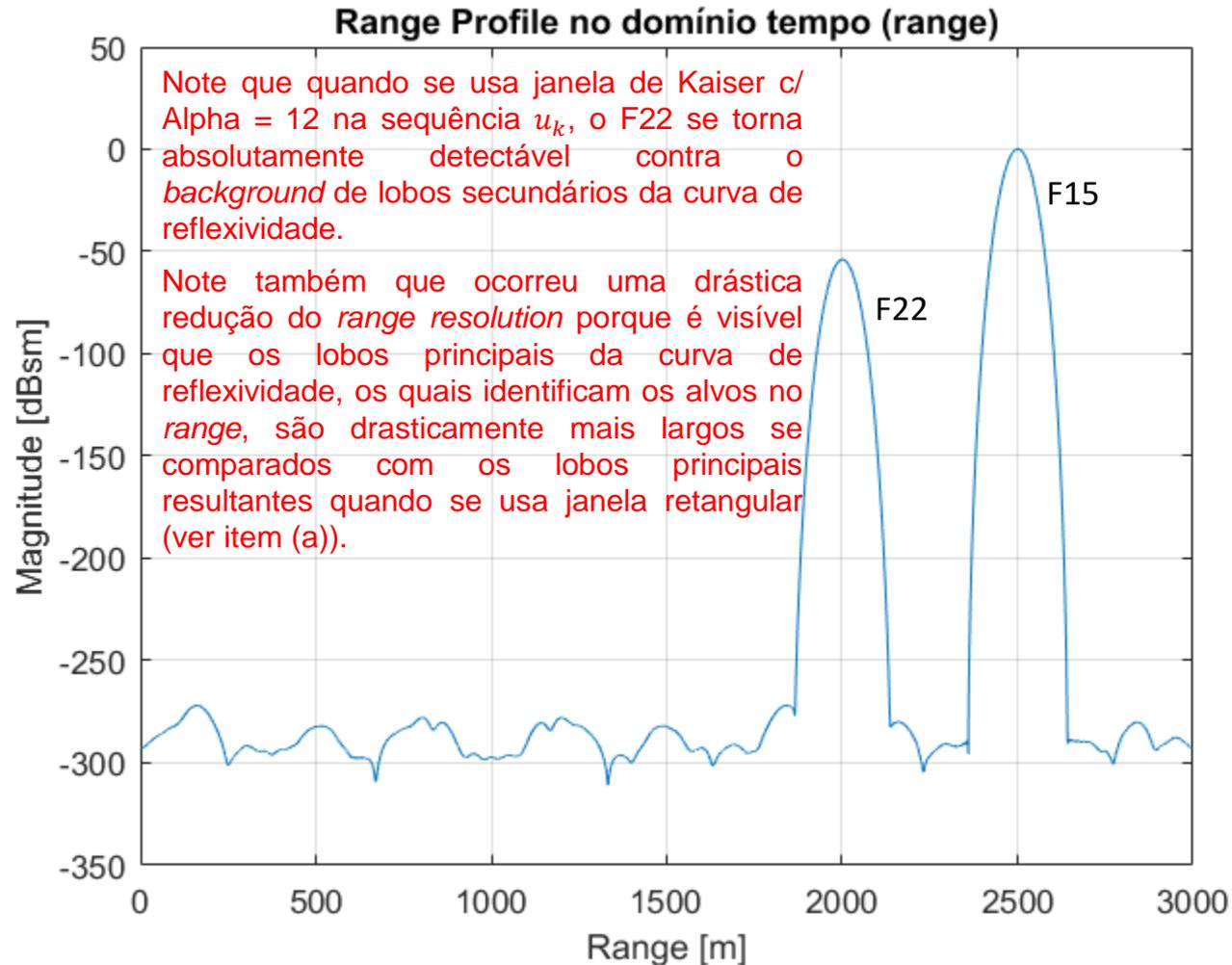
Stepped frequency waveform compression

(f) Range profile (equação (55)) com janela de Kaiser $p/\text{Alpha} = 6$ aplicada à sequência u_k obtida da equação (54):



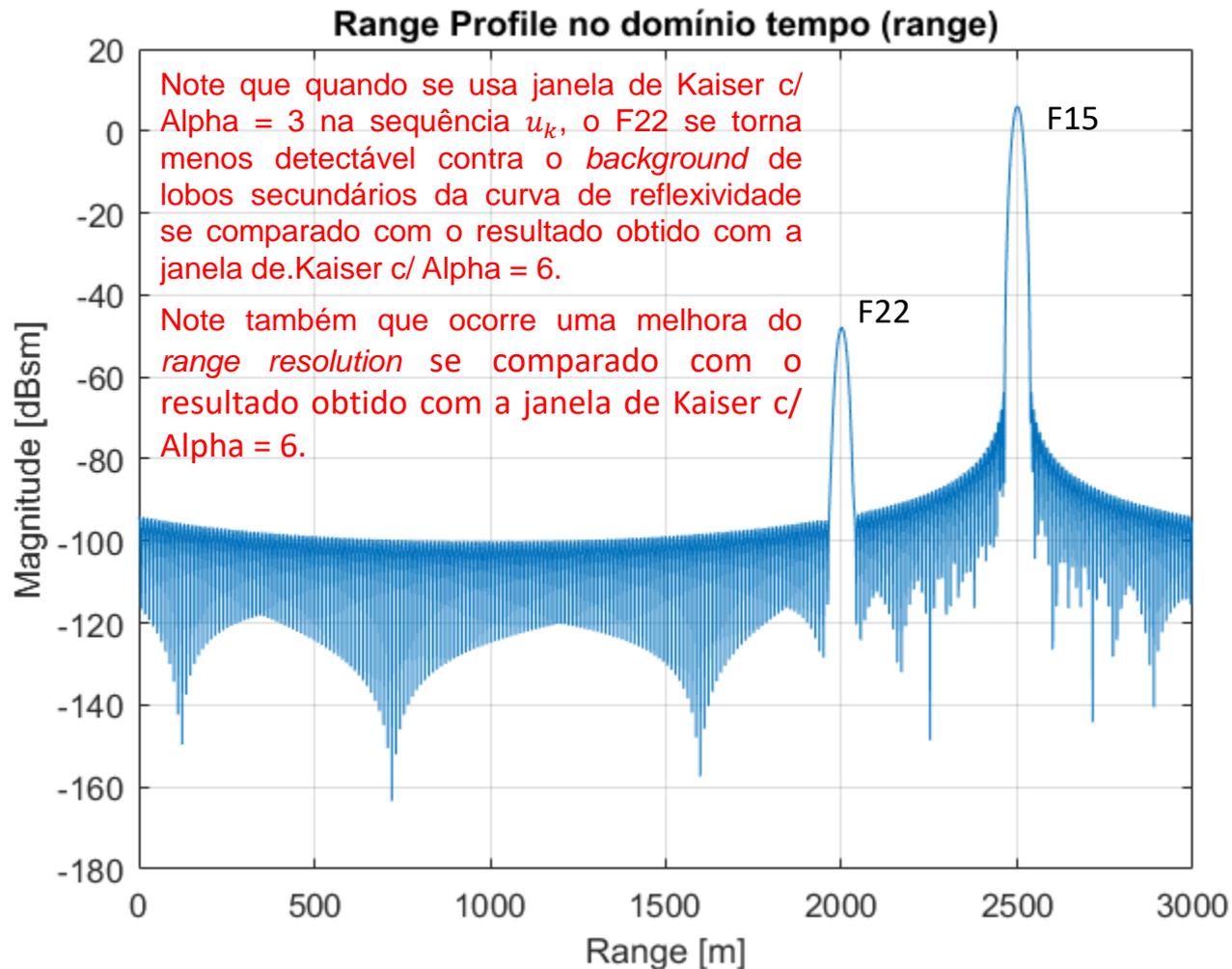
Stepped frequency waveform compression

Range profile com janela de Kaiser $p/\text{Alpha} = 12$ aplicada à sequência u_k :



Stepped frequency waveform compression

Range profile com janela de Kaiser $p/\text{Alpha} = 3$ aplicada à sequência u_k :



Stepped frequency waveform compression

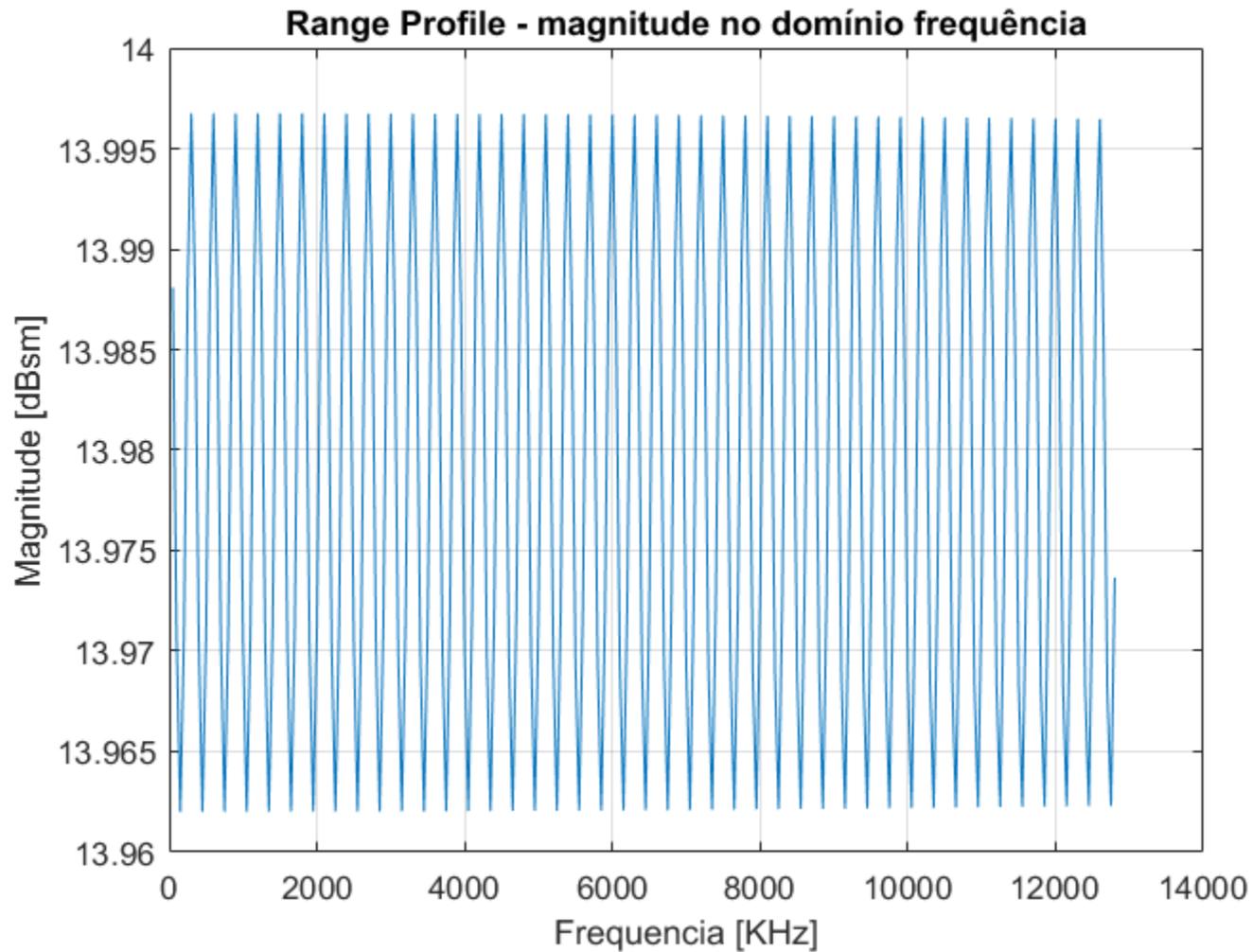
(g) Os *range profiles* obtidos com janela retangular e de Hamming aplicadas à sequência u_k resultam em nenhuma ou pouca probabilidade de que o sistema de detecção do radar (que estudaremos no Cap 1.9) consiga detectar o F22 contra o *background* de lobos secundários da curva de reflexividade.

Os *range profiles* obtidos com janela de Kaiser aplicadas à sequência u_k resultam em altíssima probabilidade de que o sistema de detecção do radar consiga detectar o F22 contra o *background* de lobos secundários da curva de reflexividade, mesmo na inevitável presença de ruído (que nem estamos aqui considerando). O problema da janela de Kaiser é a significativa redução do *range resolution* observada nos gráficos obtidos no item (f) . A redução do *range resolution* inviabiliza que o radar possa distinguir entre si aeronaves que estejam voando em formação bem próximas umas das outras, fazendo o operador do radar interpretar erroneamente que o *blip* na tela é de apenas uma única aeronave. E isto pode ter consequências nefastas em um cenário tático de EW (*electronic warfare*) ... Ver, por exemplo, <https://www.avweb.com/aviation-news/israel-accused-hiding-behind-airliners-in-missile-strikes/> .

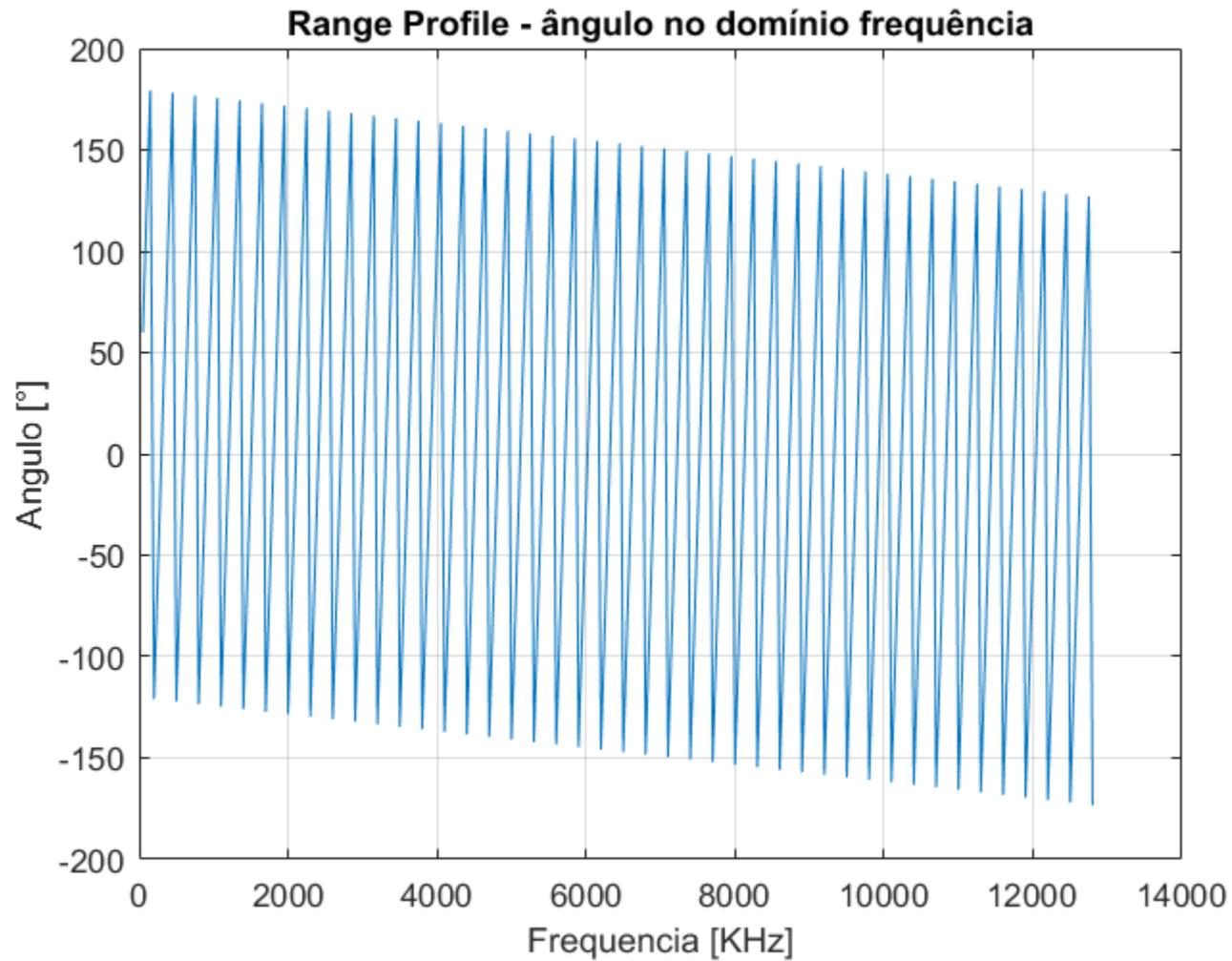
Neste contexto operacional, portanto, a janela mais recomendada dentre as opções dadas é a janela de Hanning, que resulta na curva de reflexividade $\Gamma[\text{dBsm}] \times \text{range}[\text{m}]$ obtida na solução do item (d).

Stepped frequency waveform compression

(h) Da equação (54) em dBsm:



(i) Da equação (54):



(j)

O gráfico $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ e o gráfico $\angle u_k[^\circ] \times f_k[\text{KHz}]$ obtidos em (h) e (i) representam em cada frequência f_k o módulo $|u_k|$ e a fase $\angle u_k$ da onda EM resultante da superposição das 2 ondas EM refletidas nos respectivos 2 alvos (F22 e F15) e que retornam incidindo na antena do radar na forma de eco do alvo.

Para frequências f_k em que ocorre interferência construtiva entre as 2 ondas EM recebidas na antena, a curva $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ exibe um máximo local.

Para frequências f_k em que ocorre interferência destrutiva entre as 2 ondas EM recebidas na antena, a curva $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ exibe um mínimo local.

Como o RCS do F22 é muito menor do que o RCS do F15, a onda EM refletida no F22 e que retorna incidindo na antena do radar na forma de eco do F22 tem uma amplitude muito menor do que a amplitude da onda EM que retorna refletida no F15. Por esta razão, a interferência da onda EM do F22 na onda EM do F15 é mínima, e, portanto, o gráfico $|u_k|[\text{dBsm}] \times f_k[\text{KHz}]$ obtido em (h) é quase constante ao longo da frequência, exibindo uma variação mínima em torno do RCS do F15, i.e., $13.98 [\text{dBsm}] = 25 [\text{m}^2]$.

Compressão de pulso por código de Barker

Codificação de Barker é uma técnica de compressão **intrapulso**, em que cada um dos pulsos de RF (*bursts*) individuais irradiados pelo TX tem a sua fase ajustada sequencialmente N vezes ao longo da duração PW , assumindo N possíveis valores sequenciais de fase que são extraídos do conjunto $\{0, \pi\}$ [rad]. A cada determinado instante, o valor de fase que é extraído do conjunto $\{0, \pi\}$ [rad] é definido pelo valor instantâneo $\{+1, -1\}$ resultante do código de Barker.

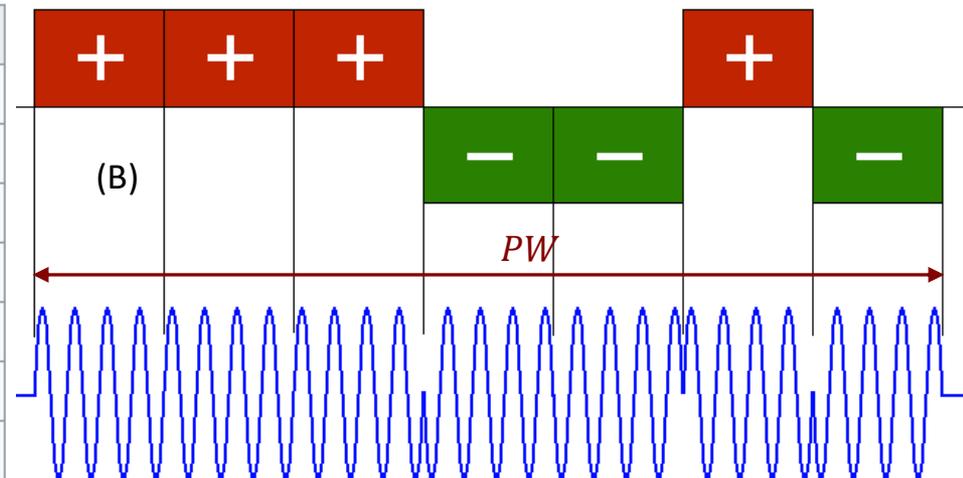
A definição pelo código de Barker da sequência de N fases do *burst* de largura PW tem como resultado minimizar os *sidelobes* do pulso comprimido no tempo (comprimido no tempo = correlacionado com um *template* do pulso), o que reduz a ambiguidade do sinal que identifica o alvo em presença de ruído, minimizando, portanto, a falsa detecção de alvos que não existem.

Este processo pode ser interpretado como a modulação do *burst* de RF de largura PW com uma sequência de N símbolos IQ BPSK (*Binary Phase Shift Keying* – ver slide 23 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf), obedecendo à uma das sequências de Barker (ver <https://www.radartutorial.eu/08.transmitters/Barker%20Code.en.html>), conforme tabela em (A) abaixo.

Em (B) é mostrado o pulso de RF (*burst*) de largura PW modulado com uma sequência de $N = 7$ símbolos IQ BPSK conforme tabela em (A). Cada símbolo BPSK no pulso de RF de duração PW tem uma duração PW/N e é denominado de *chip*. O código de tamanho $N = 7$ mostrado em (B) tem 7 *chips* no intervalo PW de duração do *burst*.

(A) Known Barker codes

N	BPSK sequence		Sidelobe level
2	+1 -1	+1 +1	-6 dB
3	+1 +1 -1		-9.5 dB
4	+1 +1 -1 +1	+1 +1 +1 -1	-12 dB
5	+1 +1 +1 -1 +1		-14 dB
7	+1 +1 +1 -1 -1 +1 -1		-16.9 dB
11	+1 +1 +1 -1 -1 -1 +1 -1 -1 +1 -1		-20.8 dB
13	+1 +1 +1 +1 +1 -1 -1 +1 +1 -1 +1 -1 +1		-22.3 dB



Compressão de pulso por código de Barker

A detecção do *burst* de largura PW modulado pela sequência BPSK controlada pelo código de Barker é efetuada no RX através de um filtro FIR com coeficientes correspondendo à sequência de Barker invertida no tempo, o que define este filtro FIR como um *matched filter* para a sequência de Barker (ver Exemplo 2 no slide 13 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf , notando que no caso deste Exemplo 2 há dois *matched filters*, cada um respectivo às sequências I e Q).

A resposta ao impulso $h[n]$ de um filtro FIR é o próprio conjunto de coeficientes do filtro, e a saída $y[n]$ de um filtro FIR é a **convolução** da sequência $x[n]$ em sua entrada com sua resposta ao impulso (ver slide 24 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula5&6_26032020.pdf).

Portanto, um filtro FIR cujos coeficientes $h[n]$ correspondem à sequência de Barker invertida no tempo efetuará a **auto-correlação** da sequência de Barker aplicada em sua entrada. Note que auto-correlação é a operação efetuada por um *matched filter* quando em sua entrada é aplicada a sequência à qual o filtro é casado (ver exemplo no slide 56 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf). Veremos a teoria do *matched filter* a partir do slide 129.

Os coeficientes $h[n]$ do filtro FIR que implementa o *matched filter* no exemplo referido no parágrafo anterior são coeficientes reais que correspondem à sequência de Barker invertida no tempo. No entanto, no contexto operacional usual de um radar, o sinal na entrada *do matched filter* é de valor complexo, conforme veremos nos próximos parágrafos.

Como os alvos localizam-se radialmente em *ranges* distintos e como os alvos são móveis em sua grande maioria, a onda EM de seus respectivos ecos apresentarão fases distintas e desvio de frequência Doppler ν [Hz] proporcional à sua velocidade. Consequentemente, este desvio de fase e este desvio de frequência Doppler ν [Hz] estará presente na sequência de símbolos IQ recebidos, cujo módulo $|I + jQ|$ e fase $\angle\{I + jQ\}$ de cada símbolo representa o módulo (amplitude) e a fase da superposição de ondas EM (ecos de alvos + *clutter*) recebida em cada respectivo instante pela antena do radar.

Portanto, o sinal $x[n]$ na entrada do filtro FIR que implementa o *matched filter* é de valor complexo em função do desvio de fase e desvio de frequência Doppler da onda EM que incide na antena do radar, conforme vimos nos Exemplos 4 e 5. Este desvio de fase e este desvio de frequência Doppler em $x[n]$ precisam ser compensados na operação de correlação efetuada pelo filtro FIR que implementa o *matched filter*, de modo que sua saída y resulte em picos estreitos claramente distintos uns dos outros, facilitando a detecção do alvo. A saída do *matched filter* deve idealmente resultar em um pico com esta característica impulsiva (um único pulso estreito, sem lobos secundários) para efeito de viabilizar a detecção sem ambiguidade de cada alvo que se encontre localizado em um determinado *range* se movendo com uma velocidade radial que resulta em um desvio de frequência Doppler ν [Hz].

Compressão de pulso por código de Barker

Obviamente esta característica impulsiva ideal depende das características de correlação do sinal ao qual o *matched filter* é casado, mas, particularmente, o sinal gerado pelo código de Barker caracteriza-se por uma resposta impulsiva próxima da ideal, i.e., com lobos secundários bastante reduzidos.

Para efeito de compensar o desvio de fase e o desvio de frequência Doppler em $x[n]$ a operação de correlação precisa ser efetuada no domínio tempo e no domínio frequência. Neste contexto, a saída y do *matched filter* cujos coeficientes $h[n]$ correspondentes à sequência de Barker passa a ser dada por (57):

$$y(\tau, v) = \sum_{n=0}^{N_{PRI}-1} h[n] x^*[n - \tau] e^{-j2\pi n \frac{v}{SymbolRate}} \quad (57)$$

onde τ [s] é o *delay* no tempo entre $x[n]$ e $h[n]$ e v [Hz] é o desvio de frequência Doppler entre $x[n]$ e $h[n]$. *SymbolRate* é o número de símbolos IQ por segundo transportados pela sequência $x[n]$ na entrada do *matched filter*. $\{\cdot\}^*$ é o operador que retorna o valor complexo conjugado de seu argumento. N_{PRI} é o número de amostras ao longo do intervalo $PRI = 1/PRF$ (ver slide 5). Como a operação de convolução pode ser expressa por uma operação de correlação, conforme discutido no slide anterior, e como $range = 0.5 c \tau$ [m] (ver slide 5), alternativamente (57) pode ser dada por

$$y(range, v) = \text{Correl} \left\{ h[n], x[n] e^{j2\pi n \frac{v}{SymbolRate}} \right\} \quad (58)$$

onde $\text{Correl}\{w, z\}$ representa a correlação circular entre as duas sequências $w[n] = h[n]$ e $z[n] = x[n] e^{j2\pi n \frac{v}{SymbolRate}}$ dada por

$$\text{Correl}\{w[n], z[n]\} = \text{IFFT}\{\text{FFT}\{w[n]\} \cdot \{\text{FFT}\{z[n]\}\}^*\} \quad (59)$$

sendo $\text{FFT}\{\cdot\}$ o operador que retorna a Transformada Rápida de Fourier de seu argumento e $\text{IFFT}\{\cdot\}$ o operador que retorna a Transformada Rápida de Fourier Inversa de seu argumento (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform e ver <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/43967-circular-cross-correlation-using-fft>).

Compressão de pulso por código de Barker

A saída $y(\tau, \nu)$ do filtro FIR que implementa o *matched filter*, dada pela equação (57), é denominada de **função de ambiguidade $\Psi(\tau, \nu)$** , porque se o sinal ao qual o *matched filter* é casado apresenta ambiguidades no domínio tempo τ [s] (*range*) e/ou no domínio frequência ν [Hz] (velocidade radial), estas ambiguidades aparecem na forma de lobos secundários na superfície $|\Psi(\tau, \nu)|$ em torno de cada lobo principal (pico) correspondente ao respectivo alvo presente no cenário operacional do radar (ver gráfico em (A) no slide 8 ou gráfico de $|\Psi(\tau, \nu)|$ no slide 99). Os lobos secundários em $|\Psi(\tau, \nu)|$ são potenciais geradores de ambiguidades na detecção do alvo em presença de ruído porque podem induzir o processo de detecção (algoritmo CFAR que veremos no Cap I.9) à falsa detecção de alvos que não existem.

Algumas referências bibliográficas efetuam a análise das ambiguidades da *waveform* transmitida pelo TX com base no lobo principal e lobos secundários nas vizinhanças do lobo principal que ocorrem para cada respectivo alvo na superfície $|\Psi(\tau, \nu)|^2$. Outras referências bibliográficas efetuam a mesma análise considerando a superfície $|\Psi(\tau, \nu)|$. No presente estudo adotaremos a análise das ambiguidades da *waveform* transmitida com base no lobo principal e lobos secundários nas vizinhanças do lobo principal que ocorrem para cada alvo na superfície $|\Psi(\tau, \nu)|$.

A análise e detecção dos lobos principais na superfície $|\Psi(\tau, \nu)|$ para cada respectivo alvo é um processamento crucial na operação em tempo real do radar, conforme veremos no Cap III.6. No mesmo contexto, crucial para a avaliação do desempenho do radar é (I) a análise em $|\Psi(\tau, \nu)|$ do quanto o lobo principal de cada alvo se aproxima de um impulso para efeito de maximizar a compressão de pulso (e, conseqüentemente, maximizar a resolução) e (II) a análise em $|\Psi(\tau, \nu)|$ do quanto a amplitude dos lobos secundários nas vizinhanças do lobo principal são minimizados para efeito de minimizar a probabilidade de falsa detecção de alvos que não existem, conforme veremos no Exemplo 6 para uma *waveform* modulada em fase com uma sequência de Barker.

Com relação à cadeia de processamento no diagrama mostrado em (A) no slide 6, a compressão de pulso por código de Barker e a detecção por *matched filter* baseado na função de ambiguidade $\Psi(\tau, \nu)$ descritas aqui no Cap I.7 trazem para dentro do bloco “compressão de pulso” o conceito de função de ambiguidade, que pertencia ao bloco “processamento Doppler” no diagrama do slide 6. De fato, o diagrama mostrado em (A) no slide 6 é apenas um exemplo geral da cadeia de processamento de sinal efetuado por um radar, dentre as múltiplas configurações de processamento possíveis. Note que a função de ambiguidade aqui descrita é restrita a operar em um intervalo de integração correspondente ao $PRI = 1/PRF$ (ver slide 5), caracterizando a compressão intrapulso. A função de ambiguidade implementada no bloco “processamento Doppler” no diagrama mostrado em (A) no slide 6 não é restrita à operação intrapulso, podendo atuar como *matched filter* para compressão interpulso, em que o intervalo de integração da *waveform* corresponde ao CPI (*coherent processing interval*) – ver slide 66.

Compressão de pulso por código de Barker

Exemplo 6: Para efeito de avaliar em laboratório o desempenho de um radar OTH (*Over The Horizon*) quanto à resolução de *range*, a saída de RF de um gerador de sinais de radar (ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/RSGen.pdf>) é conectada na entrada de RF do RX do radar OTH (ver slides 25 a 46 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf). O radar opera na banda de HF e utiliza compressão de pulso por código de Barker. O gerador de sinais modula cada *burst* de RF transmitido com uma sequência de $N = 13$ símbolos BPSK (13 *chips*) dada por Barker13 = [1, 1, 1, 1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1, 1], cada *chip* tendo uma duração $\Delta t_{\text{Chip}} = 0.1$ [ms]. O *delay* τ [s] entre o sinal do gerador de RF e a referência de tempo do *matched-filter* no RX para a sequência Barker13 é zero, de modo que o sinal do gerador simula um alvo a um *range* = $0.5 c \tau$ [m] zero (ver slide 5), representando um alvo na origem do *display (scope)* do radar. Não há desvio de frequência entre o sinal do gerador de RF e o oscilador local do *front-end* do RX do radar (ver slide 2), de modo que o desvio Doppler ν [Hz] é zero, representando um alvo com velocidade zero, i.e., um alvo estático.

Pede-se:

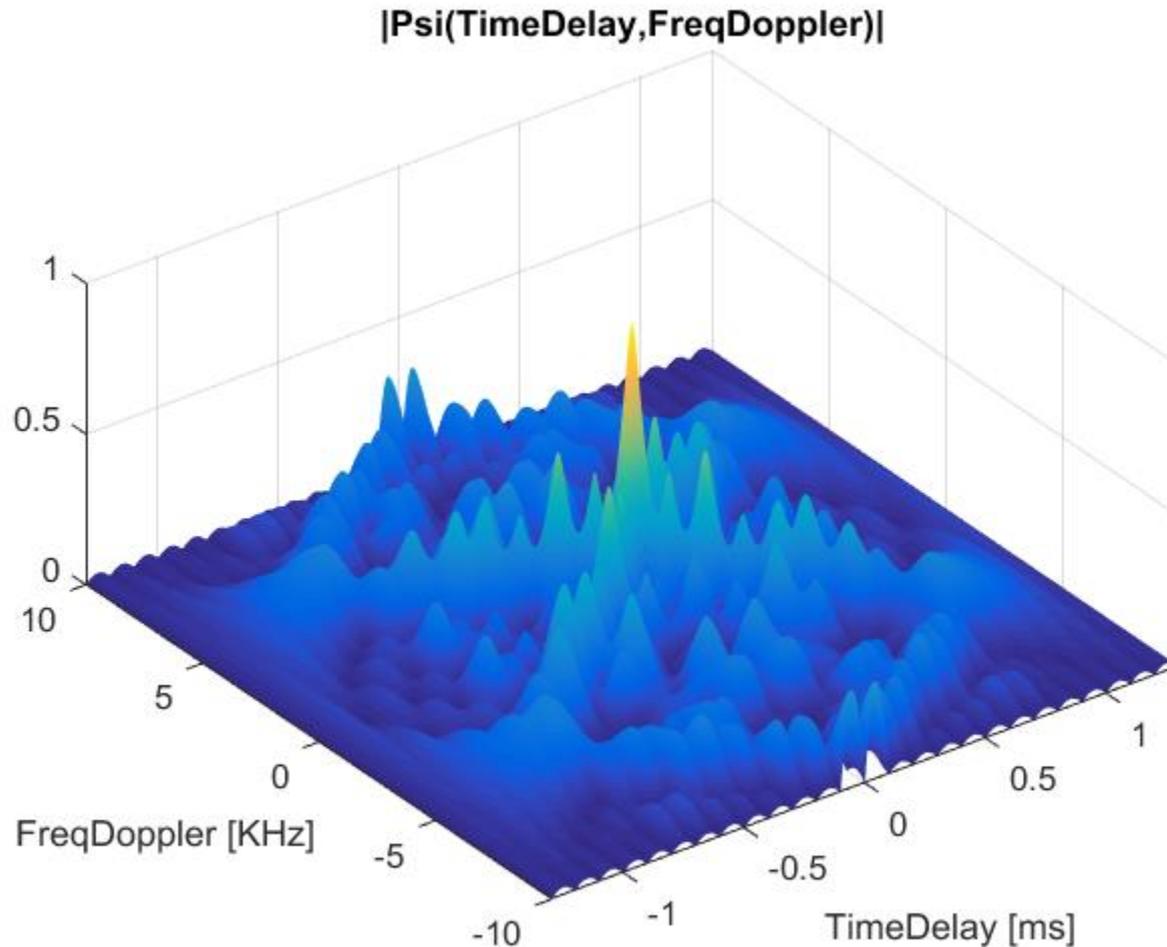
- Determine e plote a superfície da magnitude $|\Psi(\tau, \nu)|$ da função de ambiguidade definida pelo *matched filter* no RX, o qual é casado à sequência Barker13 recebida do gerador de RF. Para tanto, use as equações (57), (58) e (59).
- A partir do resultado em (a) determine e plote a curva $|\Psi(\tau)|$ obtida de $|\Psi(\tau, \nu)|$ calculada para desvio Doppler ν [Hz] zero (alvo estático).
- A partir do resultado em (a) determine e plote a curva $|\Psi(\nu)|$ obtida de $|\Psi(\tau, \nu)|$ calculada para *delay* τ [s] zero, i.e., *range* = $0.5 c \tau$ [m] = 0 (alvo na origem do *display* do radar = alvo localizado nas vizinhanças próximas da antena do radar).
- A partir do resultado em (b) determine o *range resolution* resultante da compressão de pulso obtida com a sequência Barker13 e compare com o *range resolution* que seria obtido sem a compressão de pulso. A partir dos valores de *range resolution* obtidos com e sem compressão de pulso, determine o fator de compressão de pulso ρ .
- Suponha que o gerador de sinais module cada *burst* de RF transmitido com uma sequência randômica de 13 símbolos BPSK (13 *chips*) dada por RandomSeq = [-1, -1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, -1], que **não é** uma sequência de Barker. Determine e plote a superfície da magnitude $|\Psi(\tau, \nu)|$ da função de ambiguidade definida pelo *matched filter* no RX, o qual é casado à sequência RandomSeq recebida do gerador de RF.
- A partir do resultado em (e) determine e plote a curva $|\Psi(\tau)|$ obtida de $|\Psi(\tau, \nu)|$ calculada para desvio Doppler ν [Hz] zero (alvo estático). Compare analiticamente com o resultado em (b).

Compressão de pulso por código de Barker

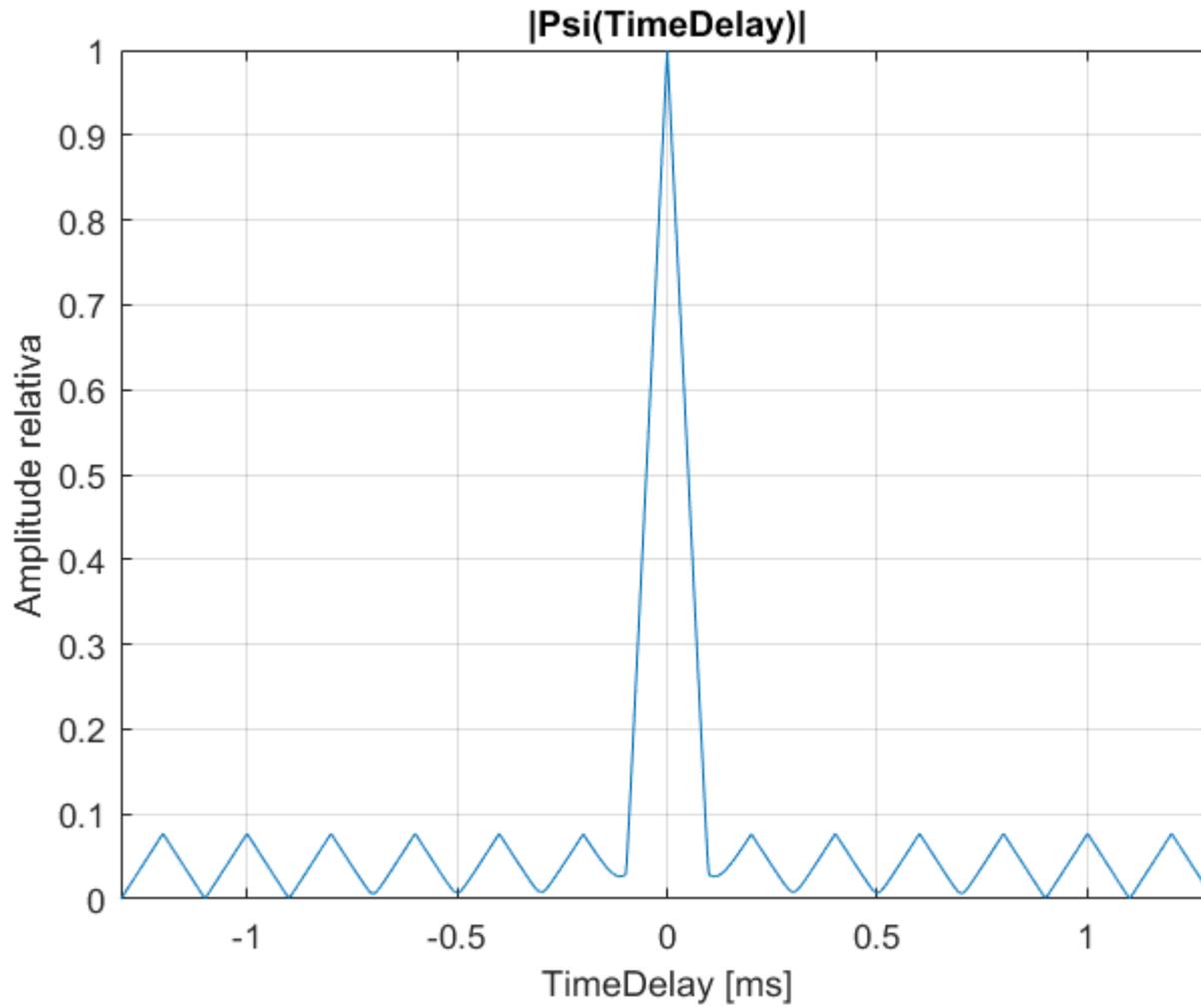
Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo6.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E6S98.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo6.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

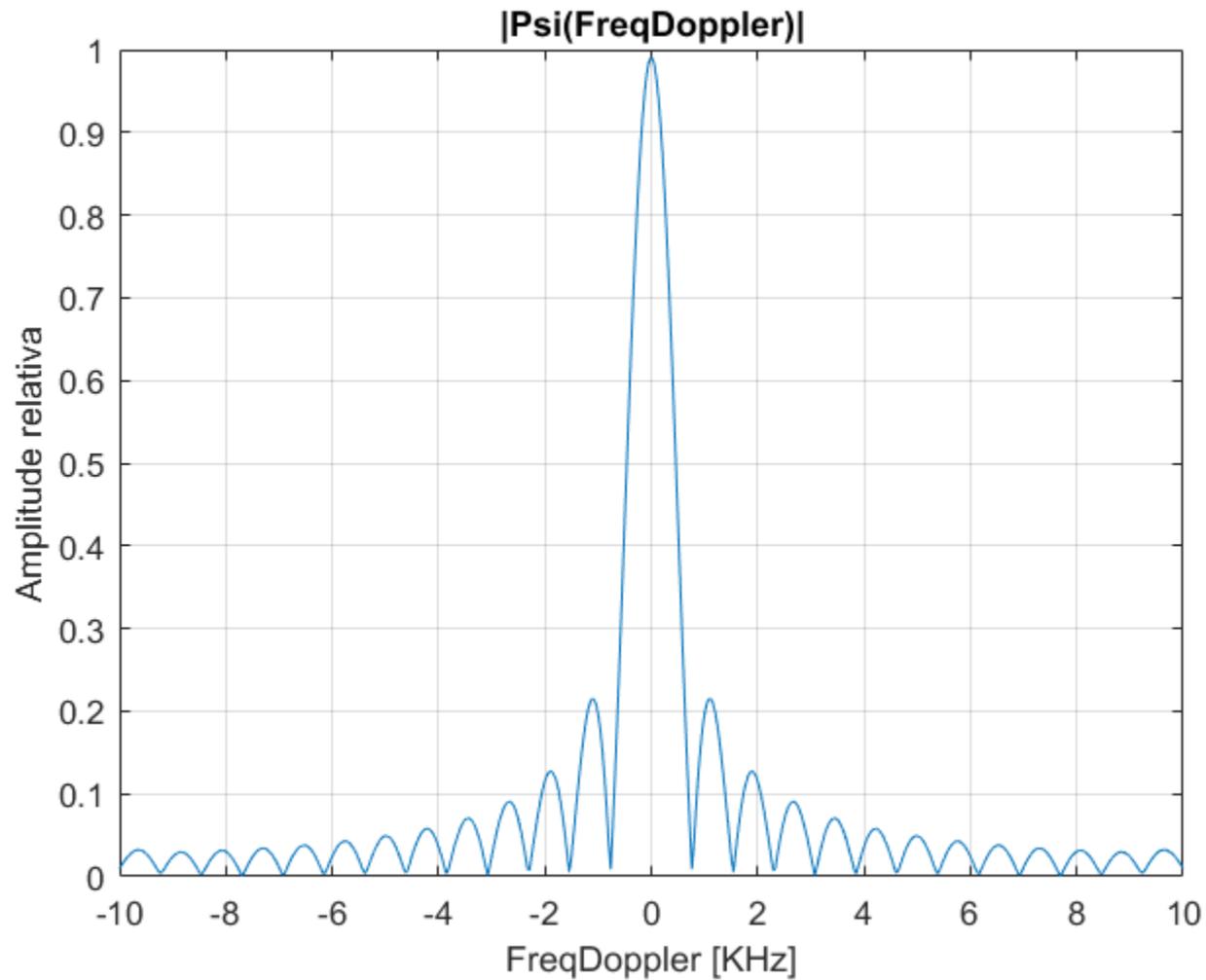
(a) Usando as equações (57), (58) e (59) e o *script* Exemplo6.m obtemos:



(b) A partir do resultado em (a) a curva $|\Psi(\tau)|$ resulta em:

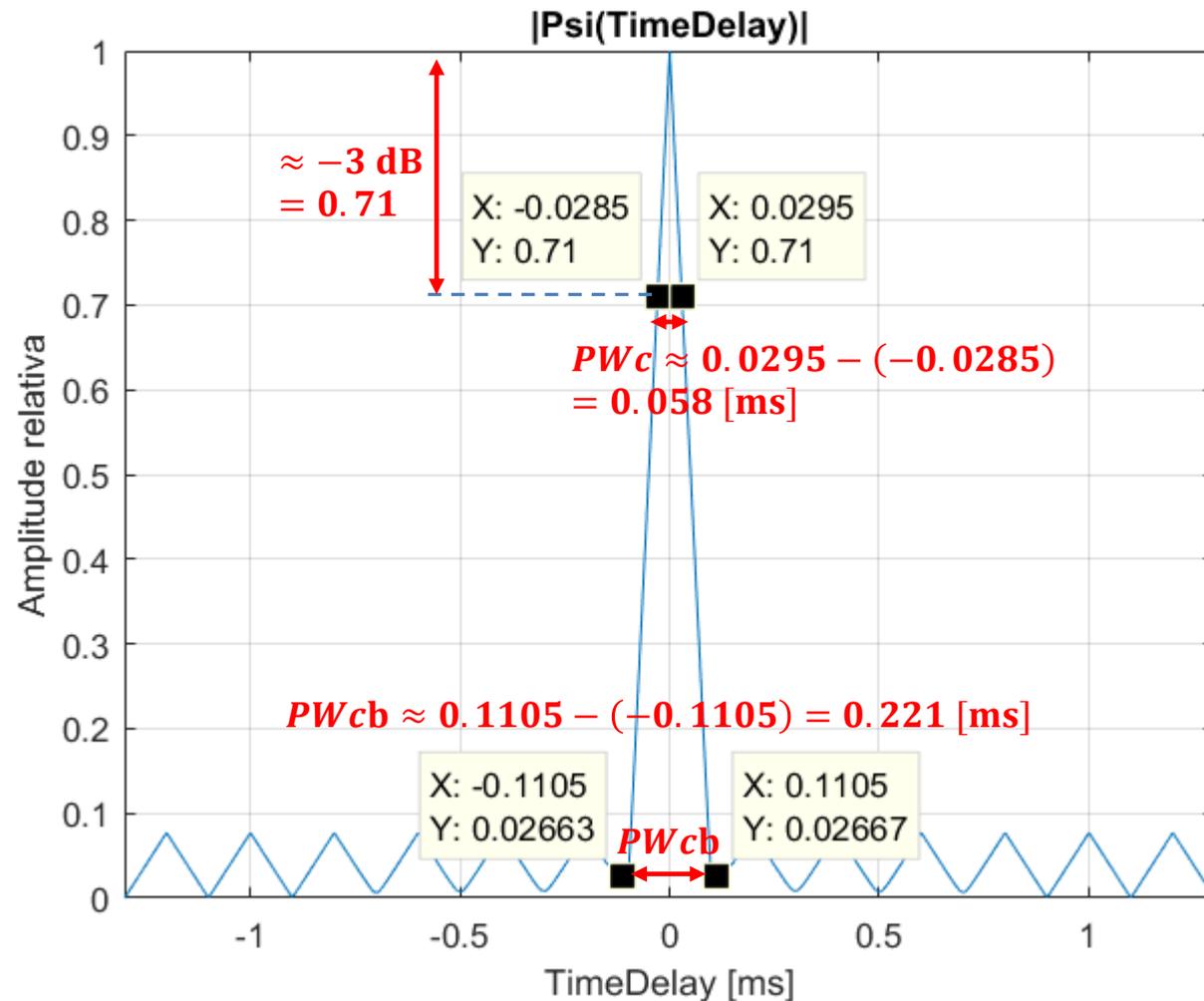


(c) A partir do resultado em (a) a curva $|\Psi(\nu)|$ resulta em:



Compressão de pulso por código de Barker

(d) A partir do resultado em (b) obtemos:



Nota: Algumas referências bibliográficas adotam a largura PW_{cb} da base do lobo principal para efeito de determinar o *range resolution*.

Do gráfico ao lado, o pulso comprimido pelo *matched filter* para a sequência Barker 13 resulta em uma largura $PW_c = 0.058$ [ms]. Da equação (41) no slide 55, com $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s], obtemos o *range resolution* ΔR_c do pulso comprimido:

$$\Delta R_c = \frac{c PW_c}{2} = 8.694 \text{ [Km]}$$

Os $N = 13$ *chips* da sequência Barker13, cada *chip* tendo a duração $\Delta t_{\text{Chip}} = 0.1$ [ms], resultam em uma largura PW para o pulso não-comprimido dada por:

$$PW = N \Delta t_{\text{Chip}} = 1.3 \text{ [ms]}$$

O *range resolution* ΔR obtido com o pulso não-comprimido de largura $PW = 1.3$ [ms] resulta:

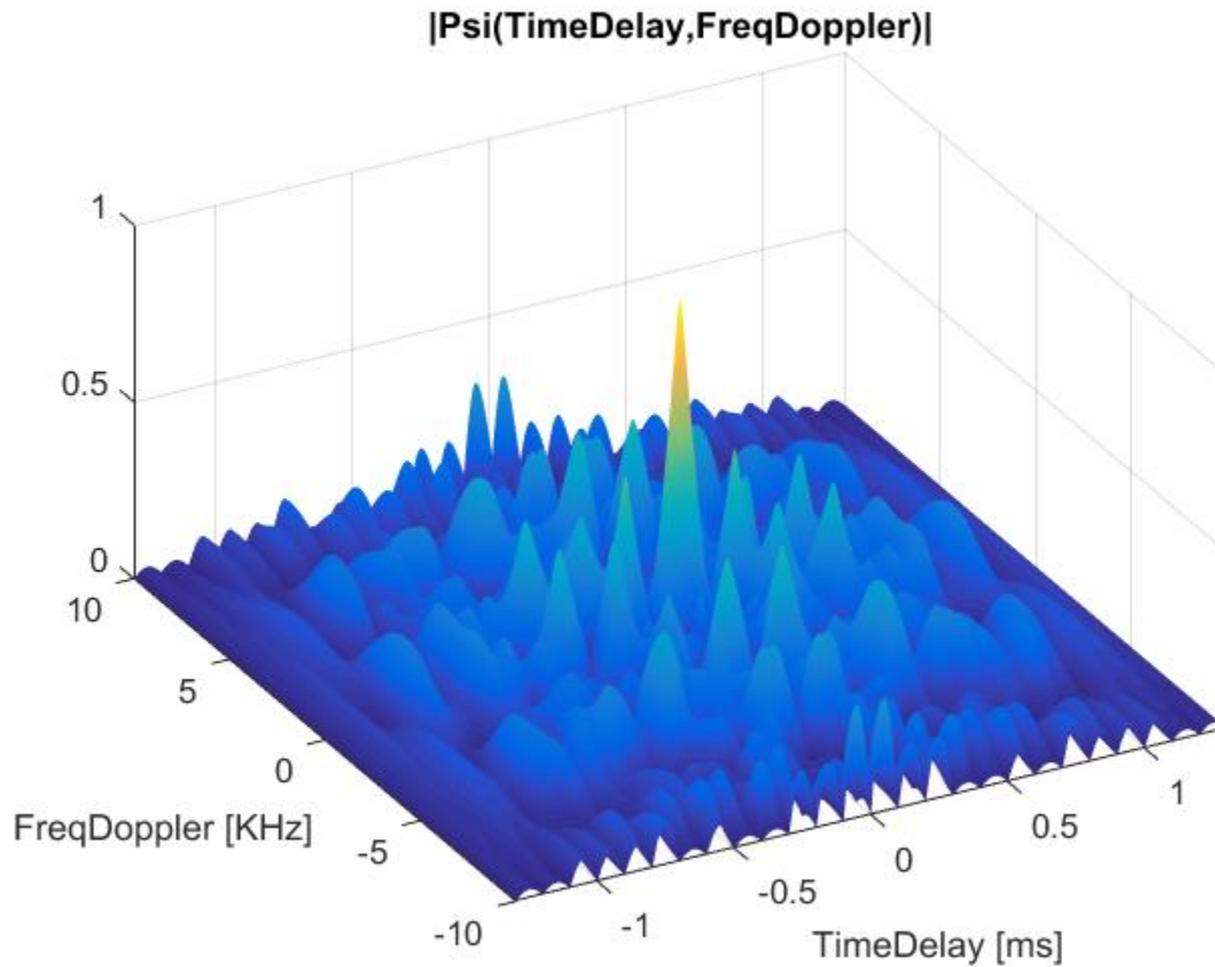
$$\Delta R = \frac{c PW}{2} = 194.865 \text{ [Km]}$$

O fator de compressão de pulso (que também é o fator de aumento da resolução de *range*) resulta:

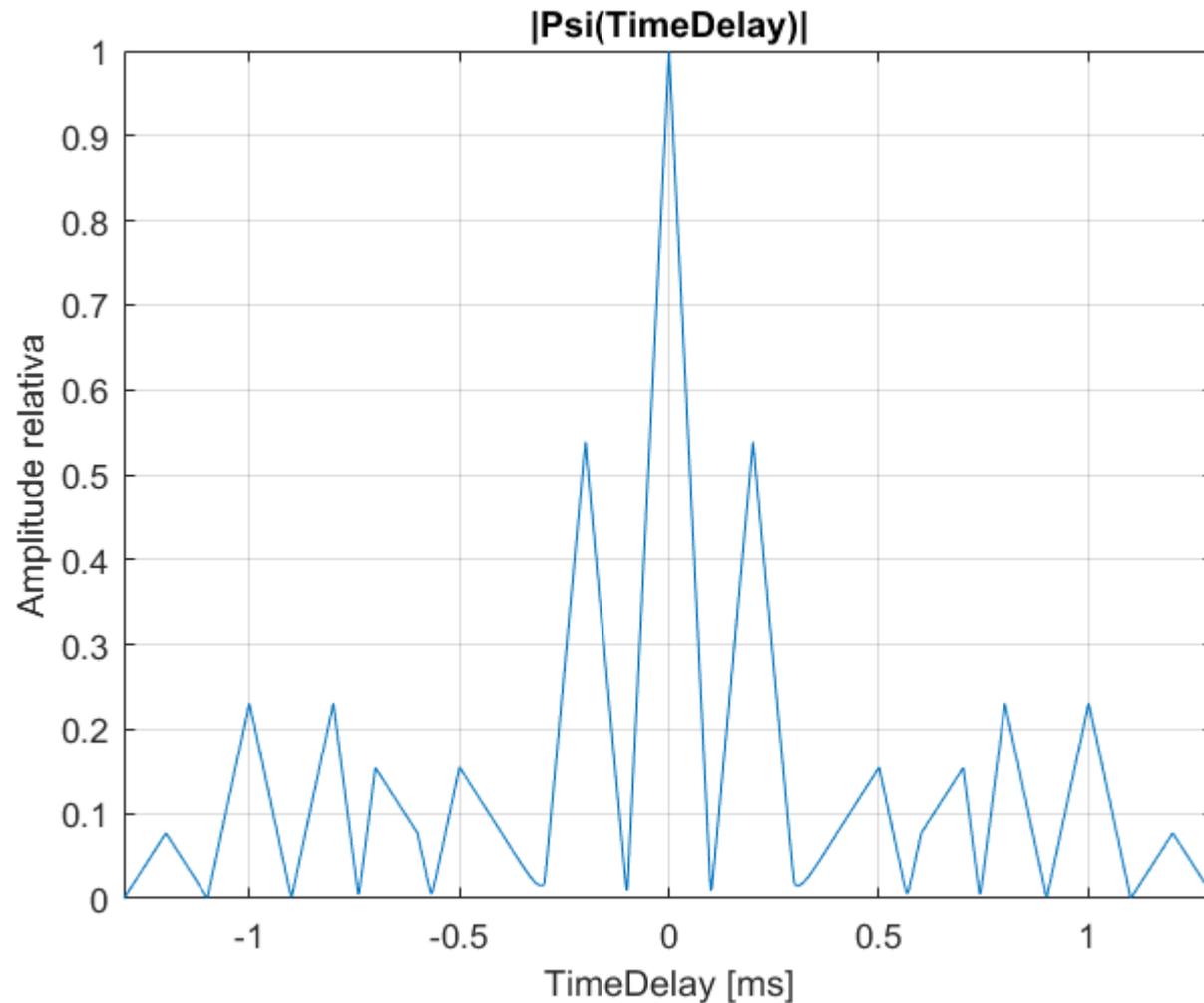
$$\rho = \frac{\Delta R}{\Delta R_c} = 22.414$$

Compressão de pulso por código de Barker

(e) Usando as equações (57), (58) e (59) e o *script* Exemplo6.m com o parâmetro de entrada TamanhoCodigo = -1 obtemos:



(f) A partir do resultado em (e) a curva $|\Psi(\tau)|$ resulta em:



Comparando com o resultado em (b), observa-se que largura do lobo principal na curva $|\Psi(\tau)|$ não é afetada, de modo que o *range resolution* não é afetado.

No entanto, a amplitude dos lobos secundários na curva $|\Psi(\tau)|$ aumentam significativamente, o que é esperado dado que os $N = 13$ chips da sequência RandomSeq não foram gerados por um código de Barker.

Os lobos secundários de valor significativo aumentam a probabilidade de falsa detecção de alvos que não existem (detecção que é efetuada pelo algoritmo CFAR, conforme veremos no Cap 1.9), condição que é mais nociva ainda em presença de ruído.

Portanto, a sequência aleatória RandomSeq dada no enunciado é uma sequência com ambiguidades significativas que tornam esta sequência sem utilidade prática para efeito de compressão de pulso e consequente aumento da precisão do *range resolution*.

Compressão de pulso por sequência PN (*pseudo-noise*)

Vimos nos slides anteriores que a compressão por código de Barker consiste em modular cada *burst* de RF de largura PW com uma sequência de N símbolos BPSK obedecendo à uma das 7 possíveis sequências de Barker.

Uma técnica de compressão intrapulso alternativa consiste em modular cada *burst* de RF de largura PW com uma sequência de N símbolos BPSK (N *chips*) obedecendo à uma sequência PN (PN – *pseudo noise*. Ver https://en.wikipedia.org/wiki/Pseudorandom_noise).

Uma sequência PN implementa um sinal aleatório com espectro similar ao espectro do ruído branco. O espectro de uma sequência PN é semelhante ao de uma sequência aleatória de bits, mas é gerado de forma determinística. A auto-correlação do sinal gerado se aproxima de um pulso estreito, o que é altamente desejável para efeito de maximizar a resolução do radar. No entanto não há garantia de lobos secundários minimizados, como é o caso da sequência de Barker.

O processo é idêntico à geração da sequência de *chips* para as operações de *spreading/de-spreading* efetuada em sistemas DS-SS (*Direct Sequence Spread Spectrum*), processo que é implementado através de um *shift-register* com um subconjunto dos valores lógicos respectivos a cada bit do registrador sendo realimentados à sua entrada através de lógica combinacional realizada por portas lógicas XOR (adição módulo-2).

Ler com atenção os slides 77 a 95 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_1.pdf .

Ver também <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/PNSFE.pdf>.

A compressão de pulso por sequência PN não apresenta a limitação da compressão por código de Barker, que limita a um máximo de $N = 13$ *chips* gerados.

Compressão de pulso por sequência PN (*pseudo-noise*)

Exemplo 7: Para efeito de avaliar em laboratório o desempenho de um radar OTH (*Over The Horizon*) quanto à resolução de *range*, a saída de RF de um gerador de sinais de radar é conectada na entrada de RF do RX do radar OTH. O radar opera na banda de HF e utiliza compressão de pulso por sequência PN. O gerador de sinais modula cada *burst* de RF transmitido com uma sequência de $N = 127$ símbolos BPSK (127 *chips*) resultante do *pseudo-noise* gerado por um *shift-register* de 7 bits com realimentação nos *taps* correspondentes ao 7° e 6° bits do registrador, cada *chip* tendo uma duração $\Delta t_{\text{Chip}} = 0.1$ [ms]. O *delay* τ [s] entre o sinal do gerador de RF e a referência de tempo do *matched-filter* no RX para a sequência *pseudo-noise* é zero, de modo que o sinal do gerador simula um alvo a um *range* $= 0.5 c \tau$ [m] zero (ver slide 5), representando um alvo na origem do *display* (*scope*) do radar. Não há desvio de frequência entre o sinal do gerador de RF e o oscilador local do *front-end* do RX do radar (ver slide 2), de modo que o desvio Doppler ν [Hz] é zero, representando um alvo com velocidade zero, i.e., um alvo estático.

Pede-se:

- (a) Determine a sequência *pseudo-noise* de $N = 127$ símbolos BPSK recebida do gerador de RF a cada *burst* de RF transmitido.
- (b) Determine e plote a superfície da magnitude $|\Psi(\tau, \nu)|$ da função de ambiguidade definida pelo *matched filter* no RX, o qual é casado à sequência *pseudo-noise* de $N = 127$ símbolos BPSK recebida do gerador de RF a cada *burst* de RF transmitido. Para tanto, use as equações (57), (58) e (59).
- (c) A partir do resultado em (b) determine e plote a curva $|\Psi(\tau)|$ obtida de $|\Psi(\tau, \nu)|$ calculada para desvio Doppler ν [Hz] zero (alvo estático).
- (d) A partir do resultado em (b) determine e plote a curva $|\Psi(\nu)|$ obtida de $|\Psi(\tau, \nu)|$ calculada para *delay* τ [s] zero, i.e., *range* $= 0.5 c \tau$ [m] = 0 (alvo na origem do *display* do radar = alvo localizado nas vizinhanças próximas da antena do radar).
- (e) A partir do resultado em (c) determine o *range resolution* resultante da compressão de pulso obtida com a sequência *pseudo-noise* de $N = 127$ *chips* e compare com o *range resolution* que seria obtido sem a compressão de pulso. A partir dos valores de *range resolution* obtidos com e sem compressão de pulso, determine o fator de compressão de pulso ρ .
- (f) Compare analiticamente os resultados obtidos neste exemplo com o resultado obtido no Exemplo 6 para a compressão por código de Barker.

Compressão de pulso por sequência PN (*pseudo-noise*)

Solução:

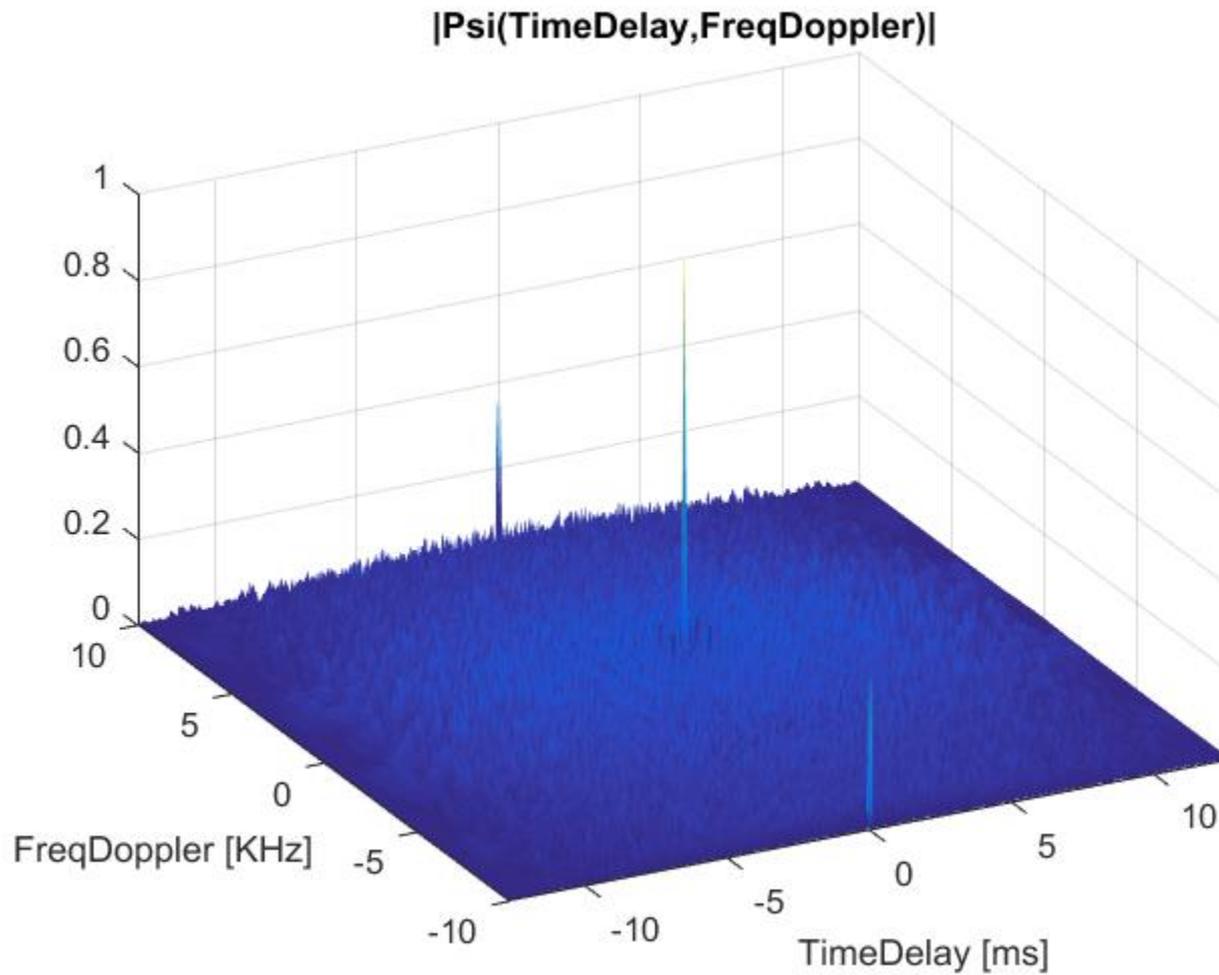
Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo7.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E7S106.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo7.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

(a) Usando o *script* Exemplo7.m obtemos:

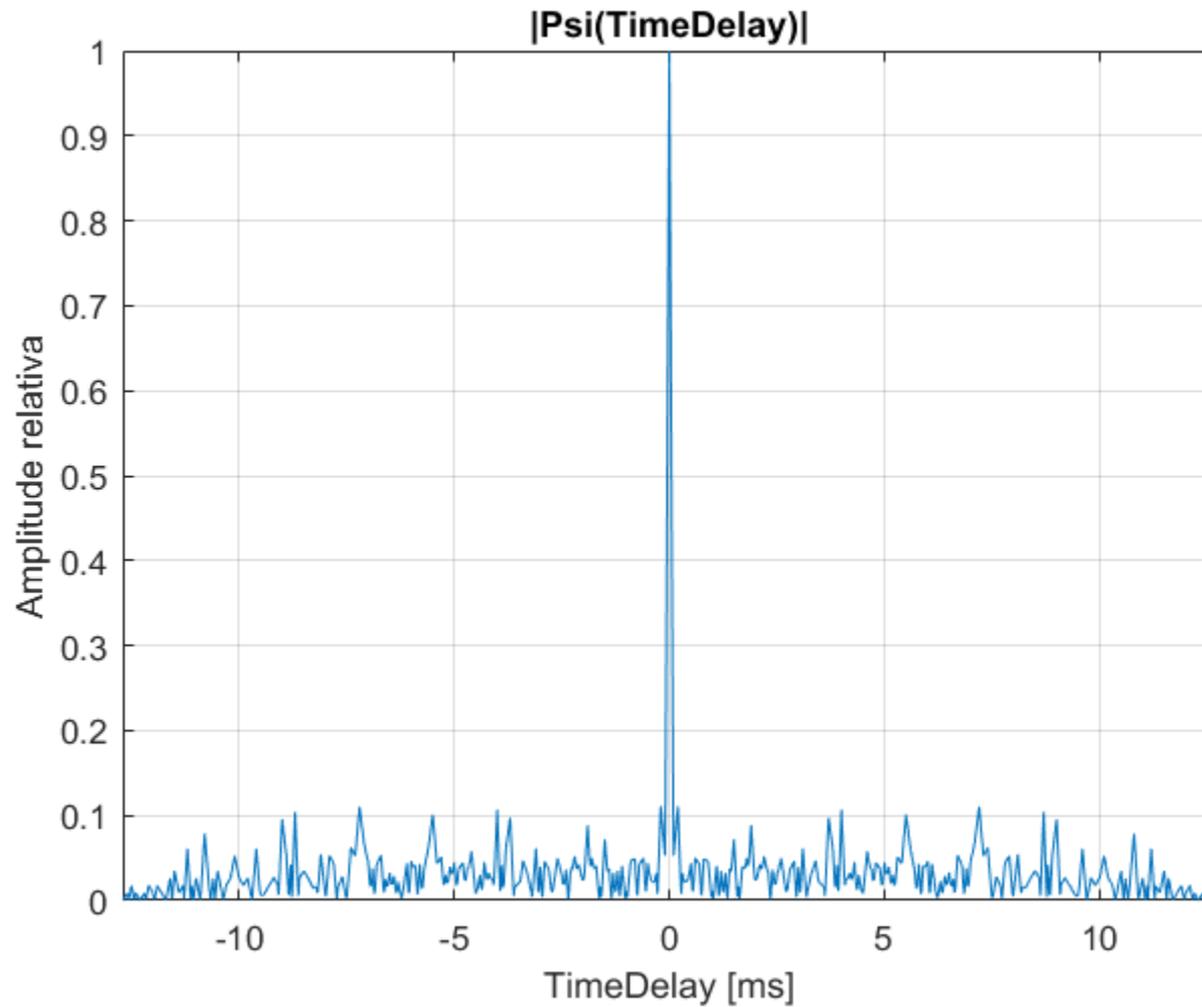
SequenciaBPSK =

-1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	-1
-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	
1	-1	-1	1	1	
1	-1	1	-1	1	
1	-1	-1	-1	-1	
1	1	-1	1	1	
-1	1	1	1	-1	
-1	1	1	-1	-1	
-1	1	1	1	1	
-1	-1	1	1	-1	
-1	-1	1	-1	1	
1	-1	-1	1	1	
-1	-1	-1	1	1	
-1	-1	-1	1	-1	
-1	1	-1	-1	1	
-1	-1	-1	1	1	
-1	1	-1	-1	1	
-1	-1	-1	1	1	

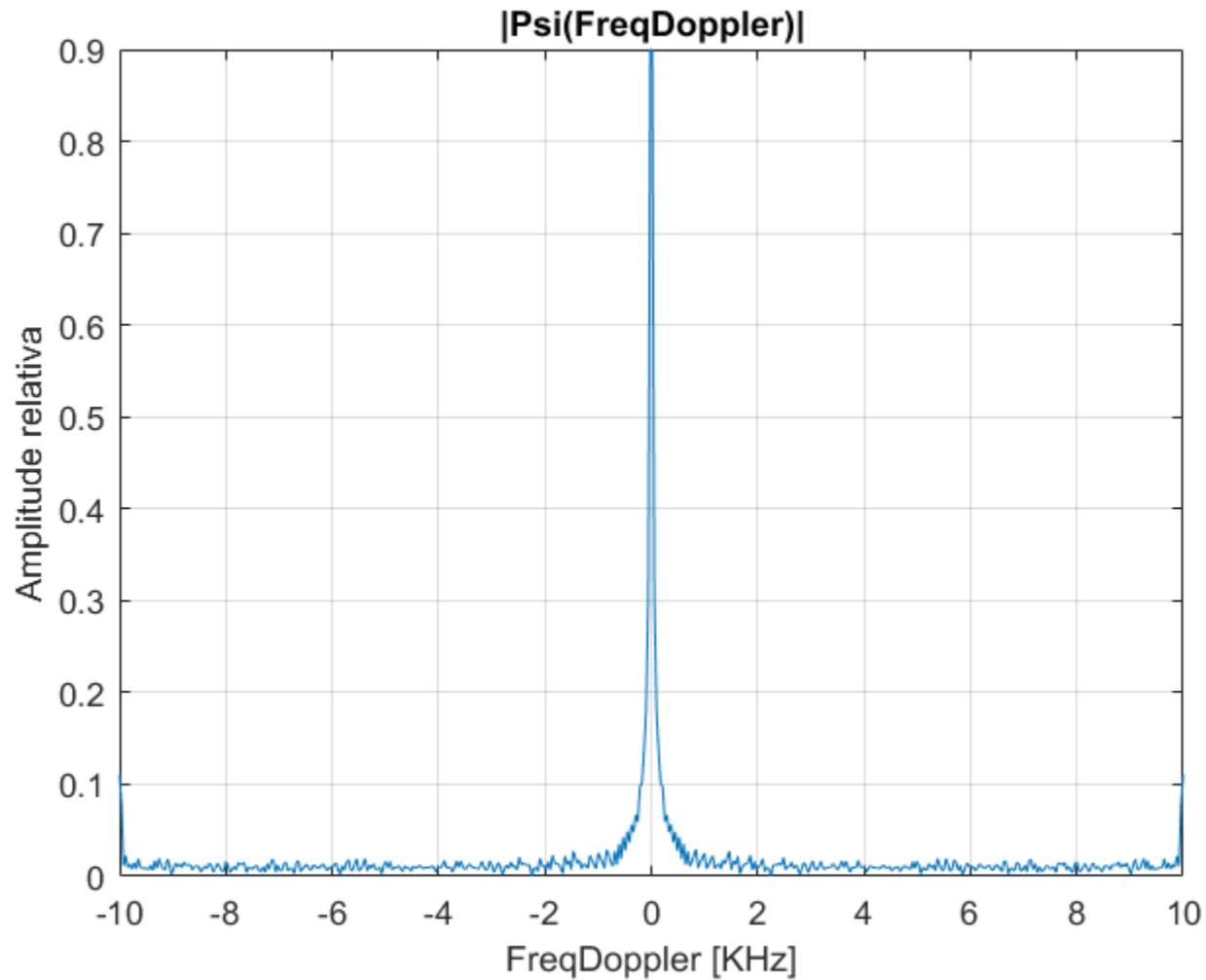
(b) Usando as equações (57), (58) e (59) e o *script* Exemplo7.m obtemos:



(c) A partir do resultado em (b) a curva $|\Psi(\tau)|$ resulta em:

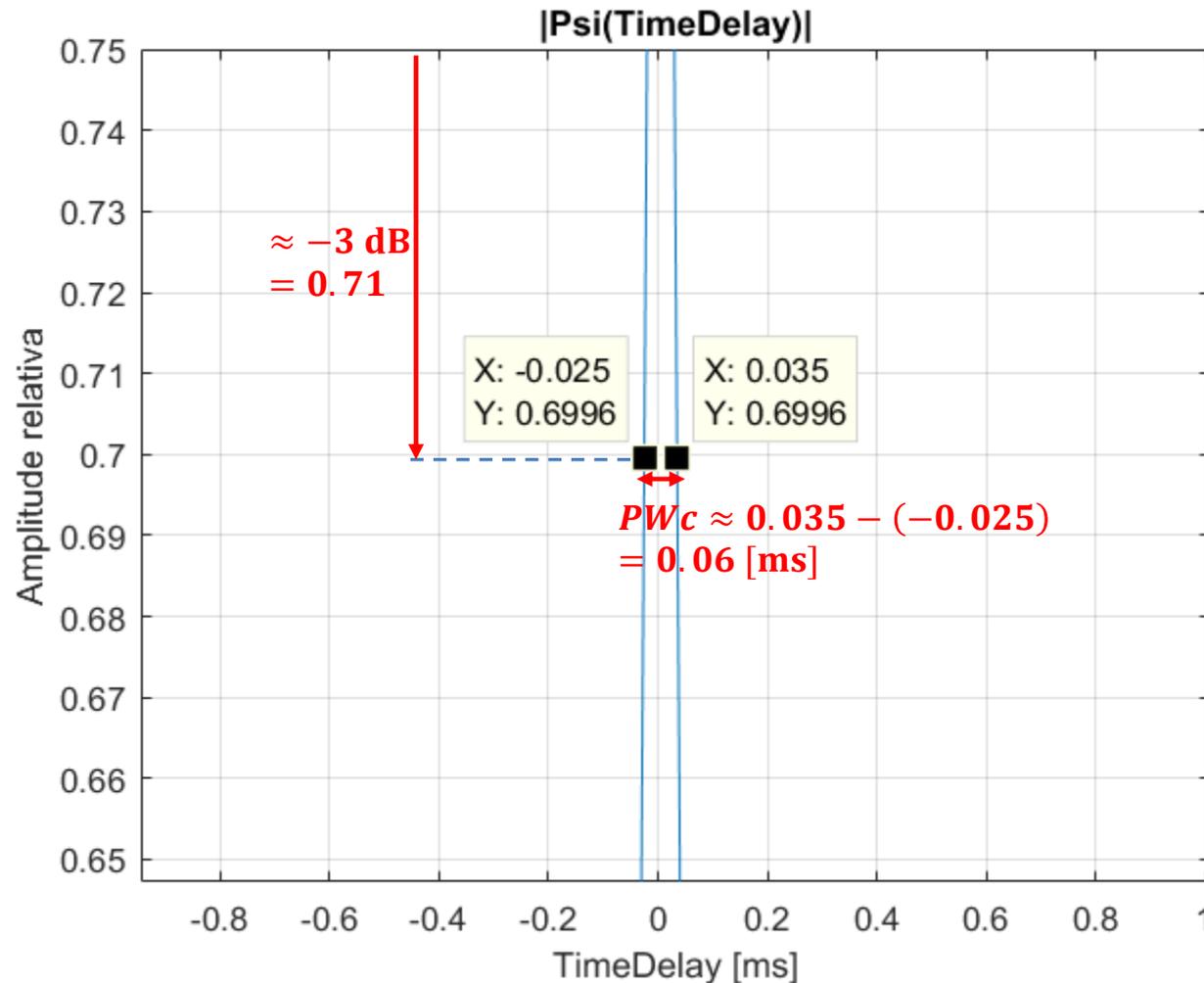


(d) A partir do resultado em (b) a curva $|\Psi(\nu)|$ resulta em:



Compressão de pulso por sequência PN (*pseudo-noise*)

(e) A partir do resultado em (c) obtemos:



Do gráfico ao lado, o pulso comprimido pelo *matched filter* para a sequência *pseudo-noise* com $N = 127$ chips resulta em uma largura $PW_c = 0.06$ [ms]. Da equação (41) no slide 55, com $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s], obtemos o *range resolution* ΔR_c do pulso comprimido:

$$\Delta R_c = \frac{c PW_c}{2} = 8.994 \text{ [Km]}$$

Os $N = 127$ chips da sequência *pseudo-noise*, cada chip tendo a duração $\Delta t_{\text{Chip}} = 0.1$ [ms], resultam em uma largura PW para o pulso não-comprimido dada por:

$$PW = N \Delta t_{\text{Chip}} = 12.7 \text{ [ms]}$$

O *range resolution* ΔR obtido com o pulso não-comprimido de largura $PW = 12.7$ [ms] resulta:

$$\Delta R = \frac{c PW}{2} = 1903.682 \text{ [Km]}$$

O fator de compressão de pulso (que também é o fator de aumento da resolução de *range*) resulta:

$$\rho = \frac{\Delta R}{\Delta R_c} = 211.667$$

Compressão de pulso por sequência PN (*pseudo-noise*)

(f) A compressão de pulso por código de Barker do Exemplo 6 e a compressão de pulso por sequência PN do Exemplo 7 resultaram em *range resolutions* similares: $\Delta Rc = 8.694$ [Km] para a sequência de Barker com $N = 13$ *chips* e $\Delta Rc = 8.994$ [Km] para a sequência *pseudo-noise* com $N = 127$ *chips*, cada *chip* tendo uma duração $\Delta t_{Chip} = 0.1$ [ms] em ambos os casos.

Assumindo que o TX do radar do Exemplo 6 e do Exemplo 7 operem com o mesmo *duty-cycle* $\delta = PW/PRI$ (ver slide 5), observe que o *matched filter* para a sequência *pseudo-noise* do Exemplo 7 é um filtro FIR com $N = 127$ coeficientes, e, portanto, o tempo *PRI* da integração efetuada pelo processo de correlação deste *matched filter* é proporcional a $PW = \Delta t_{Chip} = 12.7$ [ms]. Já o *matched filter* para a sequência de Barker com $N = 13$ *chips* do Exemplo 6 é um filtro FIR com $N = 13$ coeficientes, e, portanto, o tempo *PRI* da integração efetuada pelo processo de correlação deste *matched filter* é proporcional a $PW = N \Delta t_{Chip} = 1.3$ [ms].

Portanto, o período de integração do *matched filter* do Exemplo 7 é $127/13 = 9.8$ vezes maior do que o período de integração do *matched filter* do Exemplo 6. Ocorre que um *matched filter* tem como função primordial maximizar o nível de sinal em relação ao nível de ruído, maximizando a SNR (*signal to noise ratio*). Quanto maior for o período de integração maior será o aumento da SNR (ver discussão nos slides 58 e 59 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf). Portanto, o radar do Exemplo 7 (*pseudo-noise* com $N = 127$ *chips*) é um radar cujo RX tem uma maior sensibilidade aos ecos de alvos do que o radar do Exemplo 6 (Barker com $N = 13$ *chips*) em consequência da maximização da SNR efetuada pelo *matched filter* de $N = 127$ coeficientes.

Compressão de pulso por código de Frank

Codificação de Frank é uma técnica de compressão **intrapulso polifásica**, em que cada um dos pulsos de RF (*bursts*) individuais irradiados pelo TX tem a sua fase φ ajustada sequencialmente N^2 vezes ao longo da duração PW . Cada intervalo PW/N^2 em que a fase φ é mantida constante constitui um *chip*. Os N^2 possíveis valores sequenciais da fase φ de cada respectivo *chip* são extraídos do conjunto de N^2 fases φ resultantes das equações (60) e (61):

$$\Phi_{m,n} = \angle e^{j\frac{2\pi}{N}(m-1)(n-1)} \quad (60)$$

$$m = 1 \cdots N, n = 1 \cdots N \quad (61)$$

Por exemplo, o quadro ao lado mostra o script MathCad para geração de um código de Frank para $N = 4$. O código resulta em um conjunto de $N^2 = 16$ *chips* no *burst* de largura PW , cada *chip* tendo a fase representada no vetor *PhaseVector*.

A partir da geração da sequência de símbolos IQ com fases dadas pelas equações (60) e (61), a análise é idêntica à análise que vimos para códigos de Barker e para sequências PN.

```

ORIGIN := 1   N := 4   m := 1..N   n := 1..N   NumPulsos := N^2 = 16

Φm,n := arg ej · [ 2π / N · (m-1) · (n-1) ] → Φ = 
( 0  0  0  0 )
( 0  90 180 -90 )
( 0 180  0 180 )
( 0 -90 180  90 ) °

ToVector(Matrix) := 
| M ← rows(Matrix)
| N ← cols(Matrix)
| k ← 1
| for m ∈ 1..M
|   for n ∈ 1..N
|     | Vk ← Matrixm,n
|     | k ← k + 1
| return V

PhaseVector := ToVector(Φ)T = (0 0 0 0 0 90 180 -90 0 180 0 180 0 -90 180 90) °
length(PhaseVectorT) = 16
    
```

Compressão de pulso por *stretch processing*

Stretch processing é uma técnica de compressão de pulso usada em radares com alta resolução de *range*, como radares de abertura sintética (SAR – *synthetic aperture radar* – ver slides 47 a 71 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_III.pdf). Nesta técnica a arquitetura dos blocos funcionais do RX do radar é tal que a banda convencional do *hardware* do RX é convertida em uma banda efetiva muito mais larga pelo processo de *stretching*.

A ideia no *stretch processing* é trocar o domínio tempo pelo domínio frequência. O TX de um radar *stretch processing* transmite pulsos $s(t) = A \cos(2\pi f_i(t)t)$ [V] de largura τ_p (*bursts* de RF de largura τ_p [s]), do tipo LFM (*linear frequency modulation*), também denominado pulso *chirp*. A amplitude do pulso é A . A frequência instantânea $f_i(t)$ [Hz] do pulso $s(t)$ é variada linearmente na forma de uma rampa no intervalo de frequência $f_{\min} < f_i(t) < f_{\max}$ que define a banda $B = f_{\max} - f_{\min}$ [Hz], variação de frequência que é efetuada durante o intervalo de tempo τ_p [s]. Analiticamente o pulso *chirp* de largura τ_p [s] é dado por (62):

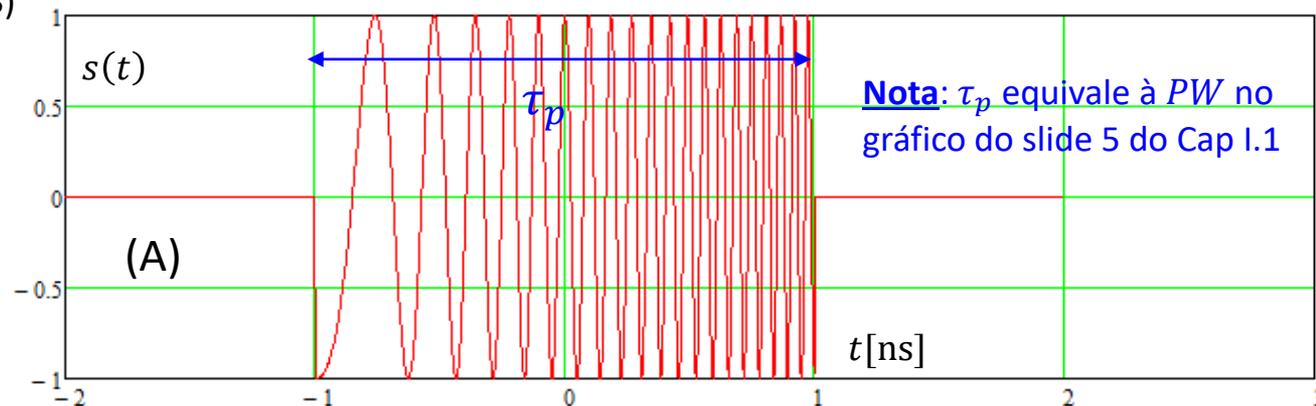
$$s(t) = A \operatorname{Re} \left\{ \operatorname{Pulso} \left(\frac{t}{\tau_p} \right) e^{j2\pi \left(f_0 t + \frac{B}{2\tau_p} t^2 \right)} \right\} \quad [\text{V}] \quad (62)$$

onde, em (62), $f_0 = (f_{\min} + f_{\max})/2$ [Hz] é a frequência central da banda $B = f_{\max} - f_{\min}$ [Hz] em que ocorre a varredura linear (rampa) da frequência instantânea $f_i(t)$ [Hz] do *chirp* $s(t)$ e onde $\operatorname{Pulso}(x)$ é dado por (63).

$$\operatorname{Pulso}(x) = \begin{cases} 1.0, & |x| < 0.5 \\ 0.0, & |x| \geq 0.5 \end{cases} \quad (63)$$

O gráfico em (A) ao lado mostra um pulso *chirp* $s(t)$ de amplitude $A = 1$ plotado no intervalo $-\frac{\tau_p}{2} < t < \frac{\tau_p}{2}$, com $\tau_p = 2$ [ns], $f_{\min} = 1.0$ [GHz] e $f_{\max} = 19$ [GHz]:

A **declividade** $\beta = B/\tau_p$ [Hz/s] da rampa linear de frequência do sinal *chirp* $s(t)$ é determinada baseada no fato de que frequência é variação de fase no tempo. Neste contexto, a frequência instantânea que resulta da variação no tempo da fase $\frac{B}{2\tau_p} t^2$ do *chirp* $s(t)$ é uma rampa linear, i.e., $\frac{d}{dt} \frac{B}{2\tau_p} t^2 = (B/\tau_p)t = \beta t$ [Hz], cuja declividade é β [Hz/s].



Compressão de pulso por *stretch processing*

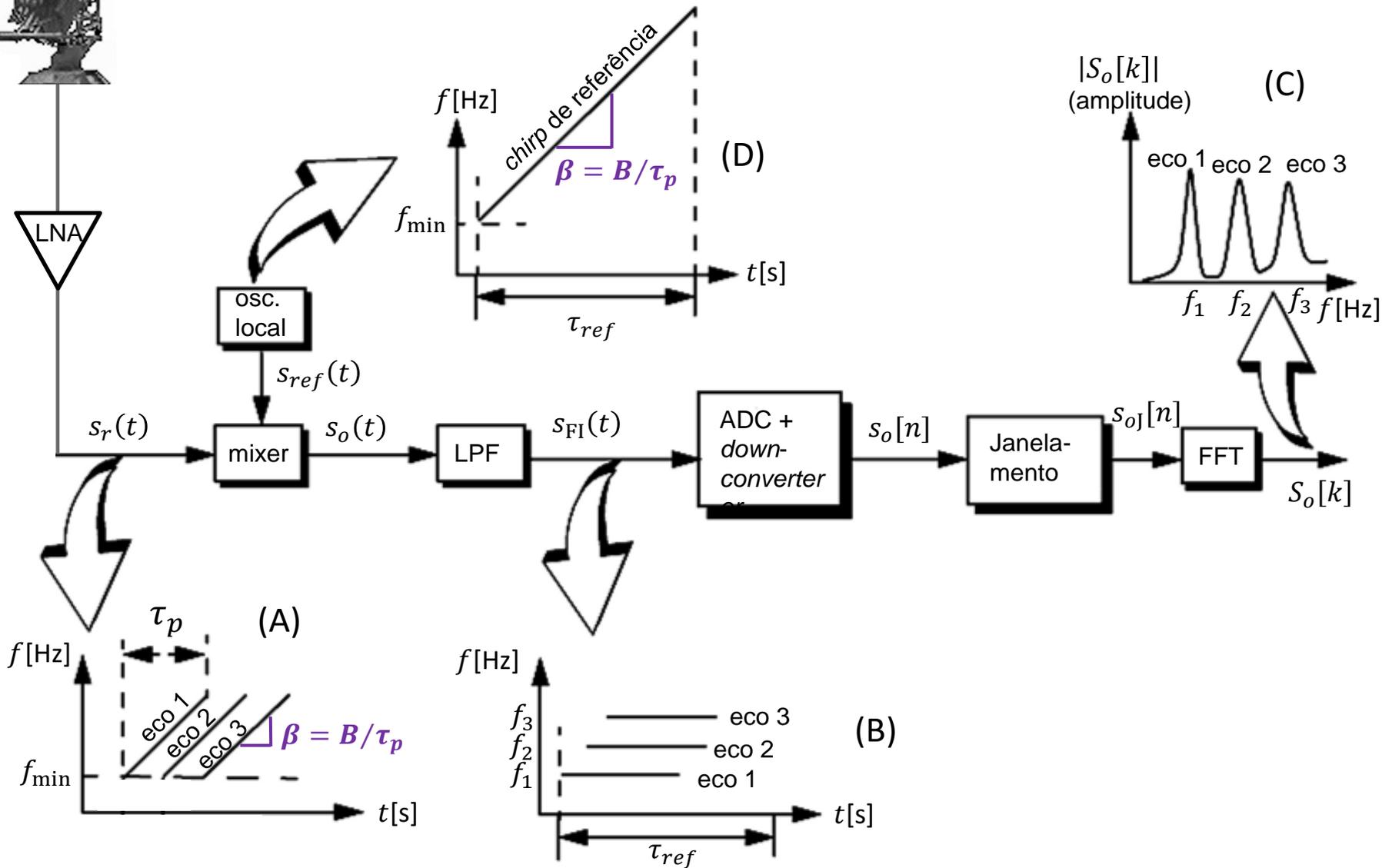
Por exemplo, o TX de um radar de banda X tipicamente varia a frequência instantânea $f_i(t)$ do pulso *chirp* $s(t)$ de $f_{\min} = 8$ [GHz] a $f_{\max} = 10$ [GHz] ao longo do intervalo $\tau_p = 100$ [μ s], gerando um sinal com uma largura de banda total $B = f_{\max} - f_{\min} = 2$ [GHz]. Ocorre que o hardware em bandabase do RX de um radar dificilmente poderá ser realizável de modo a operar com um sinal cuja banda é 2 [GHz]. Um sinal com esta largura de banda demandaria um *clock* muito elevado no hardware em bandabase do RX, com consequentes problemas de *constraints* no roteamento de FPGAs (<https://www.allaboutcircuits.com/technical-articles/clock-signal-FPGA-design-clock-rate-xilinx-period-timing-constraint/>). Sem falar que o ADC, p/ obedecer o critério da amostragem de Nyquist, teria que operar com uma frequência de amostragem f_s mínima correspondente ao dobro da banda de 2 [GHz], i.e., $f_s > 4$ [GHz].

Para evitar este *stress* computacional no hardware do RX devido à excessiva banda B de 2 [GHz], a solução é (ver próximo slide): O oscilador local do RX gera um sinal *chirp* LFM de referência $s_{ref}(t)$ de duração τ_{ref} e c/ declividade $\beta = B/\tau_p$ da rampa de frequência igual à declividade da rampa de frequência do sinal *chirp* $s(t)$ transmitido pelo TX (ver (D) no próximo slide), mas c/ um atraso t_{ref} ajustável pelo sistema de sincronismo do RX em relação ao *chirp* $s(t)$ (ver slides 118 e 119). A declividade $\beta = B/\tau_p$ da rampa de frequência do sinal $s_r(t)$ recebido no RX é igual à declividade da rampa do sinal $s(t)$ transmitido pelo TX, conforme mostrado em **roxo** em (A) no próximo slide. O atraso t_{ref} em $s_{ref}(t)$ é ajustado pelo sistema de sincronismo do RX p/ que, após o início da rampa de frequência do sinal de referência $s_{ref}(t)$ e integralmente dentro de sua duração τ_{ref} , ocorram todos ecos recebidos no sinal $s_r(t)$ e que retornam da onda EM transmitida pelo TX e refletida nos respectivos alvos (ver slides 118 e 119).

A seguir, o mixer multiplica $s_r(t)$ por $s_{ref}(t)$, resultando no sinal $s_o(t) = s_r(t)s_{ref}(t)$ em sua saída. Em consequência da heterodinação efetuada no mixer, o espectro de $s_o(t)$ apresenta componentes espectrais resultantes da diferença entre a frequência instantânea de $s_{ref}(t)$ e a frequência instantânea do pulso *chirp* de cada eco em $s_r(t)$, como também apresenta componentes espectrais resultantes da soma entre a frequência instantânea de $s_{ref}(t)$ e a frequência instantânea do pulso *chirp* de cada eco em $s_r(t)$ (ver slide 16 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapIV.pdf).

Cada eco em $s_r(t)$ é recebido com um atraso $t_0 = 2r_0/c$ [s] no tempo que é proporcional ao *range* r_0 [m] do alvo. Como a frequência do pulso *chirp* de cada eco em $s_r(t)$ é uma rampa com declividade $\beta = B/\tau_p$ igual à declividade da rampa de frequência de $s_{ref}(t)$, então a diferença de frequência instantânea entre $s_{ref}(t)$ e cada eco em $s_r(t)$ é distinta p/ cada eco e permanece constante ao longo da duração τ_p de cada respectivo eco. Portanto, o espectro do sinal $s_o(t)$ resultante da diferença de frequência entre $s_{ref}(t)$ e $s_r(t)$ conseqüente da heterodinação do mixer conterà componentes espectrais cujas frequências são proporcionais ao atraso no tempo t_0 (e, portanto, proporcionais ao *range*) de cada respectivo eco, conforme gráfico em (B) no próximo slide).

Compressão de pulso por *stretch processing*



Compressão de pulso por *stretch processing*

Dado que o sinal $s_o(t)$ apresenta um espectro cujas componentes espectrais resultam da diferença e da soma entre a frequência instantânea do pulso *chirp* $s_{ref}(t)$ e a frequência instantânea do pulso *chirp* do eco em $s_r(t)$, é necessário filtrar $s_o(t)$ com um filtro LPF (*low pass filter*) para eliminar a interferência do produto de heterodinação resultante da soma das frequências instantâneas de $s_{ref}(t)$ e $s_r(t)$, conforme bloco “LPF” no diagrama no slide anterior.

O sinal $s_{FI}(t)$ na saída do LPF é então digitalizado pelo ADC e convertido pelo *down-converter* p/ a sequência de símbolos IQ em bandabase $s_o[n]$. Janelamento (Hanning, Hamming, Kaiser, etc.) é aplicado à sequência $s_o[n]$ p/ efeito de minimizar lobos secundários na saída da FFT. A saída $S_o[k]$ da FFT da sequência janelada $s_{oJ}[n]$ identifica então o *range* de cada alvo através das frequências f_i dos picos de amplitude resultantes, conforme gráfico (C) no slide anterior (ver eq. (75) slide 121).

Retomando a análise do exemplo em que o TX de um radar de banda X varia a frequência instantânea $f_i(t)$ do sinal $s(t)$ de $f_{\min} = 8[\text{GHz}]$ a $f_{\max} = 10 [\text{GHz}]$ ao longo do intervalo $\tau_p = 100 [\mu\text{s}]$, gerando um sinal uma largura de banda total $B = f_{\max} - f_{\min} = 2 [\text{GHz}]$, o que dificultaria a implementação do hardware se não fosse adotado o *stretch processing*: Embora o sinal $s(t)$ tenha uma largura de banda total $B = 2 [\text{GHz}]$ é importante notar que o espectro do sinal $s_{FI}(t)$ resultante na saída do bloco “LPF” no slide anterior apresenta componentes espectrais resultantes da diferença entre a frequência instantânea de $s_{ref}(t)$ e a frequência instantânea do pulso *chirp* de cada eco em $s_r(t)$. Estas componentes espectrais estarão presentes no espectro de $s_{FI}(t)$, mas por serem resultantes da diferença de frequências, a largura do espectro de $s_{FI}(t)$ será muito menor do que a banda total B do espectro dos sinais $s(t)$ e $s_r(t)$.

Considerando que **(I)** a rampa de frequência do sinal de referência $s_{ref}(t)$ é atrasada de t_{ref} da rampa de frequência do *chirp* $s(t)$ transmitido pelo TX, sendo t_{ref} o instante (ajustável) em que o valor instantâneo de frequência da rampa corresponde à frequência $f_0 = (f_{\min} + f_{\max})/2 [\text{Hz}]$, **(II)** a rampa de frequência de um determinado eco em $s_r(t)$ é recebida c/ o atraso $t_0 = 2r_0/c [\text{s}]$ do eco do alvo no *range* r_0 e **(III)** a frequência f_i da componente espectral no espectro do sinal $s_{FI}(t)$ correspondente ao eco do alvo no *range* r_0 é dada por $f_i = \beta(t_0 - t_{ref}) = \beta(2r_0/c - t_{ref}) [\text{Hz}]$, sendo $\beta = B/\tau_p [\text{Hz/s}]$ a declividade da rampa (ver eq. (62) slide 114), então a largura de banda no espectro de $s_{FI}(t)$ precisa ser suficiente não só p/ contemplar a componente espectral de frequência f_i do alvo no *range* r_0 , como também p/ contemplar as componentes espectrais de todos os demais alvos. Por esta razão, o valor de t_{ref} é ajustado de modo a minimizar a diferença $t_0 - t_{ref}$ (mas simultaneamente contemplando os respectivos ecos de todos os alvos) e assim minimizar a largura de banda do espectro de $s_{FI}(t)$, minimizando a banda necessária ao hardware em bandabase. Em consequência disto, note também que os alvos não podem estar muito distantes entre si sob pena da diferença $t_0 - t_{ref}$ tornar-se excessiva, aumentando a largura de banda do espectro de $s_{FI}(t)$ necessária p/ contemplar todos os alvos (ver slide 119).

Compressão de pulso por *stretch processing*

O equacionamento analítico que descreve o *stretch processing* é baseado na representação fasorial dos sinais (ver <https://en.wikipedia.org/wiki/Phasor>), conforme segue. O pulso *chirp* $s(t)$ de duração τ_p transmitido pelo TX é dado por (ver eq. (62) slide 114):

$$s(t) = e^{j2\pi\left(f_0 t + \frac{\beta}{2} t^2\right)} \text{ [V]} \quad 0 < t < \tau_p \text{ [s]} \quad (64)$$

onde $\beta = B/\tau_p$ [Hz/s] é a declividade da rampa de frequência e $f_0 = (f_{\min} + f_{\max})/2$ é a frequência central da banda $B = f_{\max} - f_{\min}$ em que ocorre a varredura linear (rampa) da frequência. O eco que retorna após a reflexão da onda EM em um alvo ou em um *scatterer* (ver slide 65) de formato puntual é recebido no RX com um atraso $t_0 = 2r_0/c$ [s] no tempo, atraso que é proporcional ao *range* r_0 [m] do alvo/*scatterer*, sendo dado por:

$$s_r(t) = A e^{j2\pi\left(f_0(t-t_0) + \frac{\beta}{2}(t-t_0)^2\right)} \text{ [V]} \quad 0 < t < \tau_p \text{ [s]} \quad (65)$$

onde A é uma constante de amplitude que é proporcional a raiz quadrada do RCS do *scatterer* (conforme equação (47) no slide 69). O sinal de referência $s_{ref}(t)$ gerado pelo oscilador local do RX e sincronizado ao sinal transmitido pelo TX é um pulso *chirp* dado por:

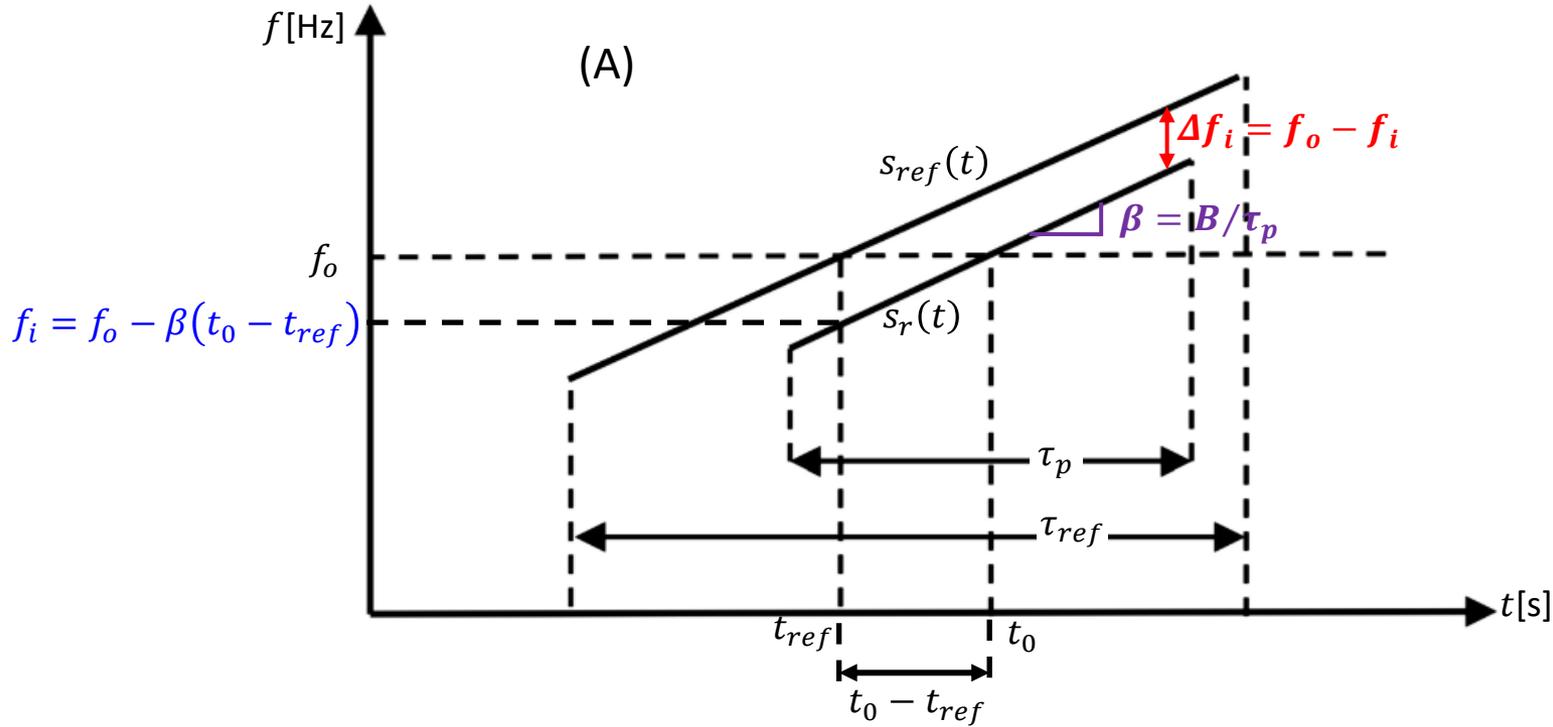
$$s_{ref}(t) = e^{-j2\pi\left(f_0(t-t_{ref}) + \frac{\beta}{2}(t-t_{ref})^2\right)} \text{ [V]} \quad 0 < t < \tau_{ref} \text{ [s]} \quad (66)$$

onde t_{ref} é o instante em que a rampa de frequência do pulso *chirp* $s_{ref}(t)$ resulta em um valor instantâneo de frequência correspondente à frequência f_0 , conforme mostrado no gráfico em (A) no próximo slide. Note que o gráfico em (A) mostra também a rampa de frequência de $s_r(t)$ para o caso de um único eco de duração τ_p recebido no RX com um atraso $t_0 = 2r_0/c$ [s] no tempo, atraso que é proporcional ao *range* r_0 [m] do *scatterer* que originou o eco. O valor de t_{ref} é ajustado pelo bloco de sincronismo do RX de modo a minimizar $|t_0 - t_{ref}|$ para o conjunto de todos os ecos originados no cenário operacional do radar, cada eco sendo recebido com um respectivo atraso t_0 . Desta maneira, minimiza-se a largura do espectro de $s_{FI}(t)$, minimizando o *stress* computacional sobre o hardware, conforme discussão ao final do slide anterior.

Dado que há múltiplos ecos de duração τ_p recebidos dos respectivos alvos/*scatterers* no cenário operacional do radar, há um intervalo de tempo $t_r = t_{\max} - t_{\min}$ ao longo do qual o *stretch processing* é aplicado de modo a contemplar o conjunto dos atrasos t_0 de todos os respectivos ecos, sendo t_{\min} e t_{\max} os limites inferior e superior do intervalo t_r . Para efeito de evitar redução de SNR (*signal to noise ratio*) do sinal resultante do *stretch processing* e evitar a degradação do *range resolution* por truncamento das rampas dos ecos em $s_r(t)$, é necessário que a rampa de frequência de $s_{ref}(t)$ ocorra em um intervalo de tempo τ_{ref} suficientemente longo de forma a conter de forma integral neste intervalo as rampas de frequência de todos os ecos recebidos em $s_r(t)$, conforme mostrado em (A) no slide 116 para 3 ecos. Este requerimento estabelece a condição: $\tau_{ref} \geq t_r + \tau_p$ [s] (67)

Compressão de pulso por *stretch processing*

Note em (A) abaixo que a diferença de frequência instantânea Δf_i entre a rampa de frequência do pulso *chirp* do oscilador local do RX representado por $s_{ref}(t)$ e a rampa de frequência do pulso *chirp* do eco do alvo recebido no RX representado por $s_r(t)$ permanece constante ao longo da duração τ_p do eco. Notar em (A) ainda que Δf_i é proporcional à $|t_0 - t_{ref}|$, sendo a constante de proporcionalidade dada pela declividade $\beta = B/\tau_p$ [Hz/s] da rampa e sendo $t_0 = 2r_0/c$ [s] o tempo do *round trip* da onda EM que incide e reflete no alvo localizado no *range* r_0 [m], dando origem ao eco.



Note acima que se alguma parte da rampa de frequência do pulso *chirp* do eco do alvo recebido no RX representado por $s_r(t)$ estiver fora do intervalo de abrangência da rampa de frequência do pulso *chirp* do oscilador local do RX representado por $s_{ref}(t)$, ocorrerá o truncamento da rampa $s_r(t)$ em algum instante do intervalo em que o *stretch processing* é aplicado, reduzindo a SNR (*signal to noise ratio*) do sinal resultante do *stretch processing* e degradando o *range resolution*. Por este motivo, a equação (67) no slide anterior deve ser obrigatoriamente atendida,

Compressão de pulso por *stretch processing*

A condição adicional que precisa ser atendida para efeito de evitar a redução da SNR (*signal to noise ratio*) do sinal resultante do *stretch processing* e evitar a degradação do *range resolution* é que, para cada atraso t_0 respectivo a cada eco originado no cenário operacional do radar seja obedecida a condição de que o atraso t_0 do eco ocorra no intervalo de tempo dado por (68):

$$t_{ref} - t_{min} \leq t_0 \leq t_{ref} + t_{max} \text{ [s]} \quad (68)$$

Se as condições dadas por (67) e (68) forem obedecidas então o intervalo de tempo τ_{ref} em que ocorre a rampa de frequência do pulso *chirp* $s_{ref}(t)$ resultará suficientemente longo de forma a conter neste intervalo as rampas de frequência de todos os ecos recebidos em $s_r(t)$ e o *stretch processing* apresentará um desempenho em termos de SNR similar ao de um *matched filter*, que estudaremos adiante neste capítulo. Se τ_{ref} não for suficientemente longo de forma a conter neste intervalo as rampas de frequência de todos os ecos recebidos em $s_r(t)$ então o *stretch processing* apresentará uma redução da SNR do sinal em sua saída que é proporcional ao quanto as rampas de frequência dos ecos recebidos em $s_r(t)$ não estejam contidas no intervalo τ_{ref} . Além da redução de SNR dada por $SNR_{stretch}/SNR_{matched\ filter} = \tau_p/\tau_{ref}$ (em vezes), conforme Capítulo 11 da referência [1], adicionalmente poderá ocorrer redução do *range resolution*.

Continuando então a análise do diagrama no slide 116, o mixer efetua a multiplicação de $s_r(t)$ dado por (65) por $s_{ref}(t)$ dado por (66), resultando em sua saída o sinal $s_o(t)$ dado por:

$$s_o(t) = Ae^{-j(\pi\beta(t_{ref}^2 - t_0)^2 + 2\pi f_0(t_0 - t_{ref}) + 2\pi\beta(t_0 - t_{ref})t)} \text{ [V]} \quad (69)$$

ou equivalentemente

$$s_o(t) = Ae^{-j\phi(t)} \text{ [V]} \quad (70)$$

onde

$$\phi(t) = \pi\beta(t_{ref}^2 - t_0)^2 + 2\pi f_0(t_0 - t_{ref}) + 2\pi\beta(t_0 - t_{ref})t \text{ [rad]} \quad (71)$$

sendo $\phi(t)$ a fase instantânea do sinal $s_o(t)$. Para cada i –ésimo eco recebido no RX, a frequência angular instantânea $\omega_i = 2\pi f_i$ [rad/s] do sinal do eco representado em $s_o(t)$ é a razão de variação no tempo da sua fase $\phi(t)$:

$$f_i = \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} \text{ [Hz]} \quad (72)$$

Compressão de pulso por *stretch processing*

Aplicando (72) a (71) e notando que o único termo que varia no tempo em (71) é $2\pi\beta(t_0 - t_{ref})t$, obtemos:

$$f_i = \beta(t_0 - t_{ref}) \quad [\text{Hz}] \quad (73)$$

sendo f_i a frequência da componente espectral no espectro de $s_o(t)$ que resulta do eco de duração τ_p recebido no RX com um atraso $t_0 = 2r_0/c$ [s] que é proporcional ao *range* r_0 [m] do *scatterer* que originou o eco. De (73) obtemos:

$$t_0 = \frac{f_i}{\beta} + t_{ref} \quad [\text{s}] \quad (74)$$

E, dado que $t_0 = 2r_0/c$ [s], de (74) obtemos o *range* r_0 [m] do *scatterer* em função da frequência instantânea f_i da componente espectral no espectro de $s_o(t)$ que resulta do eco do *scatterer*:

$$r_0 = \frac{c}{2} \left(\frac{f_i}{\beta} + t_{ref} \right) \quad [\text{m}] \quad (75)$$

sendo $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] a velocidade de propagação da onda EM e $\beta = B/\tau_p$ [Hz/s] é a declividade da rampa de frequência na banda $B = f_{\max} - f_{\min}$ [Hz] em que ocorre a varredura linear (rampa) de frequência do sinal LFM (= sinal *chirp*) $s(t)$ transmitido pelo TX.

Para efeito de identificar as frequências f_i das componentes espectrais no espectro de $s_o(t)$, e, portanto, identificar o *range* r_0 de cada respectivo *scatterer* através de (75), o espectro $S_o(f)$ de $s_o(t)$ é obtido através de $S_o(f) = \mathcal{F}\{s_o(t)\}$, onde $\mathcal{F}\{\cdot\}$ é o operador que retorna a Transformada de Fourier de seu argumento. Como $s_o(t)$ é filtrado pelo bloco “LPF”, digitalizado pelo ADC, convertido para bandabase pelo *down-converter* e janelado pelo bloco “Janelamento” conforme mostrado no slide 116, o espectro $S_o(f)$ é obtido através de $S_o(f) = \text{DTFT}\{s_{oJ}[n]\}$, sendo $\text{DTFT}\{\cdot\}$ o operador que retorna a DTFT (*Discrete Time Fourier Transform* – ver http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aula13&14_04052020.pdf) de seu argumento. Na prática, para minimizar a complexidade computacional e maximizar a velocidade de processamento, o espectro é discreto no domínio frequência e é obtido através de $S_o[k] = \text{FFT}\{s_{oJ}[n]\}$, sendo $\text{FFT}\{\cdot\}$ o operador que retorna a *Fast Fourier Transform* da sequência no domínio tempo que é argumento $\{\cdot\}$ do operador (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Fast_Fourier_transform). A saída $S_o[k]$ da FFT da sequência janelada $s_{oJ}[n]$ identifica então o *range* de cada *scatterer* através das frequências dos picos de amplitude resultantes, conforme mostrado no gráfico em (C) no slide 116.

Compressão de pulso por *stretch processing*

Note que apenas o termo $2\pi\beta(t_0 - t_{ref})t$ varia no tempo na expressão para $s_o(t)$ dada por (69). Os demais termos apenas definem uma fase constante, que não afetam a magnitude do espectro de $s_o(t)$. Portanto, para o cômputo do espectro $S_o(f) = \mathcal{F}\{s_o(t)\}$ de um alvo/*scatterer* de range r_0 , e, conseqüentemente, para o cômputo do espectro discreto $S_o[k] = \text{FFT}\{s_o[n]\}$, (69) simplifica para:

$$s_o(t) = Ae^{-j(2\pi\beta(t_0 - t_{ref})t)} = Ae^{-j(2\pi\beta(\frac{2r_0}{c} - t_{ref})t)} \quad [\text{V}] \quad (76)$$

Para determinar o *range resolution* resultante do *stretch processing*, consideremos dois *scatterers* pontuais cujos ecos dos respectivos pulsos *chirp* de duração τ_p são recebidos no RX com atrasos de tempo $t_1 = 2r_1/c$ [s] e $t_2 = 2r_2/c$ [s] proporcionais aos respectivos ranges r_1 [m] e r_2 [m] de cada *scatterer*. A partir de (73), as frequências f_{i1} e f_{i2} das componentes espectrais no espectro de $s_o(t)$ que resultam de cada respectivo eco são :

$$f_{i1} = \beta(t_1 - t_{ref}) \quad f_{i2} = \beta(t_2 - t_{ref}) \quad [\text{Hz}] \quad (77)$$

A resolução de frequência Δf para o *stretch processing* é dada por (rever discussão nos slides 58 e 59):

$$\Delta f = 1/\tau_p \quad [\text{Hz}] \quad (78)$$

Os dois *scatterers* pontuais podem ser resolvidos em *range* se seus respectivos ranges r_1 [m] e r_2 [m] forem tais que a diferença entre as frequências instantâneas f_{i1} e f_{i2} a eles associadas sejam maiores do que a resolução de frequência Δf para o *stretch processing* dada por (78). Isso pode ser expresso como:

$$f_{i2} - f_{i1} = \beta(t_2 - t_{ref}) - \beta(t_1 - t_{ref}) \geq 1/\tau_p \quad [\text{Hz}] \quad (79)$$

Simplificando algebricamente (79) e resolvendo para $t_2 - t_1$ obtemos a resolução no tempo do *stretch processing*:

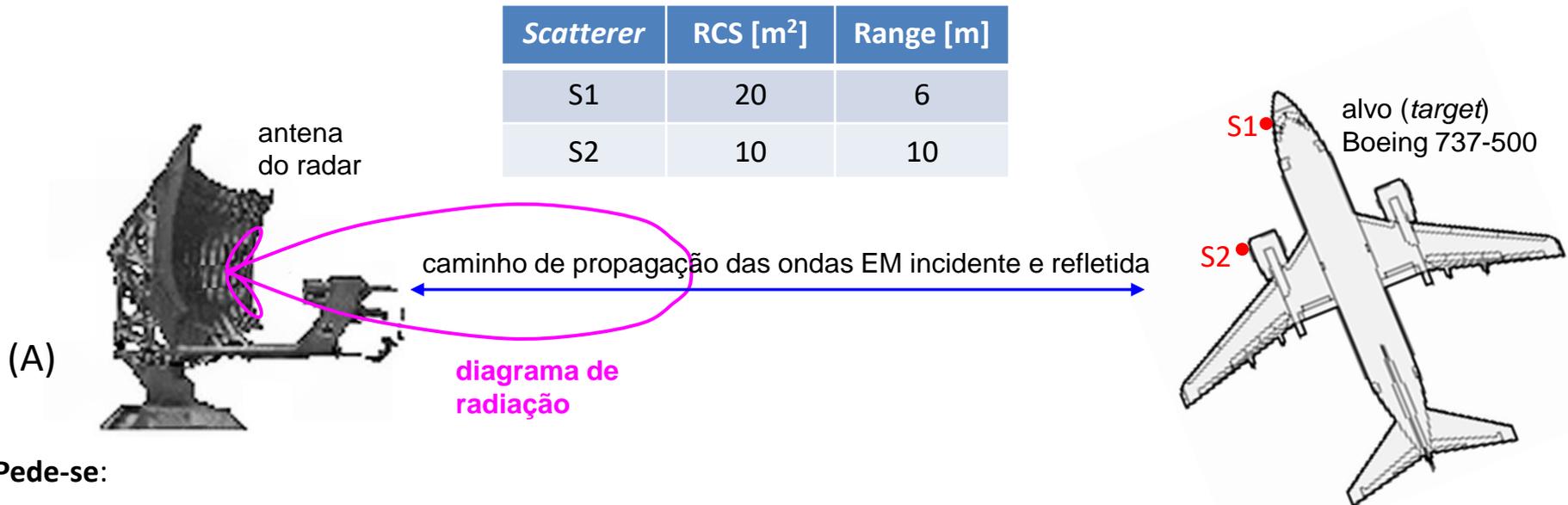
$$t_2 - t_1 = \frac{1}{\beta\tau_p} \quad \text{ou} \quad t_2 - t_1 = \frac{1}{B} \quad [\text{s}] \quad (80)$$

Multiplicando (80) por $c/2$ obtemos o *range resolution* do *stretch processing*:

$$\Delta R = r_2 - r_1 = \frac{c}{2B} \quad [\text{m}] \quad (81)$$

Compressão de pulso por *stretch processing*

Exemplo 8: Um radar *pulse-Doppler* adota *stretch processing*, operando na banda X. O diagrama de radiação de sua antena ilumina um Boeing 737-500, conforme mostrado em (A) abaixo. A tabela abaixo mostra o RCS na banda X e o *range* dos dois *scatterers* S1 e S2 na estrutura do Boeing 737-500 identificados pelos pontos **vermelhos** em (A) abaixo. A banda de varredura do pulso LFM é $B = 1$ [GHz] e a largura do pulso LFM é $\tau_p = 1$ [ms]. A largura adotada para a janela do *range* (distância máxima entre dois *scatterers* na fuselagem da aeronave) é de apenas $\Delta r_{0,\max} = 50$ [m], de modo que a largura de banda do espectro de $s_{\text{FI}}(t)$ (ver slide 116) poder ser processada pelo hardware do RX com banda mínima e, portanto, mínimo *stress* computacional. Uma janela retangular é aplicada à sequência $s_o[n]$ (ver slide 116).



Pede-se:

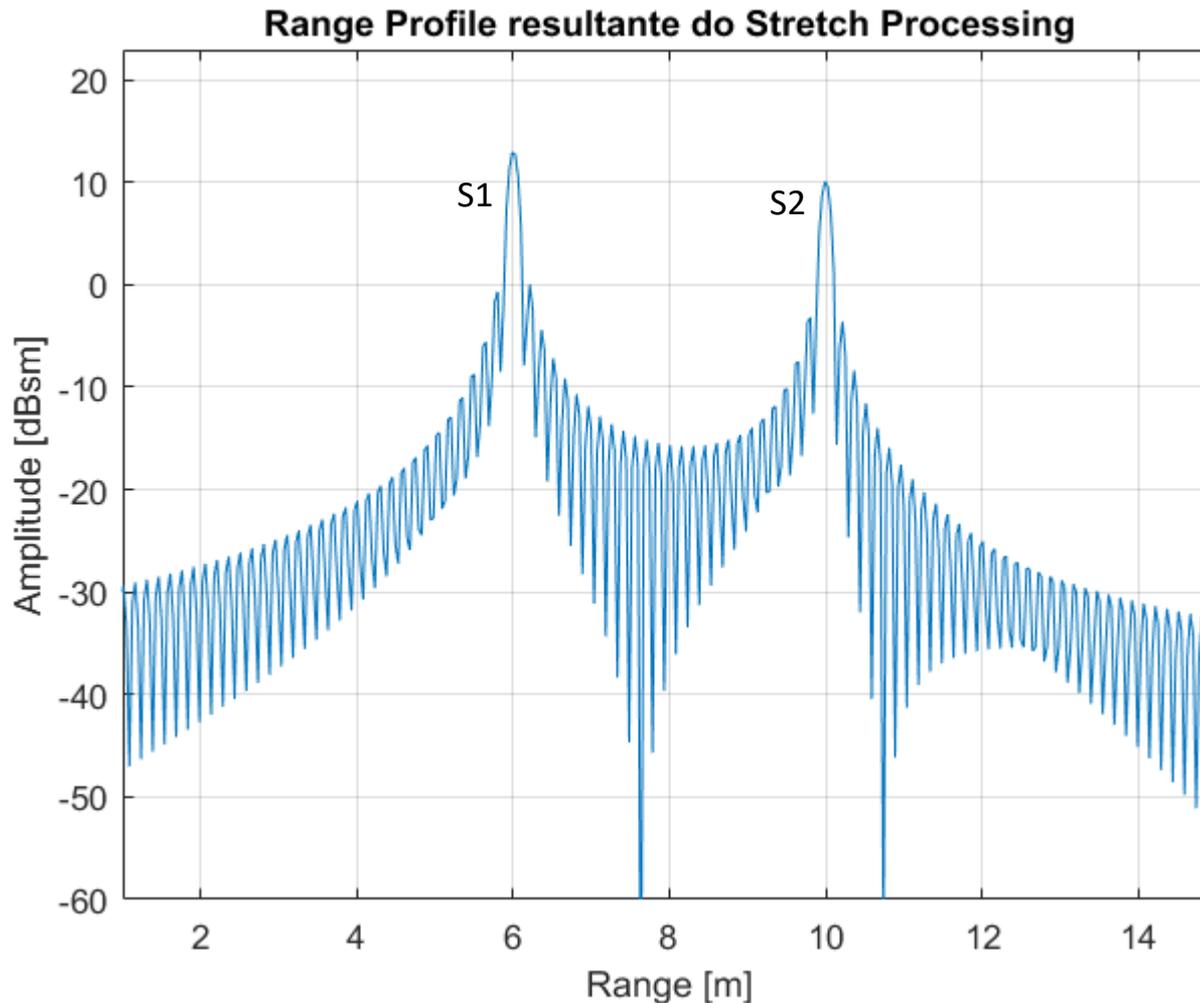
- Determine e plote o *range profile* $|S_o[k]|$ dos *scatterers* S1 e S2 na estrutura do Boeing 737-500 (ver slide 116).
- Determine numericamente o *range resolution* através da equação (81) e compare com o *range resolution* obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo na curva $|S_o[k]|$ que ocorre para o *scatterer* S2.
- Determine o fator de compressão de pulso ρ .
- Determine a largura de banda do espectro $|S_o[k]|$ de $s_{\text{FI}}(t)$ (ver slide 116) e compare com a banda B do pulso LFM.
- Determine o número mínimo N de pontos necessários na FFT do *stretch processing*.

Compressão de pulso por *stretch processing*

Solução:

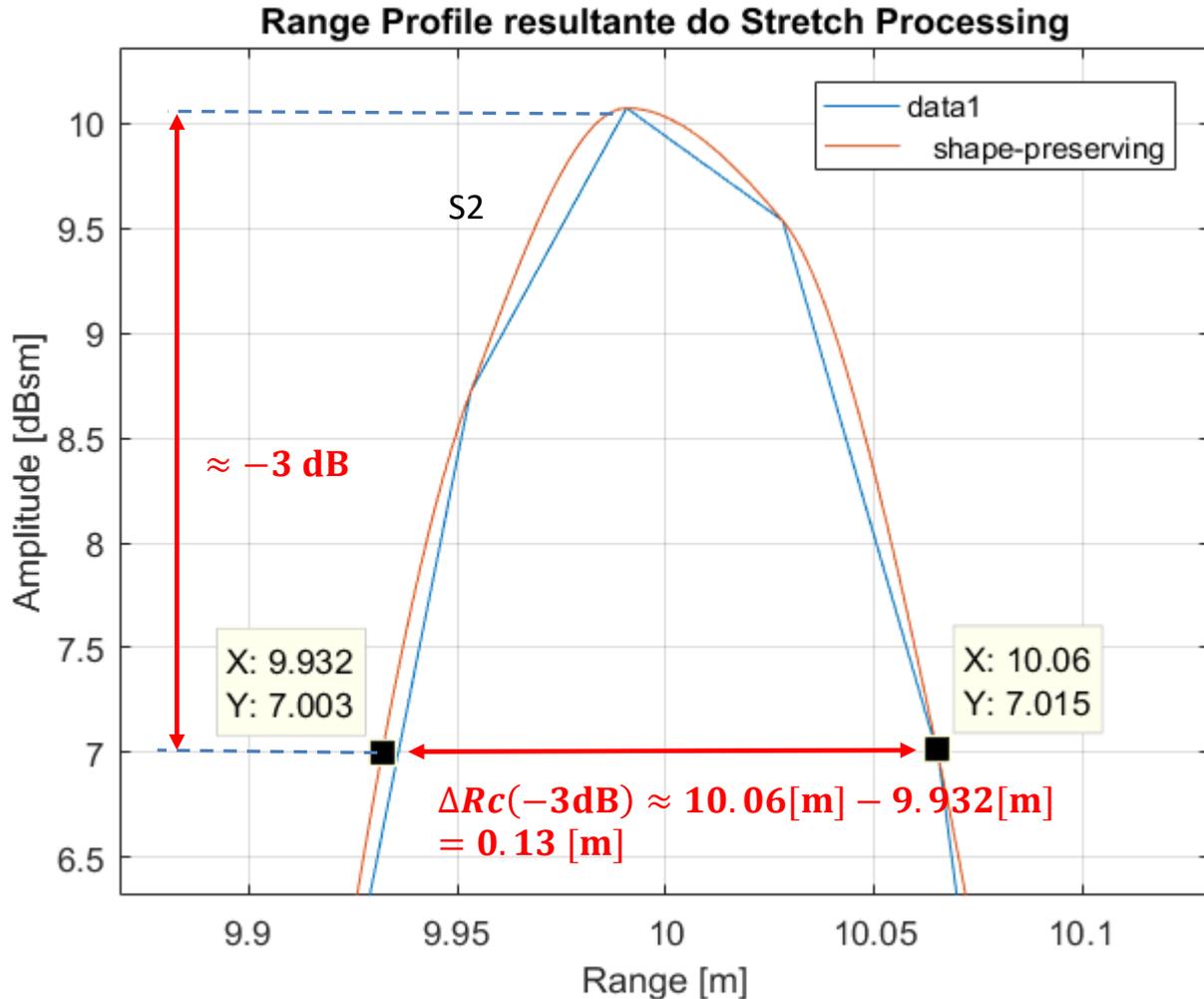
Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo8.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E8S123.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo8.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

(a) Usando o *script* Exemplo8.m e a equação (76) com a referência de tempo $t_{ref} = 0$ obtemos:



Compressão de pulso por *stretch processing*

(b) A partir do resultado em (a) obtemos:



Da equação (81) no slide 122 com $B = 1$ [GHz] e $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s], o *range resolution* ΔR_c do pulso comprimido resulta:

$$\Delta R_c = \frac{c}{2B} = 0.15 [\text{m}]$$

Do gráfico ao lado, o *range resolution* obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo na curva $|S_o[k]|$ que ocorre para o *scatterer* S2 resulta $\Delta R_c(-3\text{dB}) = 0.13$ [m], o que é coerente com o resultado da equação (81).

(c) Da equação (41) no slide 55, o *range resolution* ΔR obtido com o pulso não-comprimido de largura $\tau_p = 1$ [ms] resulta:

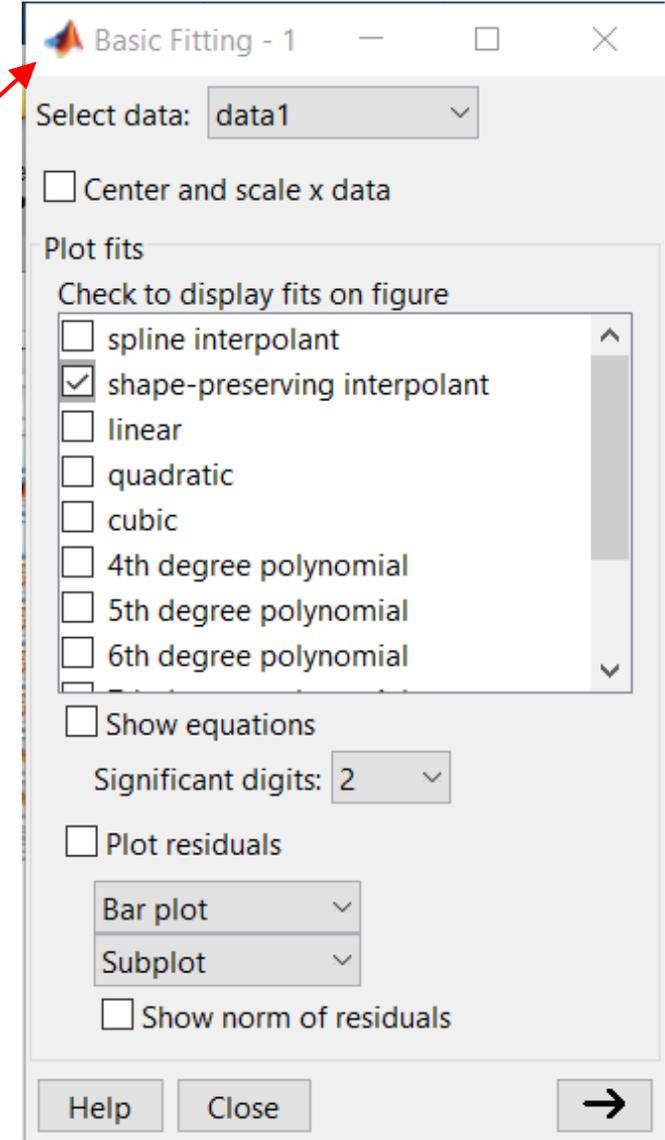
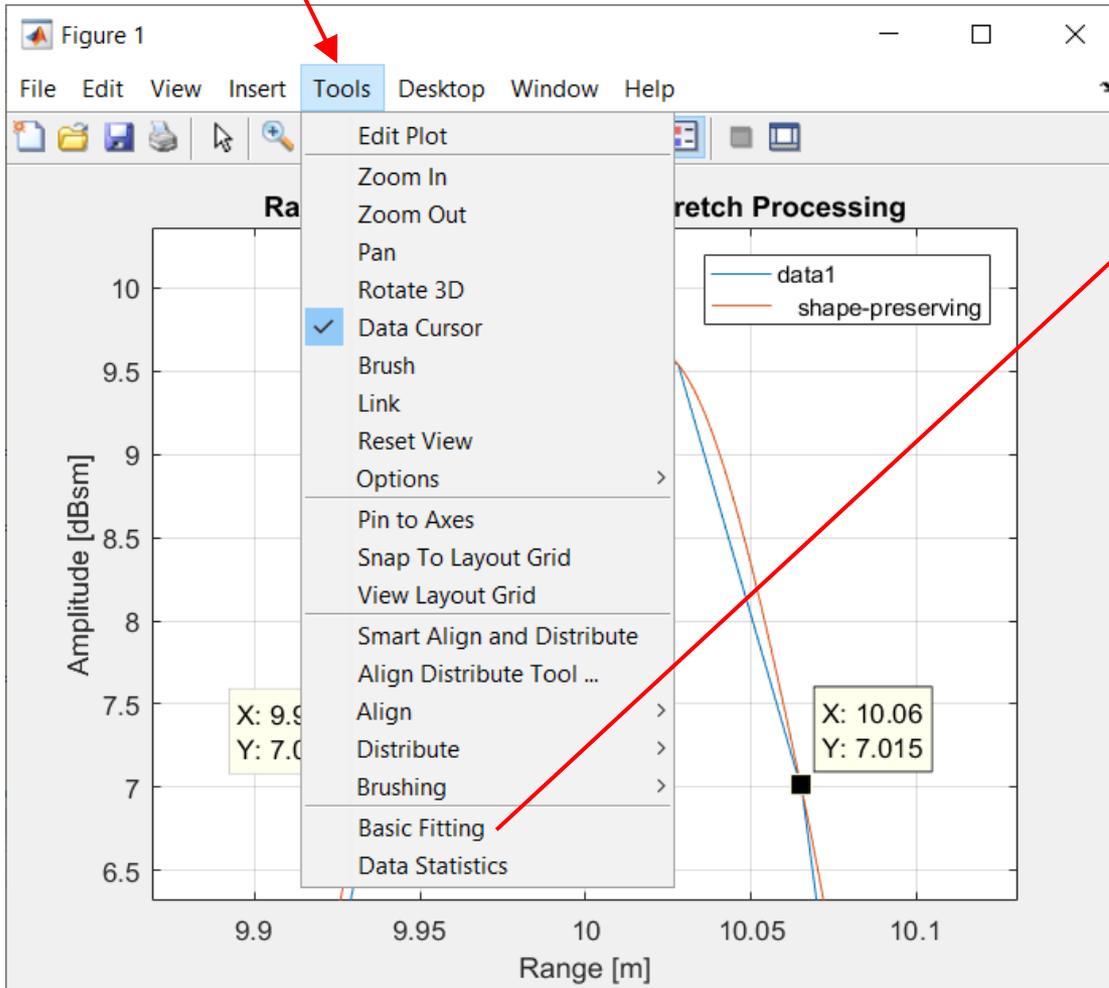
$$\Delta R = \frac{c\tau_p}{2} = 194.896 [\text{Km}]$$

O fator de compressão de pulso (que também é o fator de aumento da resolução de *range*) resulta:

$$\rho = \frac{\Delta R}{\Delta R_c} = 1 \times 10^6$$

Observação: Devido ao altíssimo fator de compressão ($\rho = 1 \times 10^6$ no caso em análise), os lobos dos máximos na curva $|S_o[k]|$ que ocorrem para cada *scatterer* resultam muito estreitos, e portanto com valores discretos de amplitude muito espaçados (curva “**data1**” no gráfico acima). É, portanto, necessário usar o recurso de *fitting* do Matlab para suavizar a curva e obter os pontos de -3 dB em torno dos máximos na curva $|S_o[k]|$ (curva “**shape-preserving**” no gráfico acima). A sequência de menus do Matlab para acionamento do recurso de *fitting* é indicada pelas setas **vermelhas** no próximo slide.

Compressão de pulso por *stretch processing*



Compressão de pulso por *stretch processing*

(d) A largura de banda $\Delta f_{i\max}$ do espectro $|S_o[k]|$ de $s_{\text{FI}}(t)$ (ver slide 116) é obtida da equação (75) para dois *scatterers* S1 e S2 com *ranges* r_1 e r_2 localizados nos extremos da janela do *range* de tamanho $\Delta r_{0\max} = 50$ [m] dada no enunciado:

$$r_1 = \frac{c}{2} \left(\frac{f_1}{\beta} + t_{ref} \right) \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{c}{2} \left(\frac{f_2}{\beta} + t_{ref} \right)$$

Subtraindo uma equação da outra, obtemos:

$$r_1 - r_2 = \frac{c}{2} \left(\frac{f_1}{\beta} + t_{ref} \right) - \frac{c}{2} \left(\frac{f_2}{\beta} + t_{ref} \right)$$

Que simplifica para:
$$r_1 - r_2 = \frac{c(f_1 - f_2)}{2\beta} \quad \text{ou} \quad r_2 - r_1 = \frac{c(f_2 - f_1)}{2\beta}$$

Ou, equivalentemente:
$$\Delta r_{0\max} = \frac{c \Delta f_{i\max}}{2\beta} = \frac{c \Delta f_{i\max} \tau_p}{2B}$$

Resolvendo para $\Delta f_{i\max}$:
$$\Delta f_{i\max} = \frac{2B \Delta r_{0\max}}{c \tau_p} \quad (82)$$

De (82), com $B = 1$ [GHz], $\Delta r_{0\max} = 50$ [m], $\tau_p = 1$ [ms] e $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s]:

$$\Delta f_{i\max} = \frac{2B \Delta r_{0\max}}{c \tau_p} = 0.334 \text{ [MHz]}$$

Note, portanto, a radical redução de $B/\Delta f_{i\max} = 2.998 \times 10^3$ vezes da banda operacional necessária para o hardware quando a largura $\Delta f_{i\max} = 0.334$ [MHz] do espectro de $s_{\text{FI}}(t)$ é comparada com a largura de banda $B = 1$ [GHz] do pulso LFM transmitido pelo TX.

(e) A distância de frequência Δf entre as amostras no domínio frequência que resultam da FFT é dada pela equação (78): $\Delta f = 1/\tau_p$. Como em toda operação envolvendo uma FFT, o bloco “FFT” no slide 116 adota uma janela de N amostras na sequência $s_o[n]$ em sua entrada e resulta em sua saída um espectro discreto $|S_o[k]|$ limitado em suas extremidades às frequências $\pm \frac{N \Delta f}{2}$, sendo N uma potência inteira de 2.

Conseqüentemente, a máxima frequência no espectro $|S_o[k]|$ é $\frac{N \Delta f}{2}$.

Para que a banda de frequências $\Delta f_{i \max}$ no espectro $|S_o[k]|$ possa ser representada pela FFT é necessário que $\frac{N \Delta f}{2}$ seja maior que a banda $\Delta f_{i \max}$ dada por (82), sendo $\Delta f_{i \max}$ a banda de frequência no espectro $|S_o[k]|$ de $s_{FI}(t)$ resultante de dois *scatterers* S_1 e S_2 com *ranges* r_1 e r_2 localizados nos extremos da janela do *range* de tamanho $\Delta r_{0 \max}$. Esta condição é expressa pela equação abaixo:

$$\frac{N \Delta f}{2} \geq \Delta f_{i \max} = \frac{2B \Delta r_{0 \max}}{c \tau_p}$$

Usando (78) na equação acima e resolvendo para N obtemos:

$$N \geq \frac{4B \Delta r_{0 \max}}{c} \quad (83)$$

De (83), com $B = 1$ [GHz], $\Delta r_{0 \max} = 50$ [m] e $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] :

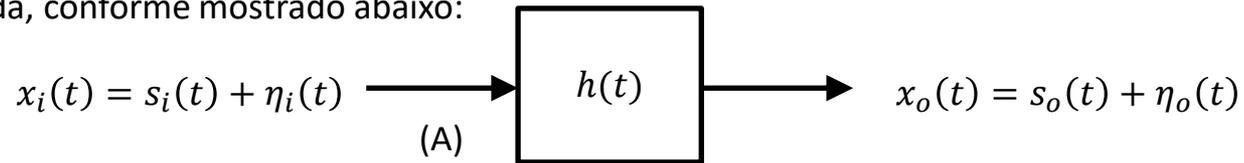
$$N \geq \frac{4B \Delta r_{0 \max}}{c} = 667.128$$

Como o número de pontos N da FFT deve ser uma potência inteira de 2, a próxima potência inteira de 2 maior que o resultado acima é $N = 2^{10} = 1024$.

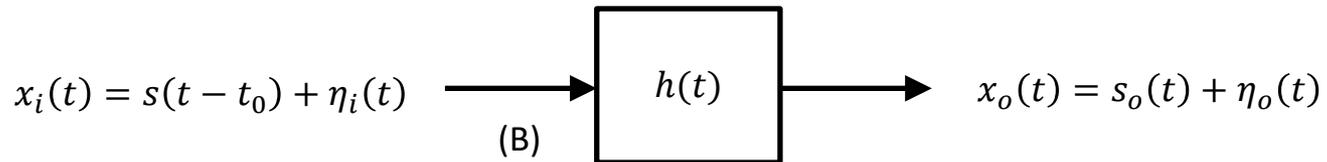
Compressão de pulso por *matched filter*

Aplicamos o conceito de *matched filter* desde o início do Cap I.7, conforme vimos no Exemplo 6 e no Exemplo 7, no entanto, até agora, nenhuma definição formal do *matched filter* foi feita. Esta seção dedica-se à formalização do conceito de *matched filter*, que é talvez a técnica de compressão intrapulso mais comumente adotada em sistemas de radar.

Um *matched filter* é um filtro linear com uma função de transferência $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ que maximiza a relação sinal-ruído (SNR – *signal to noise ratio*) de sua saída $x_o(t) = s_o(t) + \eta_o(t)$ resultante da excitação $x_i(t) = s_i(t) + \eta_i(t)$ aplicada à sua entrada, onde $h(t)$ é a resposta ao impulso do *matched filter*, $\mathcal{F}\{\cdot\}$ é operador Transformada de Fourier, $s_o(t)$ e $\eta_o(t)$ são respectivamente o sinal e o ruído resultantes na saída do *matched filter* e $s_i(t)$ e $\eta_i(t)$ são respectivamente o sinal e o ruído aplicados à sua entrada, conforme mostrado abaixo:



Consideremos que o TX do radar emite um sinal $s(t)$, que se reflete em um alvo e retorna ao RX do radar na forma de eco $s_i(t) = s(t - t_0)$, sendo o *round trip time* (atraso) $t_0 = 2r_0/c$ [s] proporcional ao *range* r_0 [m] do alvo que originou o eco (ver slides 4 e 5 do Cap I.1). Nesta situação, o diagrama em (A) acima torna-se:



sendo

$$s_o(t) = s(t - t_0) * h(t) \quad (84)$$

$$\eta_o(t) = \eta_i(t) * h(t) \quad (85)$$

onde “* ” denota a operação de convolução. Os ruídos $\eta_i(t)$ e $\eta_o(t)$ são aproximações de um processo estocástico estacionário (ver https://en.wikipedia.org/wiki/Stochastic_process e https://en.wikipedia.org/wiki/Stationary_process), e, portanto, necessitam de um tratamento matemático adequado à processos aleatórios. Neste contexto, a potência média de ruído na saída do *matched filter* é dada por:

$$P_n = \mathbb{E}\{|\eta_o(t)|^2\} \text{ [W]} \quad (86)$$

onde $\mathbb{E}\{\cdot\}$ é o operador que retorna a esperança estatística (= valor esperado) do seu argumento $\{\cdot\}$.

Compressão de pulso por *matched filter*

A potência instantânea de pico do sinal na saída do *matched filter* é dada por:

$$P_s = |s_o(t_0)|^2 \quad [\text{W}] \quad (87)$$

A SNR de pico na saída do *matched filter* é obtida de (86) e (87):

$$SNR = \frac{P_s}{P_n} = \frac{|s_o(t_0)|^2}{\mathbb{E}\{|\eta_o(t)|^2\}} \quad (88)$$

O espectro $S_o(f) = \mathcal{F}\{s_o(t)\}$ do sinal $s_o(t)$ na saída do *matched filter* é dado por (ver slide 32 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_Aulas9a12_27042020.pdf com $\omega = 2\pi f$):

$$S_o(f) = H(f)S_i(f) \quad (89)$$

onde $S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}$. A densidade espectral de potência $N_i(f)$ do ruído $\eta_i(t)$ na entrada do *matched filter* é obtida da Transformada de Fourier da função de auto-correlação de $\eta_i(t)$ (ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/FAPSD.pdf>):

$$N_i(f) = \mathcal{F}\{\mathbb{E}\{\eta_i(t + \tau)\eta_i^*(t)\}\} \quad [\text{W/Hz}] \quad (90)$$

onde $\{\cdot\}^*$ é o operador que retorna o valor complexo conjugado de seu argumento. De mesma forma, a densidade espectral de potência $N_o(f)$ do ruído $\eta_o(t)$ na saída do *matched filter* é obtida da Transformada de Fourier da função de auto-correlação de $\eta_o(t)$:

$$N_o(f) = \mathcal{F}\{\mathbb{E}\{\eta_o(t + \tau)\eta_o^*(t)\}\} \quad [\text{W/Hz}] \quad (91)$$

A densidade espectral de potência de ruído $N_i(f)$ na entrada do *matched filter* relaciona-se com a densidade espectral de potência de ruído $N_o(f)$ na saída do *matched filter* através de:

$$N_o(f) = |H(f)|^2 N_i(f) \quad [\text{W/Hz}] \quad (92)$$

Compressão de pulso por *matched filter*

Integrando (92) sobre todo o domínio frequência f obtemos a potência média P_n de ruído na saída do *matched filter*, dada por:

$$P_n = \int_{-\infty}^{\infty} N_o(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 N_i(f) df \quad [\text{W}] \quad (93)$$

Observe que, em consequência do Teorema de Parseval (<https://www.gaussianwaves.com/2020/09/parsevals-theorem-derivation/>), a potência P_n obtida de (93) no domínio frequência resulta o mesmo valor obtido de (86) no domínio tempo.

O espectro $S_o(f) = \mathcal{F}\{s_o(t)\}$ do sinal $s_o(t)$ na saída do *matched filter* dado por (89) determina a potência instantânea de pico P_s do sinal na saída do *matched filter* dada por (87) através da seguinte relação:

$$P_s = |s_o(t_0)|^2 = \left| \mathcal{F}^{-1}\{S_o(f)\} \Big|_{t=t_0} \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} S_o(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S_i(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2 \quad (94)$$

A SNR de pico na saída do *matched filter* é obtida de (94) e (93), e resulta no mesmo valor obtido de (88):

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S_i(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 N_i(f) df} \quad (95)$$

O ruído $\eta_i(t)$ é basicamente ruído térmico originado no *front-end* analógico do RX do radar. Neste contexto, da equação $S_i = FkT_0B \text{SNR}_o$ (14) do slide 35 do Cap I.4, com $\text{SNR}_o = S_o/N_o$, $G_{\text{front_end}} = S_o/S_i$ e $N_i(f) = N_o/B$, obtemos $N_i(f) = FkT_0 G_{\text{front_end}} [\text{W/Hz}]$, sendo F o fator de ruído do *front-end* e $G_{\text{front_end}} = S_o/S_i$ o ganho do *front-end*. $k = 1.38064852 \times 10^{-23} [\text{J/K}]$ é a constante de Boltzmann e $T_0 = 290\text{K}$. Nesta situação, (95) é reescrita como:

$$\text{SNR} = \frac{P_s}{P_n} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S_i(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{FkT_0 G_{\text{front_end}} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} \quad (96)$$

Compressão de pulso por *matched filter*

Para maximizar a SNR dada por (96) vamos aplicar ao numerador de (96) a Desigualdade de Cauchy-Schwarz (https://en.wikipedia.org/wiki/Cauchy%E2%80%93Schwarz_inequality), expressa por (97):

$$\left| \int_a^b X(f)Y(f) df \right|^2 \leq \left(\int_a^b |X(f)|^2 df \right) \left(\int_a^b |Y(f)|^2 df \right) \quad (97)$$

A maximização ocorre quando (97) se torna uma igualdade, e para que a igualdade ocorra é necessário que a condição $X(f) = \kappa Y^*(f)$ seja obedecida, onde κ é uma constante complexa arbitrária e $\{\cdot\}^*$ é o operador que retorna o valor complexo conjugado de seu argumento. Aplicando a condição $X(f) = \kappa Y^*(f)$ ao numerador de (96) com $X(f) = H(f)$ e $Y(f) = S_i(f) e^{j2\pi f t_0}$, sendo $H(f) = \kappa S_i^*(f) e^{-j2\pi f t_0}$ para que a condição seja obedecida, obtemos:

$$\begin{aligned} SNR_{\max} &= \frac{P_s}{P_n} = \frac{\left| \int_{-\infty}^{\infty} H(f) S_i(f) e^{j2\pi f t_0} df \right|^2}{FkT_0 G_{front_end} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df \int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f) e^{j2\pi f t_0}|^2 df}{FkT_0 G_{front_end} \int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df} = \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f) e^{j2\pi f t_0}|^2 df}{FkT_0 G_{front_end}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (|S_i(f)| |e^{j2\pi f t_0}|)^2 df}{FkT_0 G_{front_end}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2 df}{FkT_0 G_{front_end}} \end{aligned} \quad (98)$$

onde, por simplicidade, a constante complexa arbitrária κ foi assumida ser um ganho unitário. Importante notar que o valor máximo SNR_{\max} dado por (98) é válido somente quando a função de transferência $H(f) = \mathcal{F}\{h(t)\}$ do *matched filter* mantiver a relação dada por (99) com o espectro $S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}$ do sinal $s_i(t)$ em sua entrada:

$$H(f) = \kappa S_i^*(f) e^{-j2\pi f t_0} \quad (99)$$

sendo κ uma constante complexa arbitrária. Note que a magnitude de (99) estabelece a condição $|H(f)| = |\kappa S_i^*(f) e^{-j2\pi f t_0}|$ que simplifica para $|H(f)| = |\kappa| |S_i(f)|$, ou seja, a forma da curva de resposta em frequência $|H(f)|$ do *matched filter* deve ser igual à forma da curva da magnitude $|S_i(f)|$ do espectro $S_i(f) = \mathcal{F}\{s_i(t)\}$ do sinal $s_i(t)$ na entrada do filtro. As curvas $|H(f)|$ e $|S_i(f)|$ diferem apenas de um fator de amplitude $|\kappa|$. Daí o nome *matched filter* (filtro casado).

Aplicando a Transformada de Fourier Inversa à (99) obtemos a resposta ao impulso $h(t)$ do *matched filter* :

$$\begin{aligned}
 h(t) &= \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\kappa S_i^*(f) e^{-j2\pi f t_0}\} = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} S_i^*(f) e^{-j2\pi f t_0} e^{j2\pi f t} df = \\
 &= \kappa \int_{-\infty}^{\infty} S_i^*(f) e^{-j2\pi f (t_0 - t)} df = \kappa \int_{-\infty}^{\infty} [S_i(f) e^{j2\pi f (t_0 - t)}]^* df = \\
 &= \kappa \left[\int_{-\infty}^{\infty} S_i(f) e^{j2\pi f (t_0 - t)} df \right]^* = \kappa s_i^*(t_0 - t)
 \end{aligned} \tag{100}$$

Ou seja, a relação entre a resposta ao impulso $h(t)$ do *matched filter* e o sinal $s_i(t)$ ao qual o filtro é casado é tal que $h(t)$ corresponde ao conjugado de $s_i(t)$ escalonado por κ , invertido no tempo (em consequência do $-t$) e deslocado (atrasado) no tempo de t_0 , conforme expresso pela equação (100).

Dando continuidade à definição do valor máximo SNR_{\max} dado por (98), vamos aplicar o Teorema de Parseval (<https://www.gaussianwaves.com/2020/09/parsevals-theorem-derivation/>) ao numerador de (98):

$$SNR_{\max} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |S_i(f)|^2 df}{FkT_0 G_{front_end}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt}{FkT_0 G_{front_end}} \tag{101}$$

O numerador de (101) representa a energia $E_i = \int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt$ [J] do sinal na entrada do *matched filter* que ocorre em consequência do eco que retorna ao RX do radar após se refletir em um alvo com RCS σ [m²]. Se multiplicarmos a equação (7) do slide 31 do Cap I.4 pela largura τ_p do pulso emitido pelo TX obtemos a energia E_{ant} deste referido eco recebido pela antena do radar:

$$E_{\text{ant}} = \frac{\sigma P_{\text{TX}} G^2 \lambda^2 \tau_p}{(4\pi)^3 r^4} \text{ [J]} \tag{102}$$

Compressão de pulso por *matched filter*

Ocorre que, com base no diagrama de blocos no slide 2 do Cap I.1, observa-se que $E_{\text{ant}} = E_i / G_{\text{front_end}}$. A partir desta observação, obtemos de (101) e (102):

$$SNR_{\text{max}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |s_i(t)|^2 dt}{FkT_0 G_{\text{front_end}}} = \frac{E_i}{FkT_0 G_{\text{front_end}}} = \frac{E_{\text{ant}}}{FkT_0} = \frac{\sigma P_{\text{TX}} G^2 \lambda^2 \tau_p}{FkT_0 (4\pi)^3 r^4} \quad (103)$$

onde σ [m²] é o RCS do alvo, P_{TX} [W] é a potência de pico do TX do radar, G é o ganho (em vezes) da antena do radar, $\lambda = c/f$ [m] é o comprimento de onda na frequência f [Hz] de operação do radar, $c = 2.9979246 \times 10^8$ [m/s] é a velocidade de propagação da onda EM no espaço livre, τ_p [s] é a largura do pulso de RF (*burst*) irradiado pela antena do TX do radar, F é o fator de ruído do *front-end* analógico do RX, $k = 1.38064852 \times 10^{-23}$ [J/K] é a constante de Boltzmann, $T_0 = 290\text{K}$ é a temperatura padrão em que o fator de ruído F é medido (ver <http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SLAA652.pdf>) e r [m] é o *range* do alvo.

Note que (103) evidencia a razão pela qual o TX de um sistema de radar deve evitar transmitir uma *waveform* pulsada com uma largura de pulso τ_p muito pequena: Um pulso de largura τ_p muito pequena degrada a SNR na saída do *matched filter*. Sem falar aqui dos problemas adicionais de excessiva largura de espectro de uma *waveform* transmitida com τ_p muito pequeno, conforme já discutido no slide 57 do Cap I.6.

Exemplo 9: Um radar *pulse-Doppler* opera na banda L na frequência $f = 1.2$ [GHz]. O TX do radar emite pulsos LFM (*chirp*) de duração $\tau_p = 22$ [μ s] com potência de pico $P_{\text{TX}} = 0.5$ [kW]. A antena do radar possui um ganho $G_{\text{dB}} = 26.4$ [dBi] e seu diagrama de radiação ilumina um alvo com RCS $\sigma = 10$ [m²] situado a um *range* $r = 60$ [km]. O RX do radar adota compressão de pulso através de *matched-filter* casado ao pulso LFM. O *noise figure* do *front end* analógico do RX é $NF = 0.4$ [dB]. **Pede-se:** Determine a SNR do sinal resultante na saída do *matched filter* do RX.

Solução: $G = 10^{\frac{G_{\text{dB}}}{10}} = 436.516$ [vezes] $F = 10^{\frac{NF}{10}} = 1.096$ [vezes] $\lambda = c/f = 0.25$ [m]

Da equação (103): $SNR_{\text{max}} = 11.587$ [vezes]

Convertendo para [dB]: $SNR_{\text{max}}[\text{dB}] = 10 \log(SNR_{\text{max}}) = 10.64$ [dB]

Compressão de pulso por *matched filter*

Para obter graficamente o *range resolution* resultante da compressão de pulso efetuada por um *matched filter* é necessário determinar e plotar o sinal $s_o(t)$ na saída do *matched filter* e identificar os pontos de -3 dB em torno do máximo na curva de $s_o(t)$, conforme já fizemos nos exemplos anteriores. O sinal $s_o(t)$ é obtido passando a equação (89) do domínio frequência para o domínio tempo:

$$S_o(f) = H(f)S_i(f) \quad \Leftrightarrow \quad s_o(t) = \mathcal{F}^{-1}\{S_o(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{h(t)\}\mathcal{F}\{s_i(t)\}\} \quad (104)$$

Compressão de pulso por *matched filter*

Exemplo 10: Um radar *pulse-Doppler* opera na banda X e o diagrama de radiação de sua antena ilumina 3 aeronaves que voam em formação, conforme mostrado em (A) abaixo. A tabela abaixo mostra o RCS na banda X e o *range* de cada alvo (aeronave) em um determinado instante. O TX do radar emite pulsos $s_{TX}(t)$ (*bursts* de RF) de duração $\tau_p = 100$ [μ s] do tipo LFM (*linear frequency modulation*), também denominado pulso *chirp*, sendo $s_{TX}(t)$ dado por:

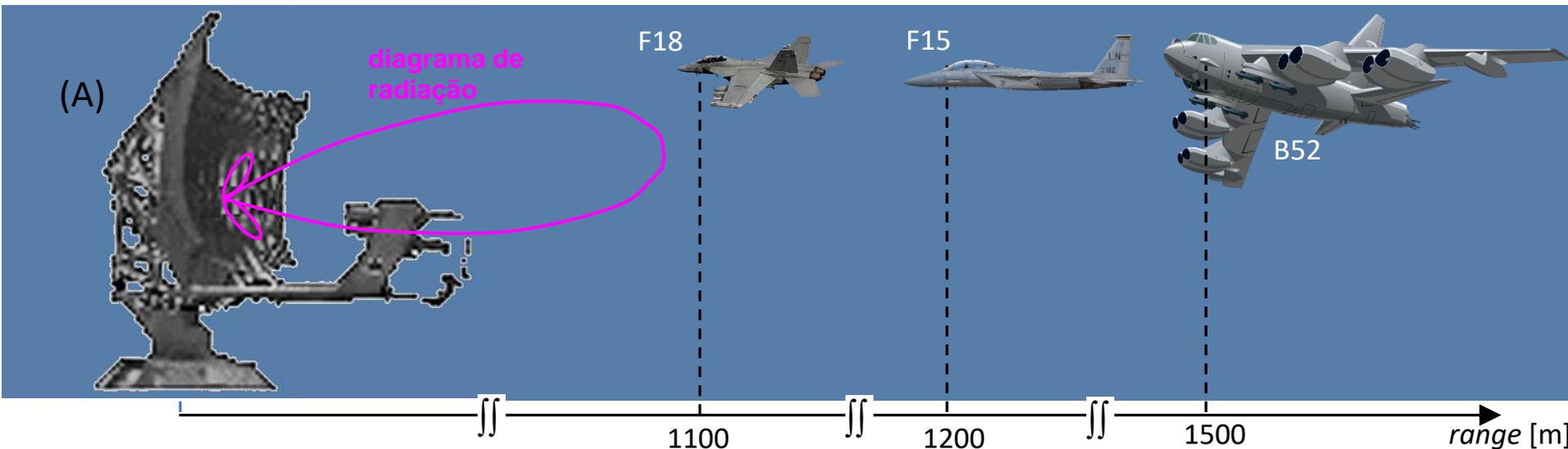
$$s_{TX}(t) = e^{j2\pi\left(f_0 t + \frac{\beta}{2} t^2\right)} \text{ [V]} \quad 0 < t < \tau_p \text{ [s]}$$

onde f_0 [Hz] é a frequência do *burst* de RF e $\beta = B/\tau_p$ [Hz/s] é a declividade da rampa de frequência do pulso *chirp*, a qual varre a banda $B = 20$ [MHz] ao longo da duração τ_p pulso.

O RX do radar adota compressão de pulso através de *matched-filter* casado ao pulso LFM $s_{TX}(t)$, e aplica janela retangular em uma cópia do sinal $s_{TX}(t)$ gravada na memória de seu hardware para efeito de determinar a função de transferência $H(f) = \mathcal{F}^*\{s_{TX}(t)\}$ do *matched filter*.

Alvo	RCS [m ²]	Range [m]
F18	1	1100
F15	10	1200
B52	100	1500

Pede-se: (a) Determine e plote o *range profile* $s_o(t)$ deste cenário operacional a partir da equação (104). (b) Com base no resultado em (a) determine o *range resolution* resultante da compressão de pulso obtida pelo *matched filter* a partir dos pontos de -3 dB em torno do máximo na curva de $s_o(t)$ que ocorre para o alvo “B52”. (c) Determine o fator de compressão de pulso ρ .

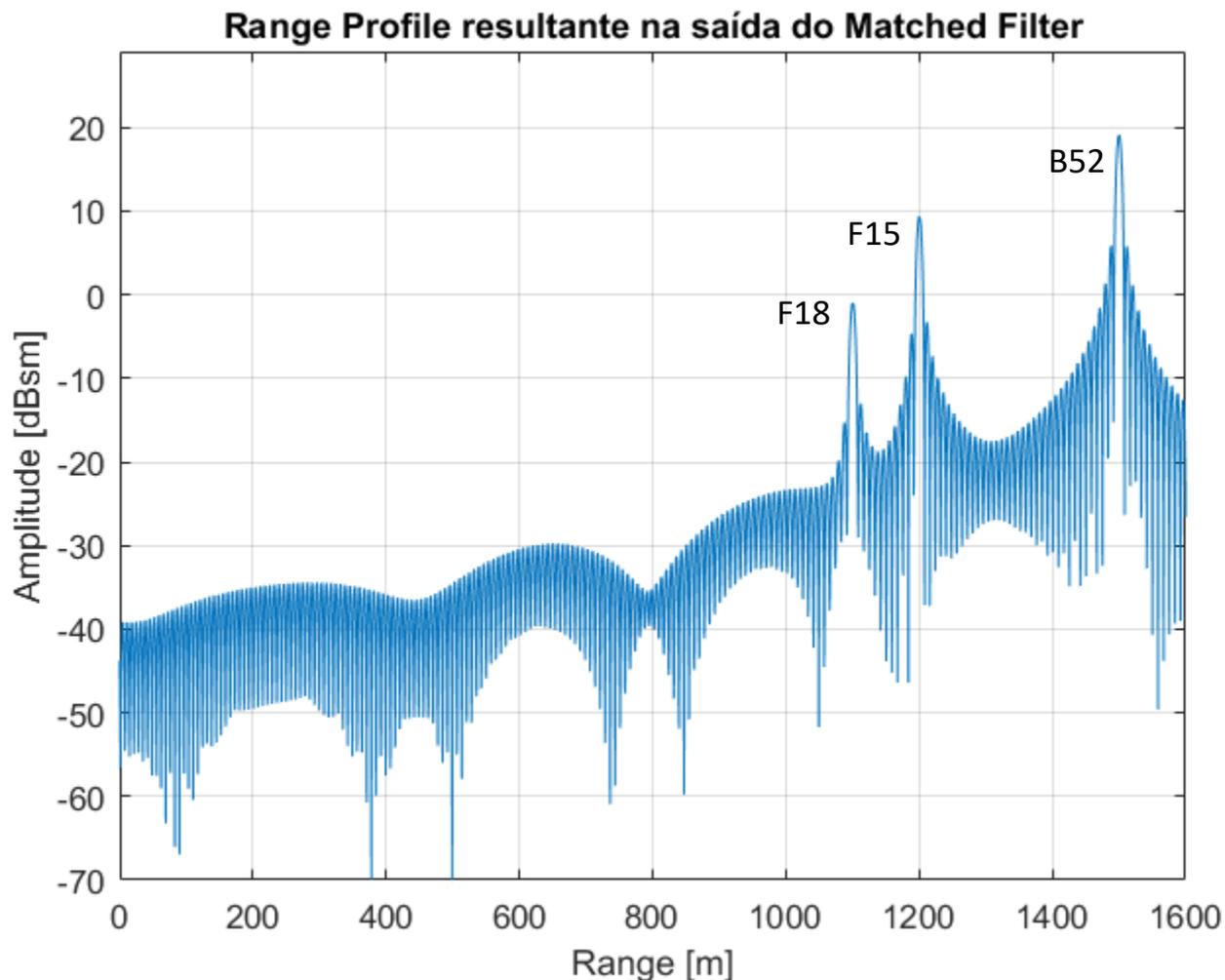


Compressão de pulso por *matched filter*

Solução:

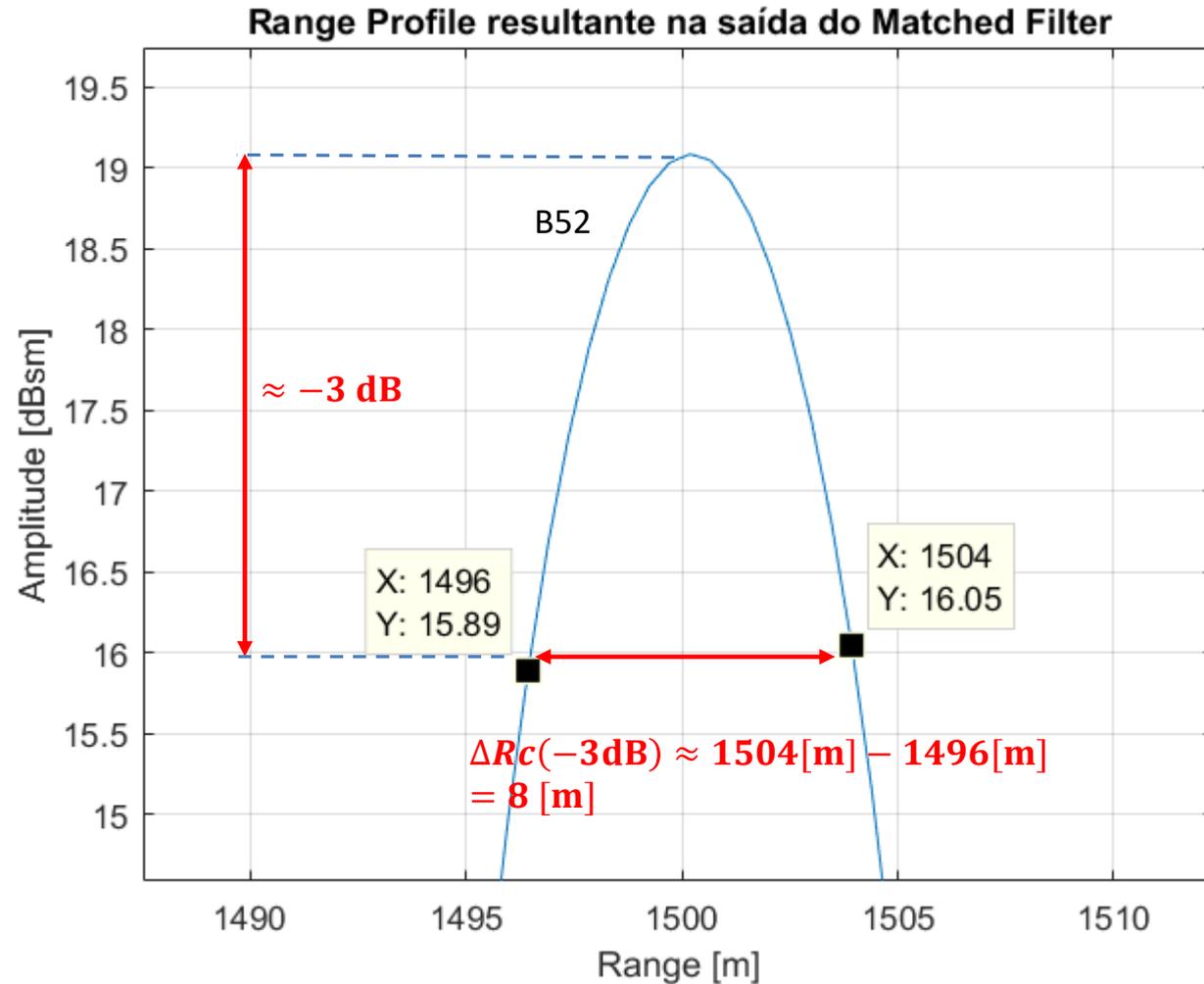
Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo10.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E10S136.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo10.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

(a) Usando o *script* Exemplo10.m obtemos:



Compressão de pulso por *matched filter*

(b) A partir do resultado em (a) obtemos:



(c) Da equação (41) no slide 55, o *range resolution* ΔR obtido com o pulso não-comprimido de largura $\tau_p = 100 [\mu\text{s}]$ resulta:

$$\Delta R = \frac{c\tau_p}{2} = 14.99 [\text{Km}]$$

Do gráfico ao lado, o *range resolution* obtido dos pontos de -3 dB em torno do máximo na curva de $s_o(t)$ que ocorre para o alvo “B52” resulta $\Delta R_{c(-3\text{dB})} = 8 [\text{m}]$.

O fator de compressão de pulso (que também é o fator de aumento da resolução de *range*) resulta:

$$\rho = \frac{\Delta R}{\Delta R_{c(-3\text{dB})}} = 1.874 \times 10^3$$

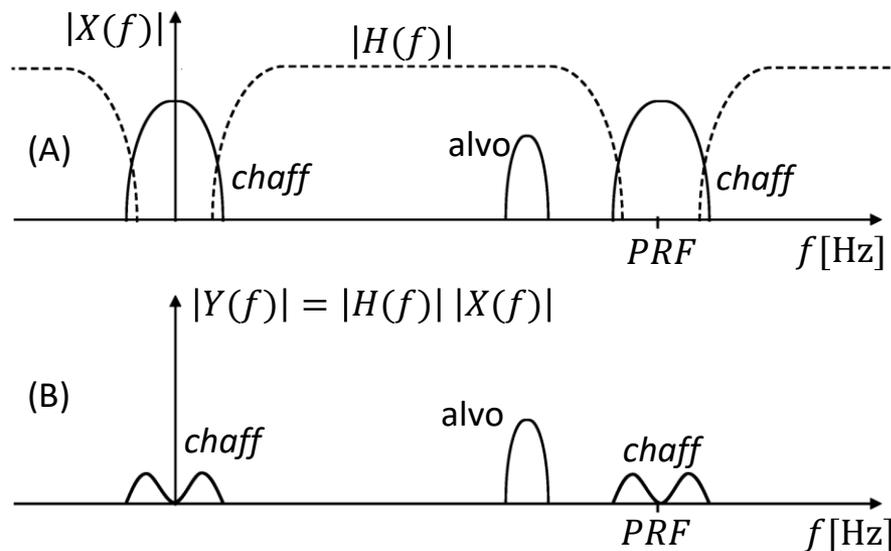
Filtro MTI (*moving target indication*)

Contramedidas eletrônicas (*Electronic Countermeasures - ECM*), modernamente denominado de EA (*Electronic Attack* – ver slides 2 a 10 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_1.pdf), são cruciais para reduzir a probabilidade de sucesso no ataque de mísseis antiaéreos lançados contra aeronaves iluminadas pelo radar do míssil.

Dentre estas contramedidas, o *chaff* é uma das mais veteranas técnicas de EA, sendo usada com sucesso desde a WW2 até os dias de hoje para proteção de aeronaves (<https://www.fab.mil.br/noticias/mostra/34935/KC-390%20-%20KC-390%20Millennium%20realiza%20ensaio%20in%3%A9dito%20de%20lan%3%A7amento%20de%20chaff%20e%20flare>).

O *chaff* engoda o radar de mísseis antiaéreos, desviando o míssil do alvo através de uma nuvem de partículas de alumínio, ou de fibra de vidro/plástico metalizadas, lançada no ar pela aeronave que está sob ataque. A nuvem de partículas lançada no ar gera inúmeros ecos da onda EM nela incidente, onda que foi irradiada pela antena do TX do radar do míssil, dificultando a detecção do alvo pelo RX do radar do míssil (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Chaff_\(countermeasure\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Chaff_(countermeasure))).

No entanto, após ser lançado, o *chaff* rapidamente perde velocidade em relação à aeronave que o lançou devido ao arrasto aerodinâmico das partículas metálicas. Isto estabelece um padrão no espectro $X(f)$ do sinal recebido no RX, em que o desvio Doppler dos ecos originados no *chaff* é similar ao desvio Doppler dos ecos do *clutter* estático (desvio Doppler nulo), sendo o desvio Doppler do eco da aeronave alvo do míssil maior que o do *chaff*, conforme $|X(f)|$ mostrado em (A) abaixo. É neste contexto que o filtro MTI (*moving target indication*), com função de transferência $H(f)$, filtra os ecos do *chaff* de

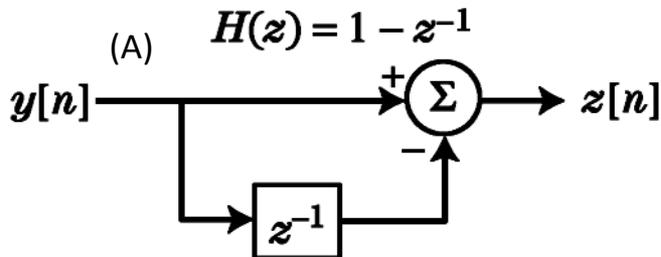


frequência próxima de zero, resultando em sua saída $Y(f)$ um espectro em que as componentes espectrais originadas no eco do *chaff* são atenuadas, enquanto que as componentes espectrais originadas no eco do alvo não são afetadas em magnitude, conforme mostrado em (B) ao lado.

Com base no desvio Doppler da onda EM de cada eco, a filtragem MTI maximiza a probabilidade de que o RX do radar do míssil detecte a aeronave-alvo, a menos que a aeronave-alvo esteja usando técnicas do tipo JAFF, em que o TX de um *jammer* na aeronave-alvo ilumina a nuvem de *chaff* com uma onda EM de mesmo desvio Doppler da onda EM refletida na aeronave (ver [https://en.wikipedia.org/wiki/Chaff_\(countermeasure\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Chaff_(countermeasure))).

Filtro MTI (*moving target indication*)

Um filtro MTI é um filtro digital FIR (https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_impulse_response) passa-alta, operando no domínio tempo discreto n com um intervalo $T[s]$ entre amostras igual ao PRI (*pulse repetition interval*) do radar (ver slides 4 e 5 do Cap I.1), conforme mostrado em (A) abaixo para um filtro MTI de 1ª ordem, também denominado de *two sequential pulses canceller*.



Note em (A) que, se os ecos se originam da sequência de pulsos na onda EM do TX refletida em um alvo estático, então a amplitude e a fase da sequência de amostras IQ na entrada $y[n]$ do filtro MTI de 1ª ordem serão todas iguais, cada amostra IQ representando a amplitude e a fase da onda EM do eco do respectivo pulso transmitido pelo TX em um determinado instante.

Nesta situação, cada dois pulsos adjacentes no tempo representados por duas amostras IQ adjacentes no tempo discreto n se cancelarão mutuamente no somador Σ e a saída $z[n]$ será nula. Isto ocorre porque o bloco z^{-1} transfere para a sua saída a amostra IQ em sua entrada somente após ter transcorrido um atraso de $T[s]$, e, sendo a amostra IQ anterior igual à atual, então elas se cancelarão mutuamente no somador Σ em consequência do sinal “-” na entrada inferior de Σ (ver slide 21 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_aula23a26_25062020.pdf).

No entanto, se os ecos se originam da sequência de pulsos na onda EM do TX refletida em um alvo móvel, então a fase da sequência de amostras IQ na entrada $y[n]$ do filtro MTI de 1ª ordem serão diferentes para cada dois pulsos (cada duas amostras IQ) adjacentes no tempo. Nesta situação, cada dois pulsos adjacentes não se cancelarão mutuamente no somador Σ e a saída $z[n]$ não será nula. Daí o nome *two sequential pulses canceller*, em que cada dois pulsos adjacentes são cancelados para ecos de alvos estáticos mas não são cancelados para ecos de alvos em movimento.

A resposta em frequência $H(f)$ do filtro MTI de 1ª ordem é obtida fazendo-se $z = e^{j2\pi fT}$ em $H(z)$ (ver slides 51 a 63 de http://www.fccdecastro.com.br/pdf/SS_aula23a26_25062020.pdf):

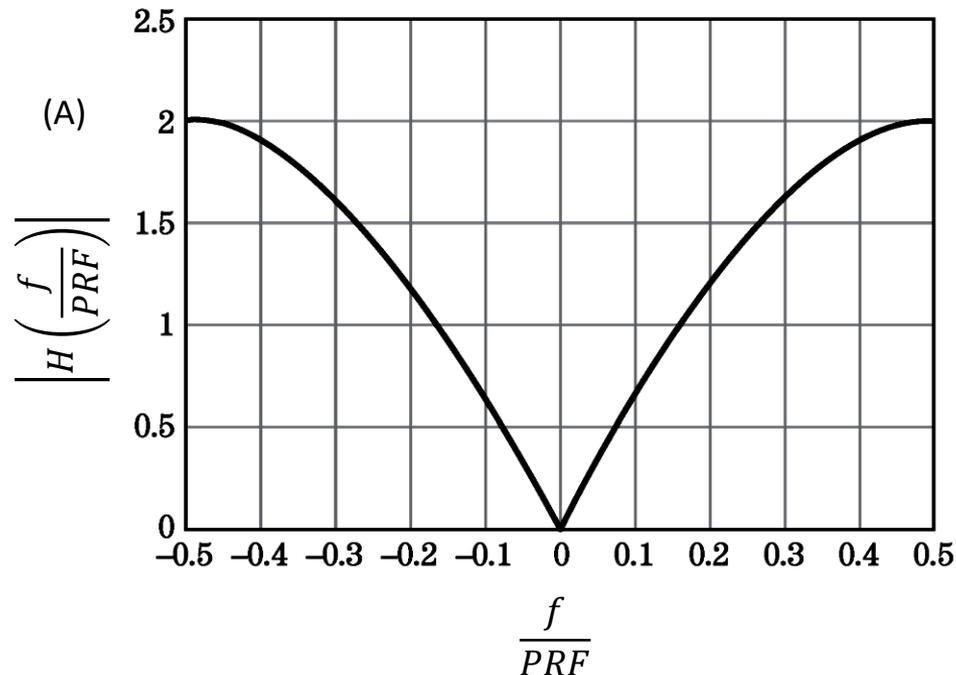
$$\begin{aligned} H(f) &= H(z)|_{z=e^{j2\pi fT}} = (1 - z^{-1})|_{z=e^{j2\pi fT}} = (1 - e^{-j2\pi fT}) = e^{-j\pi fT} (e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT}) = \\ &= 2je^{-j\pi fT} \frac{(e^{j\pi fT} - e^{-j\pi fT})}{2j} = 2je^{-j\pi fT} \sin \pi fT = 2e^{-j(\pi fT + \frac{\pi}{2})} \sin \pi fT \end{aligned} \quad (105)$$

Filtro MTI (*moving target indication*)

Como $T = PRI = 1/PRF$ (ver slides 4 e 5 do Cap I.1), então (105) pode ser reescrita com f normalizada em relação ao PRF (*pulse repetition frequency*) do radar:

$$H\left(\frac{f}{PRF}\right) = 2e^{-j\left(\pi\frac{f}{PRF} + \frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(\pi\frac{f}{PRF}\right) \quad (106)$$

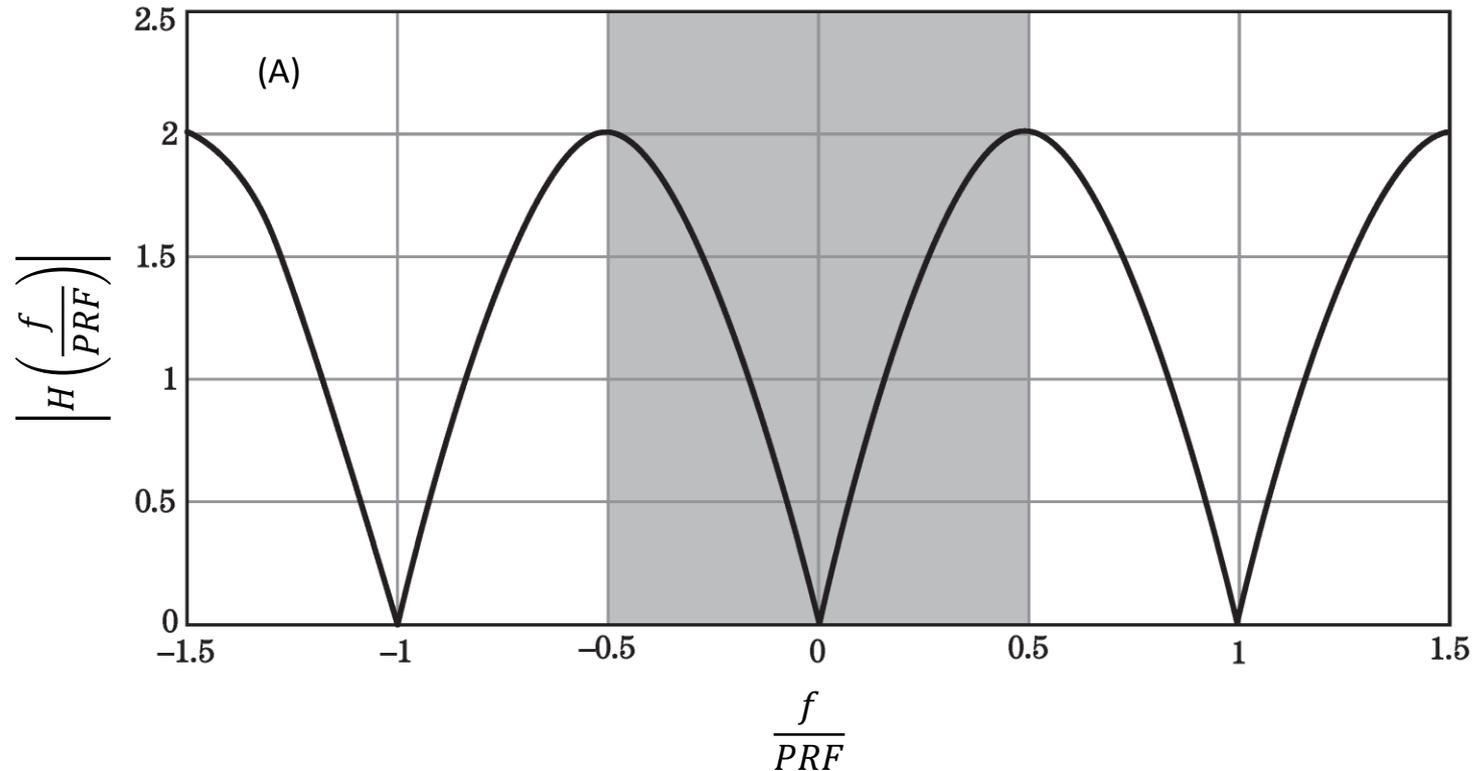
Em (A) abaixo é mostrada a curva de resposta em frequência $\left|H\left(\frac{f}{PRF}\right)\right|$ do filtro MTI de 1ª ordem resultante de (106) para a faixa de frequências $-PRF/2 < f < PRF/2$ [Hz]:



Note no gráfico em (A) que o filtro MTI é de natureza passa-alta, com um nulo na frequência zero para suprimir as componentes espectrais dos ecos de *clutter* e *chaff*.

Filtro MTI (*moving target indication*)

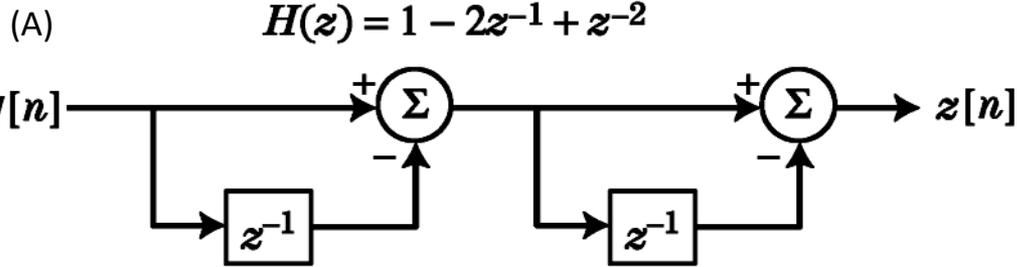
Como acontece para qualquer filtro digital, a resposta em frequência $|H(f)|$ de um filtro MTI é periódica no domínio frequência f , com período correspondente à frequência de amostragem f_s do sinal digital, que, no caso do filtro MTI é dada por $f_s = PRF$, conforme mostrado em (A) abaixo.



A área marcada em cinza em (A) corresponde ao intervalo de frequências Doppler f compreendidas entre $-PRF/2 < f < PRF/2$ [Hz], que é a faixa de frequências Doppler normalmente utilizada por obedecer ao critério de amostragem de Nyquist (ver slides 3 a 9 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/SCD1_CapII.pdf).

Filtro MTI (moving target indication)

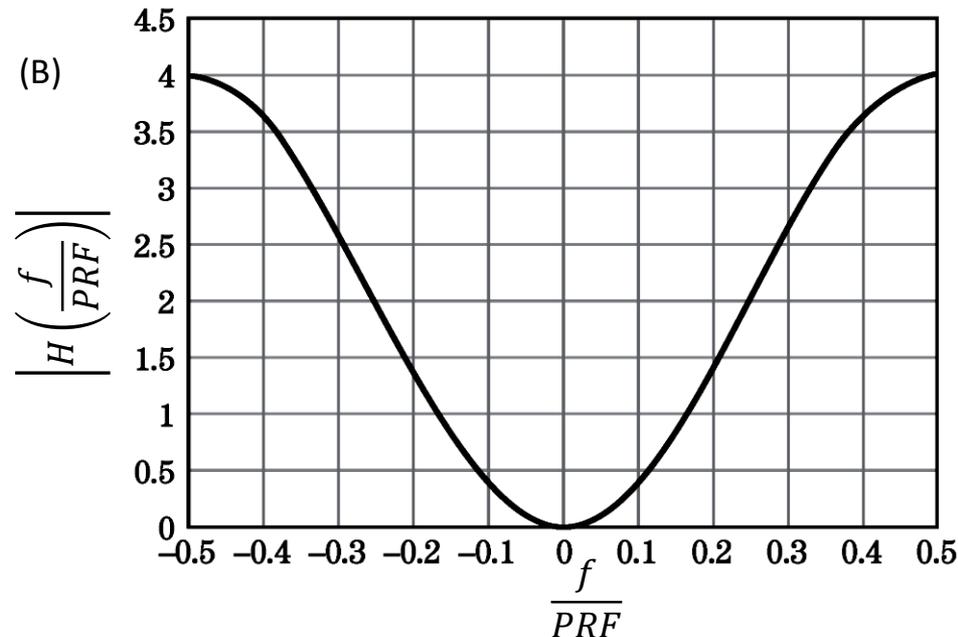
Um filtro MTI de 2ª ordem, também denominado de *three sequential pulses canceller*, é mostrado em (A) abaixo.



Note que o filtro MTI de 2ª ordem resulta de dois filtros MTI de 1ª ordem em série, e, portanto, a resposta em frequência $H(f)$ do filtro MTI de 2ª ordem é obtida da multiplicação de (106) por ela mesma, cujo resultado é dado por (107) abaixo.

$$H\left(\frac{f}{PRF}\right) = 4e^{-j\left(2\pi\frac{f}{PRF} + \pi\right)} \sin^2\left(\pi\frac{f}{PRF}\right) \quad (107)$$

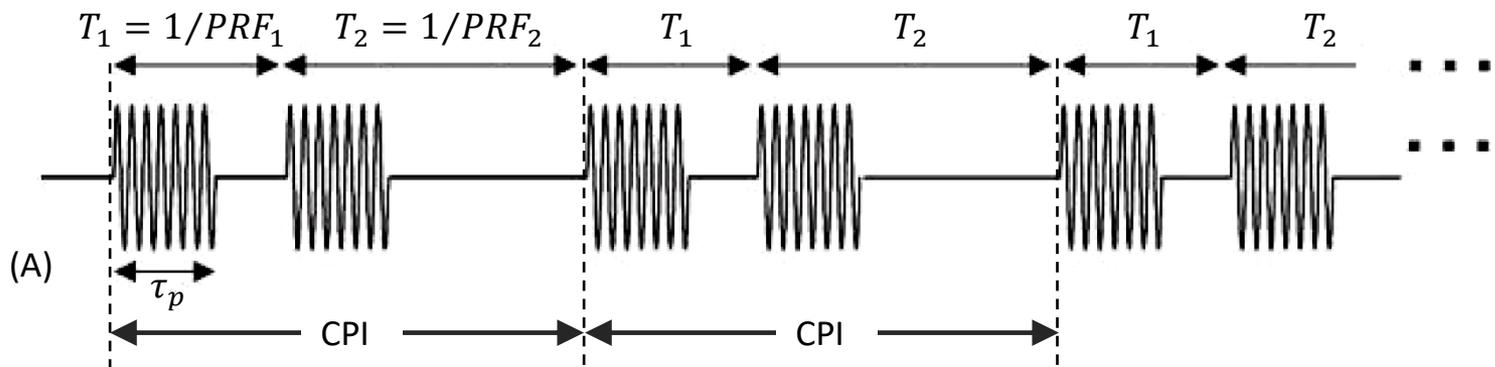
Em (B) abaixo é mostrada a curva de resposta em frequência $\left|H\left(\frac{f}{PRF}\right)\right|$ do filtro MTI de 2ª ordem resultante de (107) para a faixa de frequências $-PRF/2 < f < PRF/2$ [Hz]:



Insensibilidade do filtro MTI a alvos movendo-se em velocidades cegas

Conforme já discutido no slide 142, a resposta em frequência $|H(f)|$ de um filtro MTI é periódica no domínio frequência f , com período correspondente à frequência de amostragem f_s do sinal digital, que, no caso do filtro MTI é dada por $f_s = PRF$. Como um filtro MTI é projetado para apresentar ganho nulo na frequência zero, ocorrerão também ganhos nulos nas frequências Doppler f_D [Hz] que são múltiplos inteiros de PRF , denominadas e denotadas como frequências f_{cegas} [Hz]. Consequentemente, um alvo movendo-se com uma velocidade radial $v_{cega} = cf_{cega}/(2f_0)$ [m/s] (ver equação (38) do slide 51 do Cap I.5), sendo f_0 [Hz] a frequência da onda EM irradiada pelo TX do radar, resulta em um deslocamento de frequência Doppler f_D [Hz] igual a uma frequência f_{cega} [Hz] que é um múltiplo inteiro de $\pm PRF$. Este alvo movendo-se com uma velocidade radial v_{cega} terá seu espectro eliminado pelo filtro MTI. Ou seja, o RX do radar é “cego” para alvos movendo-se a uma velocidade radial v_{cega} . Isso é ilustrado no gráfico em (A) no slide 142 para um filtro MTI de 1ª ordem, que mostra três períodos da resposta em frequência $|H(f)|$.

Para minimizar o problema de alvos movendo-se em velocidade cega, que são indetectáveis pelo RX do radar devido ao ganho nulo do filtro MTI na respectiva frequência Doppler f_D [Hz] do alvo, é usual adotar a técnica denominada PRF escalonado, em que múltiplas frequências PRF são utilizadas, de modo que se uma das PRFs resultar em uma velocidade cega, as demais não sofrerão deste problema e poderão detectar o alvo. O PRF escalonado adota uma razão de escalonamento $\alpha = m_1/m_2$ onde m_1 e m_2 são números inteiros. Para um sistema de radar que transmita P pulsos de largura τ_p no CPI (*coherent processing interval*), a relação entre o PRF_{p+1} do pulso $p + 1$ e o PRF_p do pulso p anterior é $PRF_{p+1} = \alpha PRF_p$, com $p = 1, 2, \dots, P$. Por exemplo, em (A) abaixo é mostrado o caso de escalonamento do PRF para $P = 2$ e $\alpha = 4/7$, resultando em $T_2 = (7/4)T_1$:



Insensibilidade do filtro MTI a alvos movendo-se em velocidades cegas

Consideremos um filtro MTI de 1ª ordem operando sob uma *waveform* pulsada com *PRF* escalonada em um conjunto de P frequências tal que $PRF_{p+1} = \alpha PRF_p$, com $p = 1, 2, \dots, P$ e razão de escalonamento $\alpha = m_1/m_2$, onde m_1 e m_2 são números inteiros. Conforme dedução analítica na seção 5.2.4 da referência [11] (em <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/FRSPMR.pdf>), a resposta em frequência $|H(f)|$ deste filtro MTI de 1ª ordem com *PRF* escalonada é dada por:

$$|H(f)| = \frac{2}{\sqrt{P}} \sqrt{\sum_{p=1}^P \sin^2 \left(\pi \frac{f}{PRF_p} \right)} \quad (108)$$

Veremos no exemplo que segue o efeito do escalonamento do *PRF* na curva de resposta em frequência $|H(f)|$ de um filtro MTI de 1ª ordem para $P = 2$. Veremos que o $|H(f)|$ resultante de (108) minimiza a insensibilidade (“cegueira”) do filtro MTI para alvos movendo-se com velocidade radial $v_{cega} = cf_{cega}/(2f_0)$ [m/s] que resulta em um deslocamento de frequência Doppler f_D [Hz] igual a uma frequência f_{cega} [Hz] que é um múltiplo inteiro de $\pm PRF$, sendo f_0 [Hz] a frequência da onda EM irradiada pelo TX do radar.

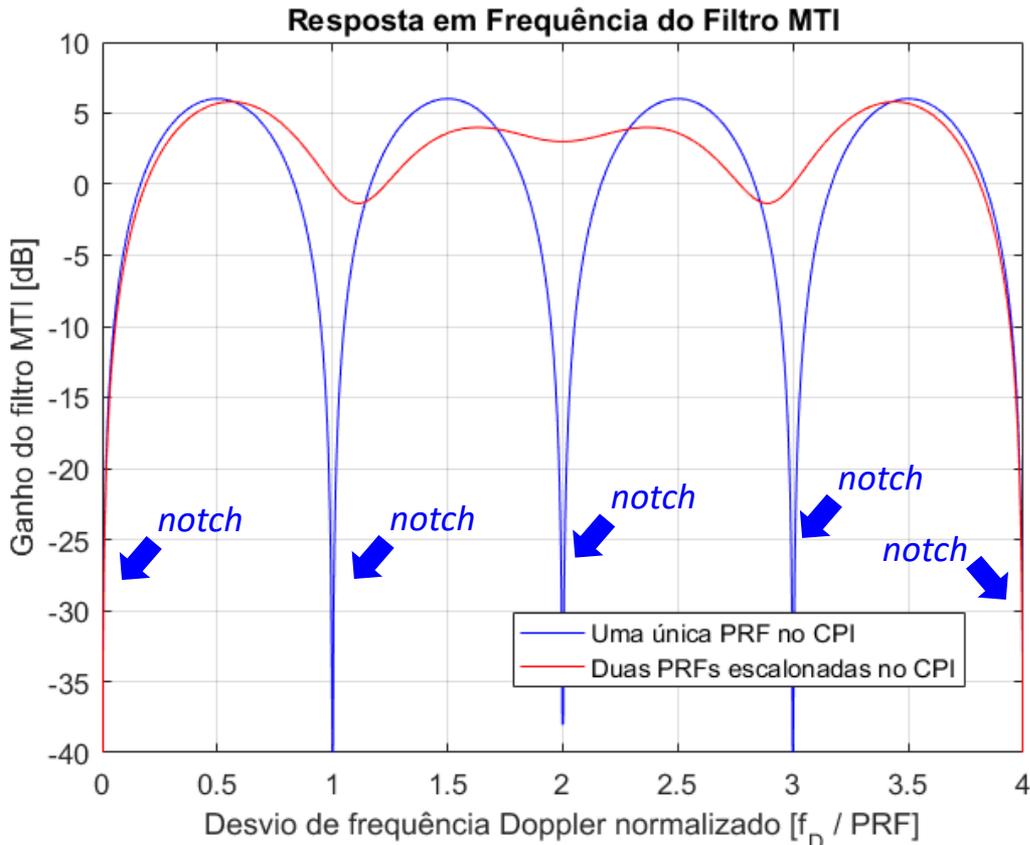
Insensibilidade do filtro MTI a alvos movendo-se em velocidades cegas

Exemplo 11: O TX de um radar adota escalonamento de PRF com $P = 2$ pulsos transmitidos durante o CPI (*coherent processing interval*) e com razão de escalonamento $\alpha = 3/4$. O RX do radar adota um filtro MTI de 1ª ordem.

Pede-se: (a) Determine e plote a curva de resposta em frequência $|H(f)|$ [dB] do filtro MTI de 1ª ordem para o CPI com $P = 2$ pulsos e com razão de escalonamento $\alpha = 3/4$. (b) Plote no mesmo gráfico do item (a) a curva de resposta em frequência $|H(f)|$ [dB] do filtro MTI de 1ª ordem para $P = 2$ pulsos no CPI mas com razão de escalonamento $\alpha = 1.0$, i.e., sem escalonamento no PRF. (c) Analise e compare os resultados obtidos em (a) e (b).

Solução: Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo11.m disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E11S146.zip ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo11.m).

(a)&(b) Usando o *script* Exemplo11.m obtemos:



(c) A curva azul no gráfico ao lado mostra para $\alpha = 1.0$ (i.e., sem escalonamento) os *notches* (*notch* = vale abrupto e profundo) de ganho zero do filtro MTI para alvos movendo-se com velocidade radial $v_{cega} = cf_{cega}/(2f_0)$ [m/s] que resulta em um deslocamento de frequência Doppler f_D [Hz] igual a uma frequência f_{cega} [Hz] que é um múltiplo inteiro de PRF , sendo f_0 [Hz] a frequência da onda EM irradiada pelo TX do radar.

A insensibilidade do filtro MTI para alvos movendo-se a uma velocidade radial v_{cega} é significativamente reduzida quando o radar adota um CPI com $P = 2$ pulsos e com razão de escalonamento $\alpha = 3/4$, conforme mostra a curva vermelho no gráfico ao lado, em que os *notches* na curva de ganho do filtro MTI são minimizados.

Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

Vimos no Cap I.7 que o *range* de um alvo é identificado através do máximo local em uma curva (ou em uma superfície) resultante de um processo de integração numérica aplicado ao sinal dos ecos dos alvos/*scatterers* recebido no RX do radar.

Nos exemplos 4 e 5 do Cap I.7 a integração numérica é efetuada através da IFFT e cada alvo gerou na posição do seu *range* um respectivo máximo local (pico) na curva resultante do processo de integração.

Nos exemplos 6 e 7 a integração numérica é efetuada através da função de ambiguidade, cada alvo gerando na posição do seu *range* e de seu desvio Doppler um respectivo máximo local (pico) na superfície resultante do processo de integração.

No exemplo 8 a integração numérica é efetuada através da FFT e cada *scatterer* gerou na posição do seu *range* um respectivo máximo local (pico) na curva resultante do processo de integração.

No exemplo 10 a integração numérica é efetuada através da FFT seguida de uma IFFT e cada alvo gerou na posição do seu *range* um respectivo máximo local na curva resultante do processo de integração.

É perceptível, portanto, que o processo de detecção de um alvo consiste em detectar o respectivo máximo local (pico) na curva/superfície resultante do processo de integração efetuado no RX do radar.

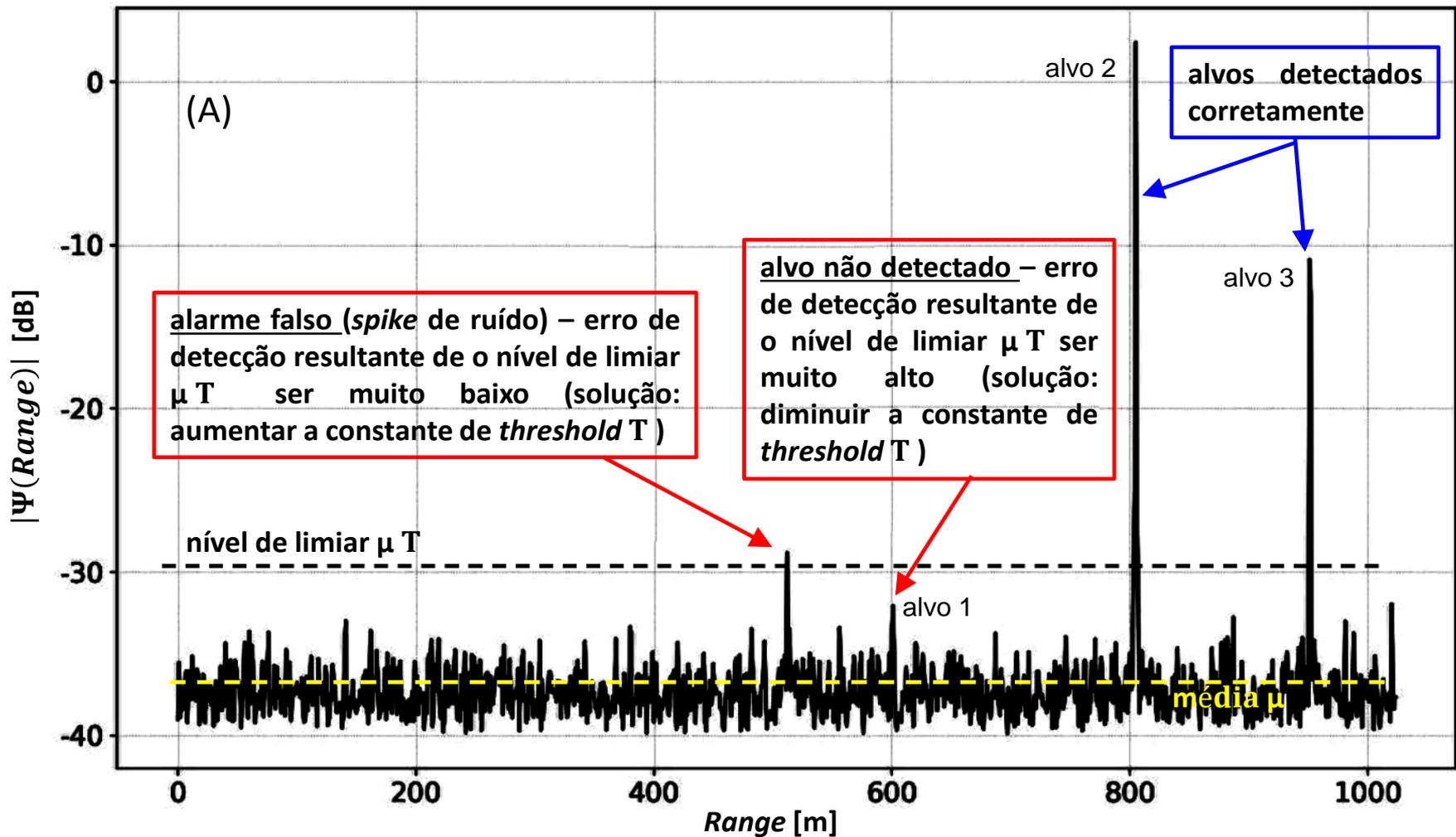
Uma maneira simples de detectar um máximo local seria calcular o valor médio μ da curva/superfície resultante do processo de integração. Cada valor de magnitude $|\Psi|$ da curva/superfície para o qual a condição $|\Psi| > \mu T$ é obedecida é considerado ser um máximo local correspondente a um alvo, **onde μT é o nível de limiar (*threshold level*) e T é a constante denominada *threshold control* (ou simplesmente *threshold*) que controla o nível de limiar**, conforme mostrado em (A) no próximo slide.

Note em (A) no próximo slide que ocorrem duas situações de erro de detecção: “alarme falso” e “alvo não detectado”. A tentativa de solucionar simultaneamente os dois erros de detecção através do ajuste da constante de *threshold* T é inviável porque o ajuste necessário em T são contrários para as duas situações de erro.

Mesmo o clássico detector de Neyman–Pearson (ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/ANPD.pdf>), baseado na estatística do sinal dos ecos e na estatística do ruído e da interferência, enfrenta alguma dificuldade em lidar com as situações do tipo “alarme falso” e “alvo não detectado” acima referidas. Isto ocorre basicamente em consequência de o nível de limiar deste tipo de detector não ser adaptativo no contexto operacional do radar, em que a potência do ruído e/ou a potência da interferência (*jamming*) variam ao longo do tempo.

Nota: Em algumas literaturas μT é denominado de *threshold* e T é denominado de *bias*.

Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

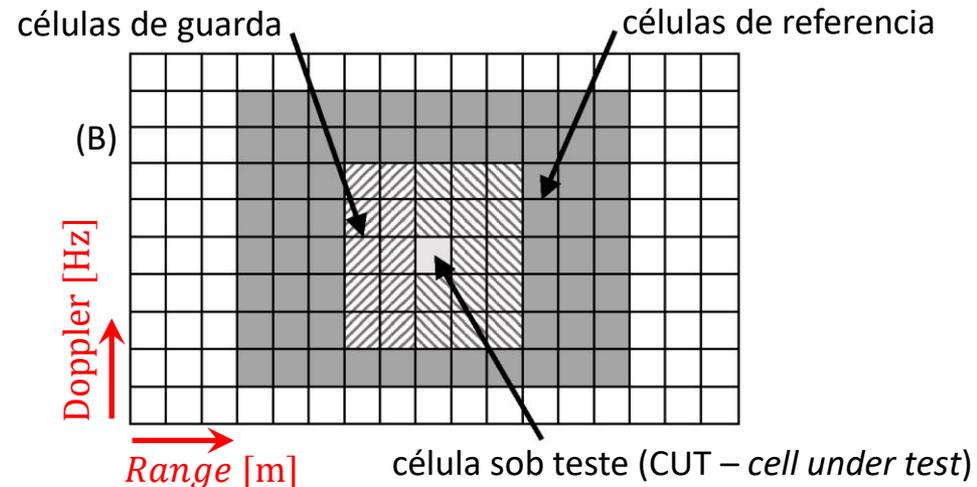
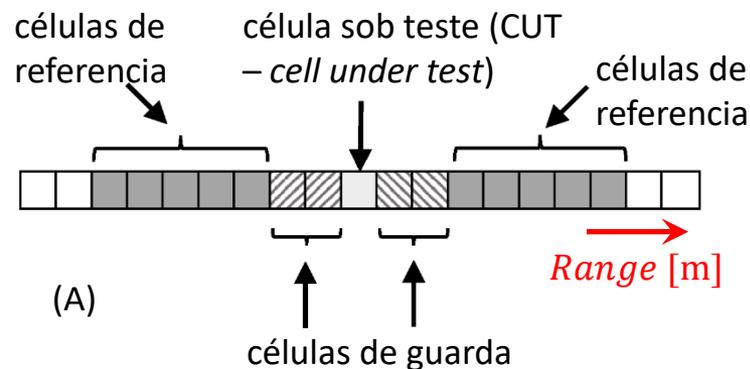


Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

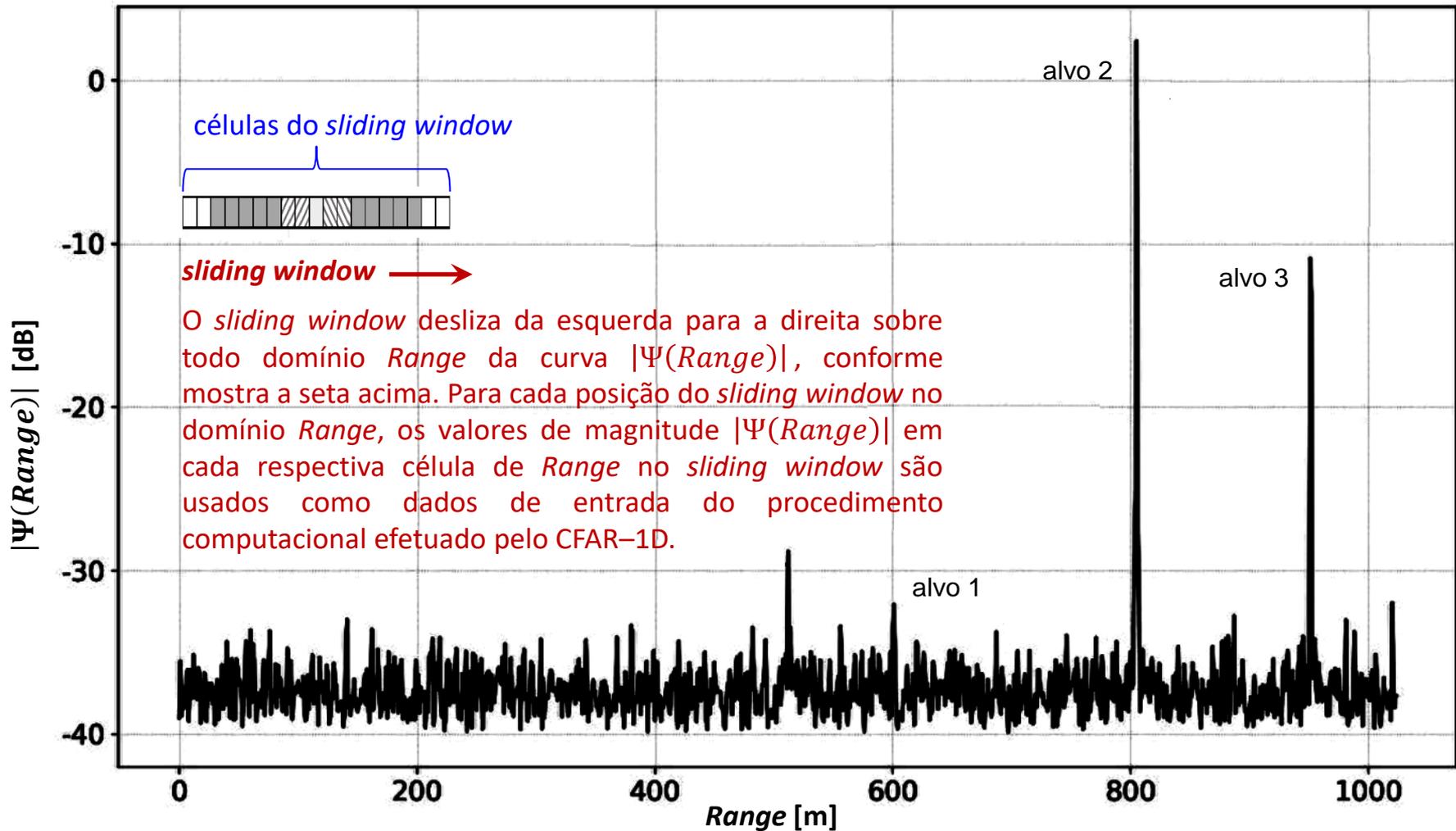
Conforme discutido nos slides anteriores, é necessário que o nível de limiar μT seja adaptativo em função do nível de ruído e de interferência presentes no contexto operacional do radar. Isto minimiza as situações de erro de detecção, como as situações referidas de “alarme falso” e de “alvo não detectado”. Esta constatação levou ao desenvolvimento de técnicas adaptativas de detecção, técnicas que com o passar do tempo convergiram para o algoritmo CFAR. Presentemente, na grande maioria dos radares modernos o nível de limiar μT é determinado adaptativamente pelo algoritmo CFAR.

O CFAR se adapta a diferentes cenários de operação no que diz respeito ao ruído e interferência, determinando o nível de limiar μT com base em um número de amostras delimitado pela janela deslizante (***sliding window***) do CFAR, conforme mostrado em (A) e (B) abaixo e no próximo slide. Cada célula na janela unidimensional (CFAR-1D) em (A) corresponde a uma amostra no domínio ***Range*** da curva resultante do processo de integração, lembrando que *Range* [m] é função direta do atraso no tempo t_0 [s] do eco do alvo, i.e., $Range = 0.5 c t_0$ [m] (slide 5). Cada célula na janela bidimensional (CFAR-2D) em (B) corresponde a uma amostra no domínio (***Range, Doppler***) da superfície resultante do processo de integração, lembrando que o desvio Doppler $f_{doppler}$ [Hz] é função direta da velocidade radial v_d [m/s] do alvo que originou o eco, i.e., $f_{doppler} = 2f v_d/c$ [Hz] (slide 51). A janela do CFAR desliza sobre todo domínio da curva/superfície e, para cada posição da janela no domínio, os valores de magnitude $|\Psi|$ em cada respectiva célula da janela são usados como dados de entrada do procedimento computacional efetuado pelo CFAR.

Há vários tipos de CFAR (<https://www.radartutorial.eu/01.basics/False%20Alarm%20Rate.en.html>), cada um efetuando um procedimento computacional distinto. Nosso escopo será o CA-CFAR (*cell averaging* – CFAR), CAGO – CFAR (*cell averaging greatest of* – CFAR), CASO – CFAR (*cell averaging smallest of* – CFAR) e OS – CFAR (*ordered statistic* – CFAR), todos operando em um contexto unidimensional (CFAR-1D). No Cap III.7 estudaremos o CFAR-2D (bidimensional), especificamente o CA-CFAR-2D (*cell averaging-constant false alarm rate-2 dimension*).



Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)



CA-CFAR (cell averaging – CFAR)

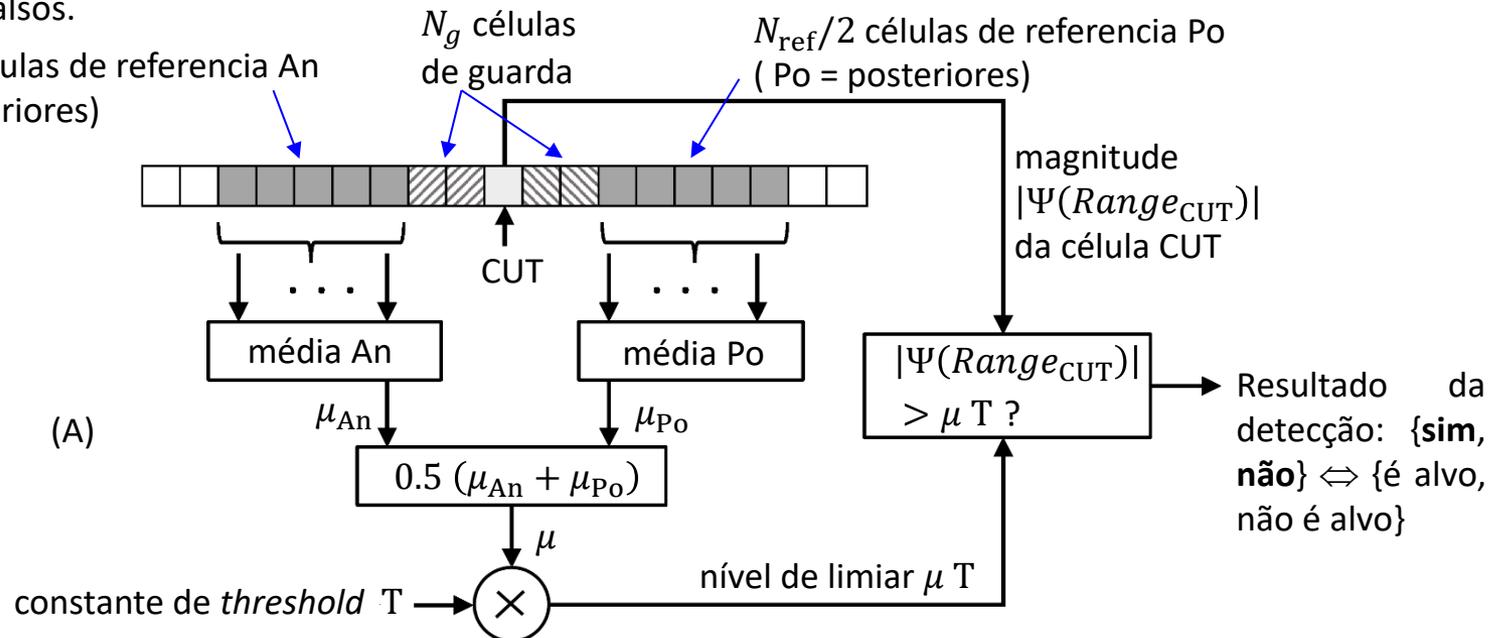
O CA-CFAR (CA – *cell averaging*) testa a magnitude $|\Psi(Range_{CUT})|$ da **célula sob teste** (CUT – *cell under test*) em (A) abaixo comparando com a média μ dos valores de magnitude das N_{ref} **células de referência**, e toma a decisão de que há um alvo na distância $Range_{CUT} = 0.5 c t_{CUT}$ [m] caso seja verdadeira a desigualdade (109):

$$|\Psi(Range_{CUT})| > \mu T \quad (109)$$

onde T é a constante de *threshold* que controla o nível de limiar μT , onde t_{CUT} [s] é o atraso no tempo do eco do possível alvo em $Range_{CUT}$, i.e., $Range_{CUT} = 0.5 c t_{CUT}$ [m] (slide 5) e onde a média μ é dada por

$$\mu = \frac{1}{N_{ref}} \sum_{n=1}^{N_{ref}} |\Psi(Range_n)| = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{N_{ref}/2} \sum_{n=1}^{N_{ref}/2} |\Psi(Range_n)| + \frac{1}{N_{ref}/2} \sum_{n=N_{ref}/2+1}^{N_{ref}} |\Psi(Range_n)| \right) = \frac{1}{2} (\mu_{An} + \mu_{Po}) \quad (110)$$

onde o índice n em (110) assume valores que apontam para as N_{ref} células de referência definidas em (A) abaixo. Note que há um conjunto de N_g **células de guarda** contíguas à CUT que não são computadas na média μ . Isto minimiza nas células contíguas à CUT a sensibilidade aos lobos secundários que ocorrem próximos do lobo principal da curva de reflexividade $|\Psi(Range)|$ respectivo a cada alvo. Desta maneira, evita-se que os lobos secundários corrompam a média μ induzindo o CA-CFAR a alarmes falsos.

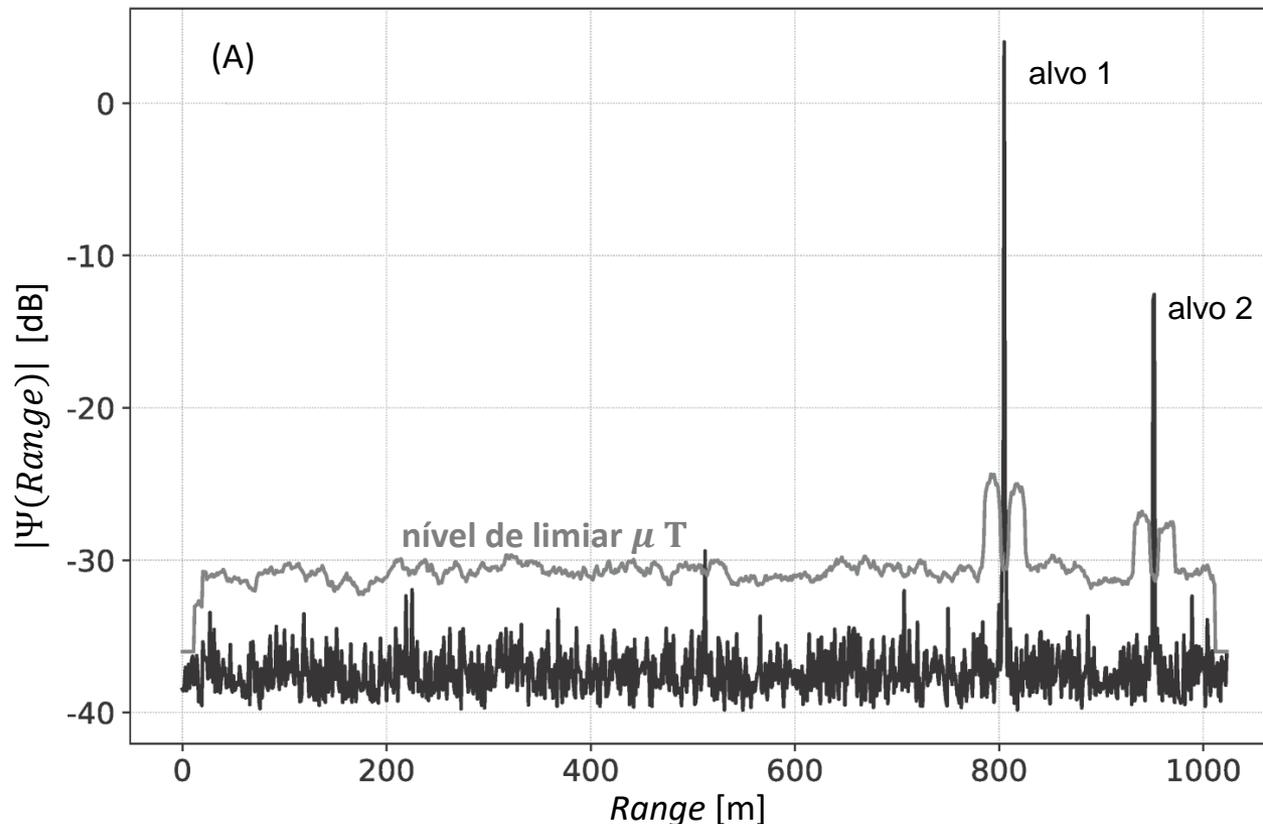


CA-CFAR (cell averaging – CFAR)

Note que a média μ das magnitudes armazenadas nas células de referência é uma estimativa do nível de ruído e interferência nas vizinhanças do pico em $|\Psi(Range_0)|$ que ocorre para cada alvo, sendo $Range_0$ o *range* do alvo.

O número N_{ref} de células de referencia, o número N_g de células de guarda e a constante de *threshold* T são parâmetros de entrada configuráveis no CA-CFAR de acordo com o cenário operacional do radar. Para reduzir a complexidade computacional, em alguns sistemas a desigualdade (109) é preliminarmente testada para um μ_{min} mínimo e fixo e o CA-CFAR só entra em ação se $|\Psi(Range_{CUT})| > \mu_{min} T$, sendo μ_{min} um parâmetro de entrada configurável.

Em (A) abaixo é mostrado a curva do nível de limiar μT (em cinza) resultante do CA-CFAR, sendo os valores de μ determinados por (110) para cada posição do *sliding window* no domínio *Range* da curva $|\Psi(Range)|$.



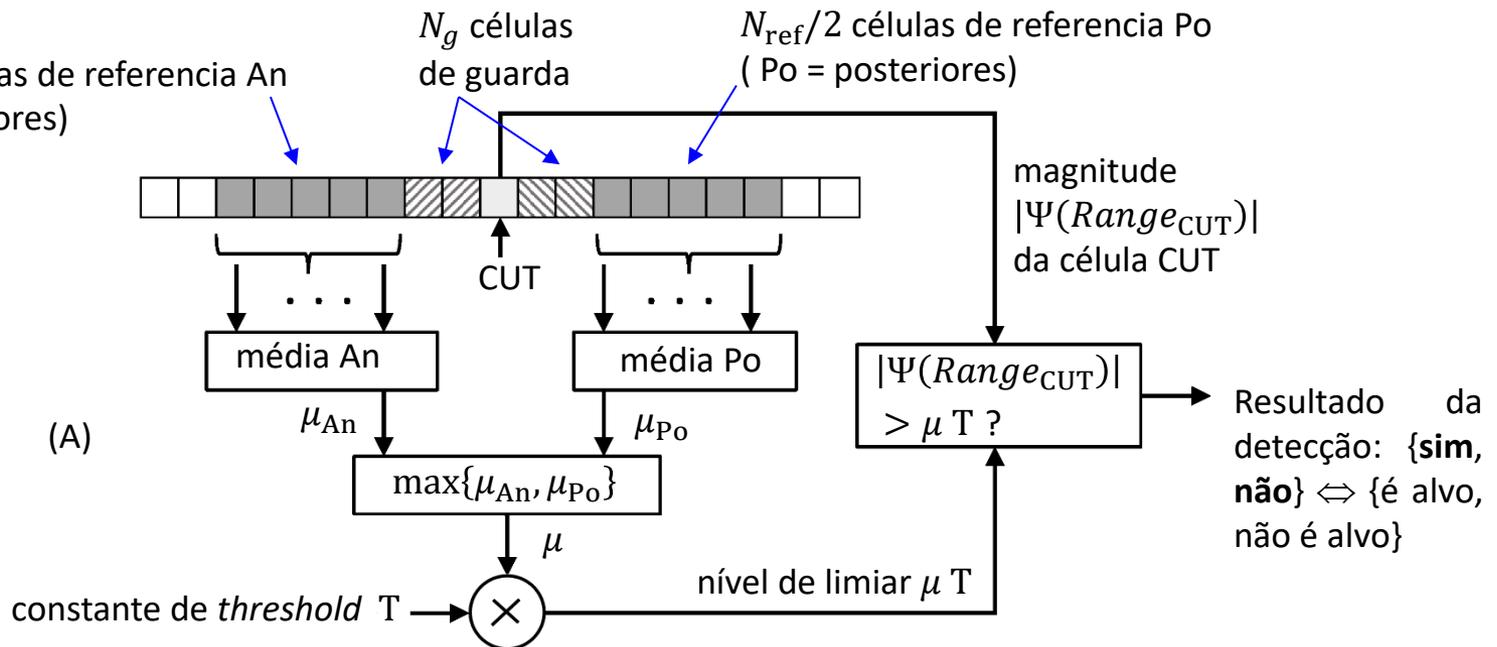
Note em (A) que o nível de limiar μT não é constante, variando adaptativamente com a magnitude da curva $|\Psi(Range)|$.

Note também que o nível de limiar μT é maior nas vizinhanças contíguas do $Range_0$ de cada alvo, mas reduz de valor no $Range_0$ exato do alvo. Isto minimiza a sensibilidade aos lobos secundários que ocorrem próximos do lobo principal da curva de reflexividade $|\Psi(Range)|$ respectivo a cada alvo, evitando assim alarmes falsos.

CAGO – CFAR (cell averaging greatest of – CFAR)

Vimos que o CA–CFAR estima o nível de ruído e interferência nas vizinhanças do pico em $|\Psi(Range_0)|$ que ocorre para cada alvo através da média μ das magnitudes armazenadas nas células de referência. Isto torna o CA–CFAR propenso a alarme falso quando o ruído/interferência tem característica impulsiva, em particular quando se atribui um valor pequeno à constante de *threshold* T .

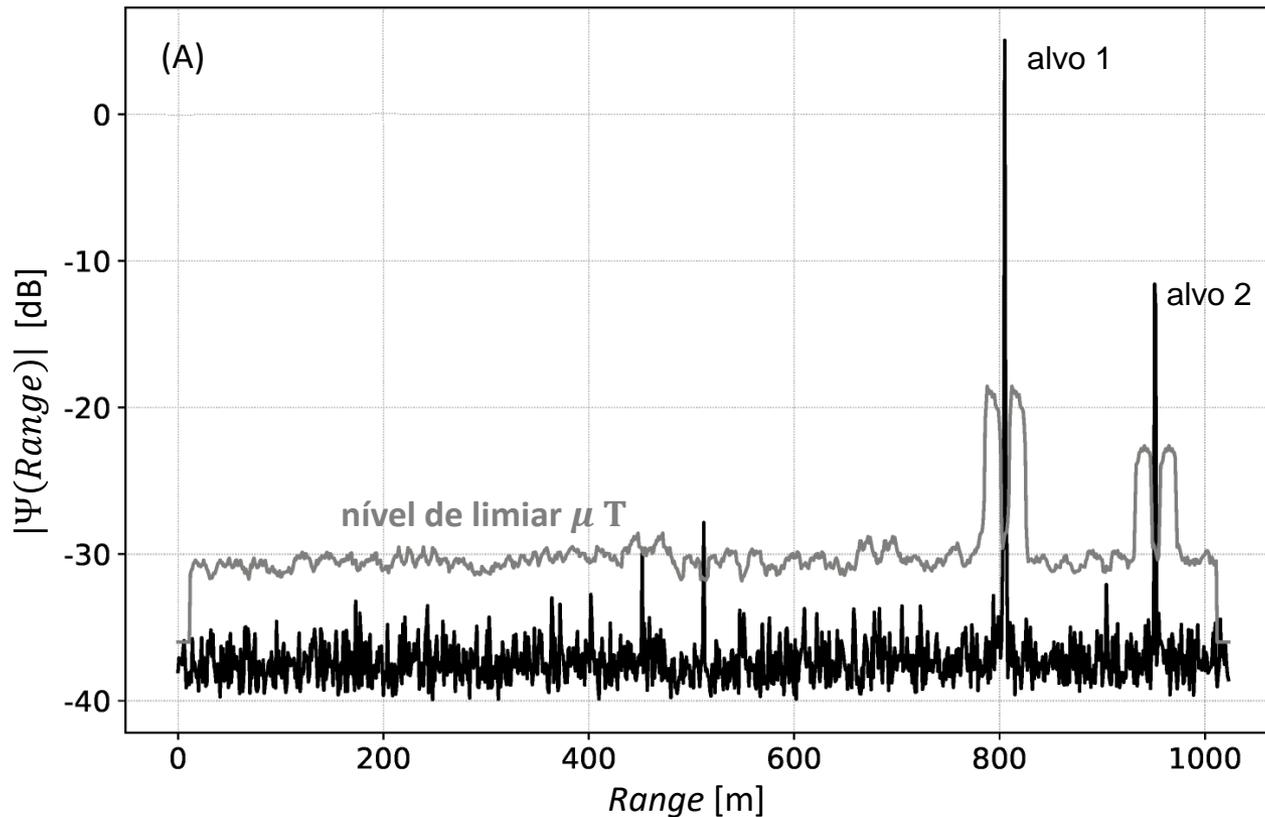
O CAGO–CFAR calcula as médias μ_{An} e μ_{Po} respectivas às células de referência An e Po de mesma forma que o CA–CFAR (ver equação (110)). A seguir, diferentemente do CA–CFAR, o CAGO–CFAR atribui à média μ o valor máximo entre as médias μ_{An} e μ_{Po} , i.e., $\mu = \max\{\mu_{An}, \mu_{Po}\}$, conforme mostrado em (A) abaixo:



CAGO – CFAR (*cell averaging greatest of* – CFAR)

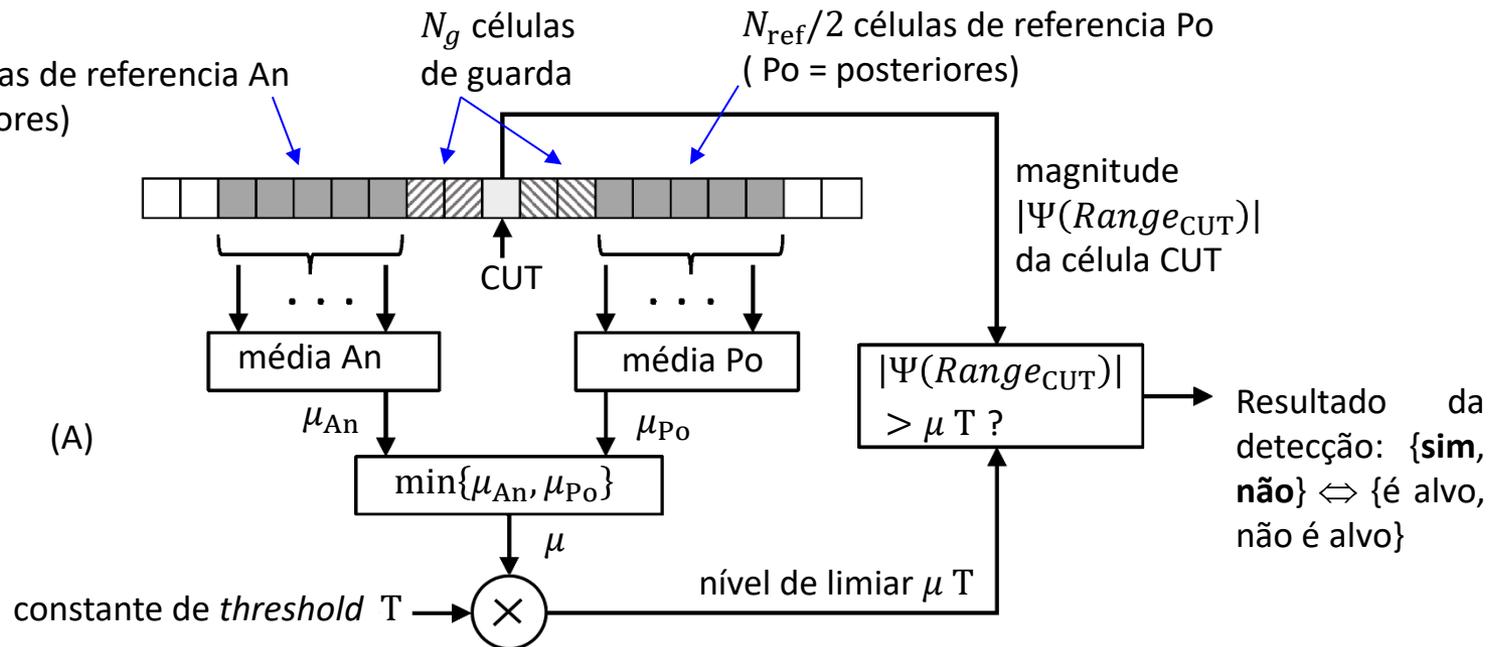
Em (A) abaixo é mostrado a curva do nível de limiar μT (em cinza) resultante do CAGO–CFAR, sendo os valores de μ determinados conforme diagrama em (A) no slide anterior.

A vantagem do CAGO–CFAR em relação ao CA–CFAR é o melhor desempenho em cenários de operação repleto de ecos de *clutter* com bordas de alto contraste (por exemplo, ecos originados da reflexão da onda EM em objetos metálicos estáticos). No entanto, para dois alvos com espaçamento próximo à resolução de *range*, o CAGO–CFAR pode mascarar a detecção individual dos dois alvos.



CASO – CFAR (cell averaging smallest of – CFAR)

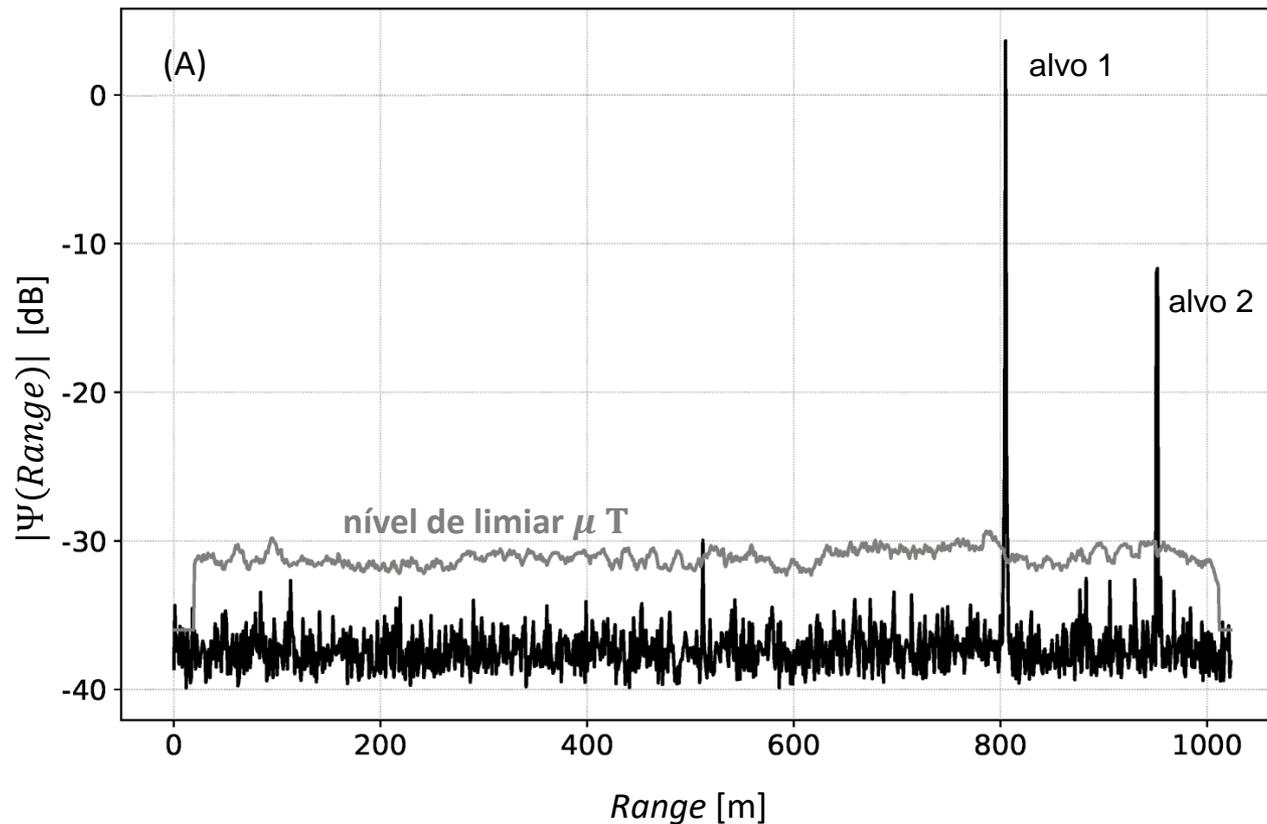
O CASO–CFAR é semelhante ao CAGO–CFAR com a diferença de que o CASO–CFAR atribui à média μ o valor mínimo entre as médias μ_{An} e μ_{Po} , i.e., $\mu = \min\{\mu_{An}, \mu_{Po}\}$, conforme mostrado em (A) abaixo:



CASO – CFAR (*cell averaging smallest of* – CFAR)

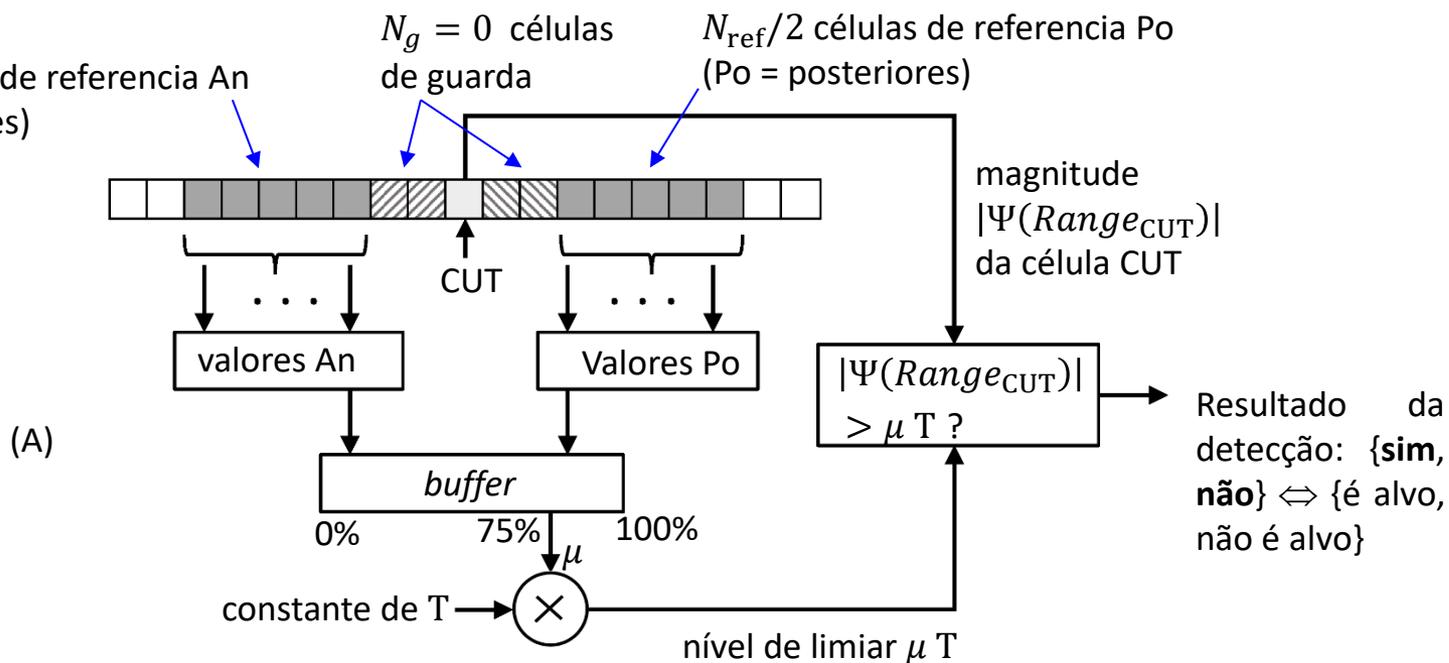
Em (A) abaixo é mostrado a curva do nível de limiar μT (em cinza) resultante do CASO–CFAR, sendo os valores de μ determinados conforme diagrama em (A) no slide anterior.

A vantagem do CASO–CFAR em relação ao CAGO–CFAR ocorre no caso de dois alvos com espaçamento próximo à resolução de *range*, em que o CASO–CFAR resulta em uma menor probabilidade de mascaramento da detecção individual dos dois alvos.



OS – CFAR (ordered statistic – CFAR)

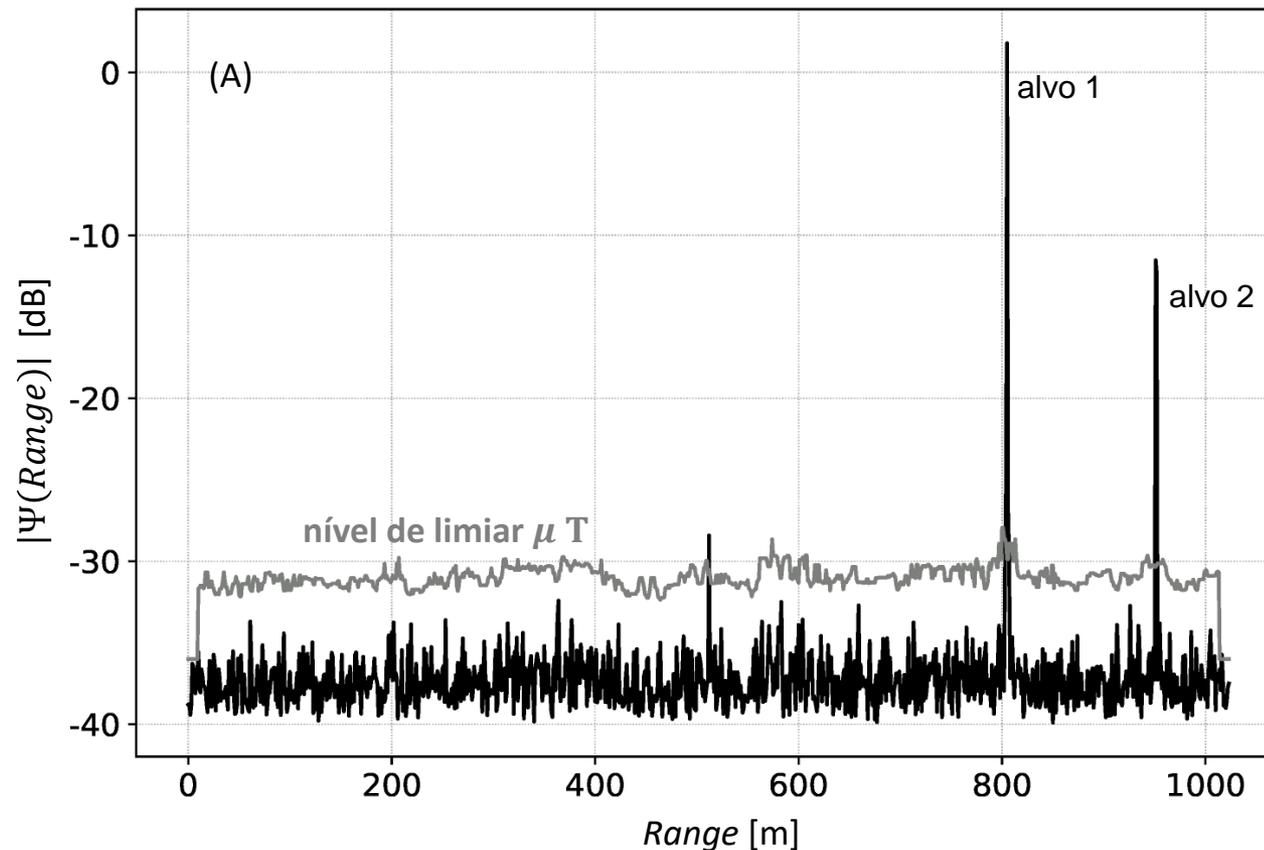
O OS–CFAR armazena em cada posição de um *buffer* os respectivos valores de magnitude das células A_n e P_o . A seguir o OS–CFAR ordena o *buffer* em ordem crescente. O valor de μ é obtido de uma posição intermediária do *buffer* já ordenado, em geral da posição correspondente a 75% de seu tamanho, conforme diagrama em (A) abaixo. Esta posição intermediária do *buffer* é configurável como parâmetro de entrada do OS–CFAR, e quanto mais próximo de 100% do tamanho do *buffer* for a posição intermediária, maiores serão os valores resultantes para a curva de nível de limiar μT . Não há necessidade de células de guarda no OS–CFAR, de modo que $N_g = 0$.



OS – CFAR (*ordered statistic* – CFAR)

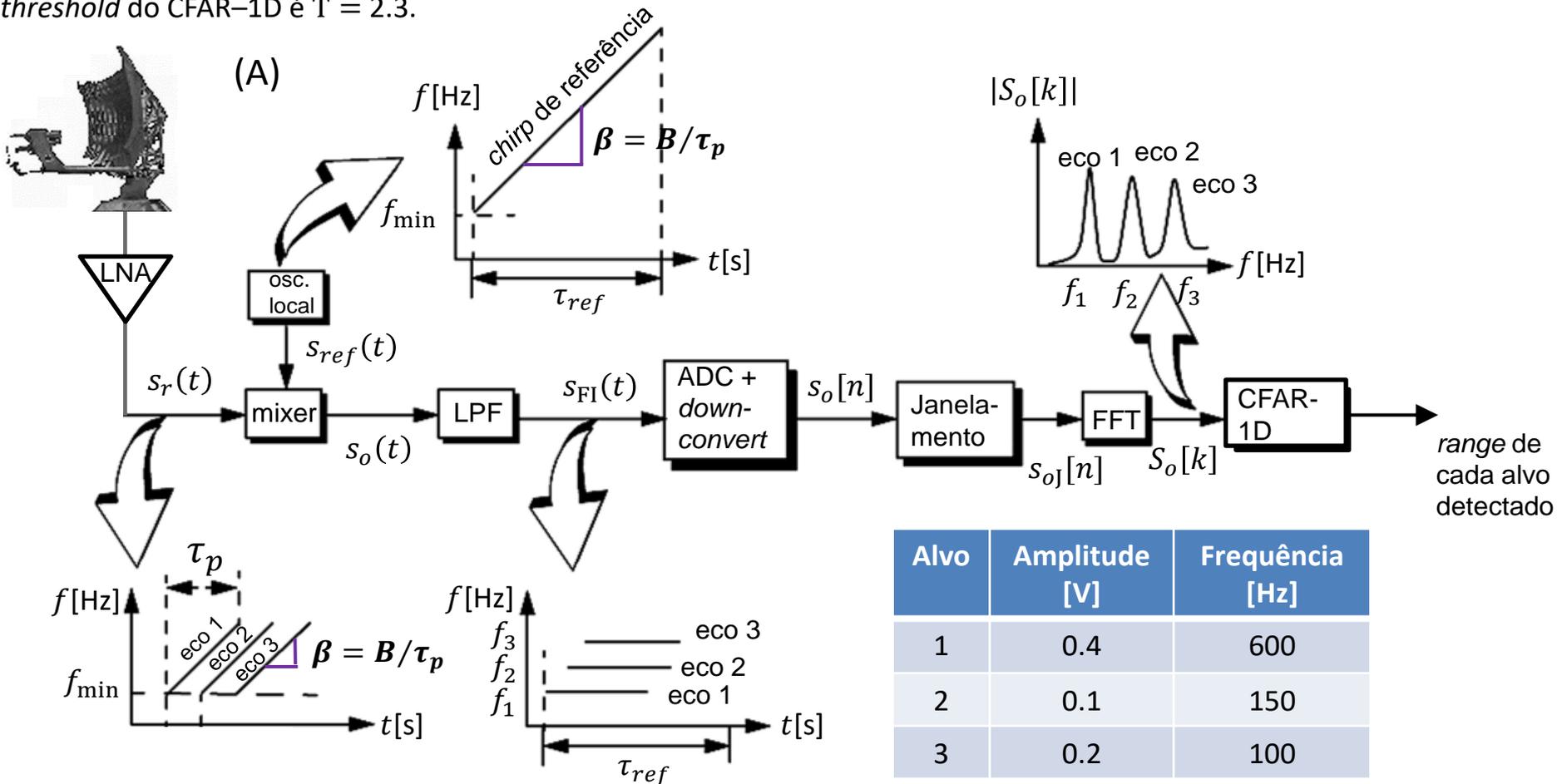
Em (A) abaixo é mostrado a curva do nível de limiar μT (em cinza) resultante do OS–CFAR, sendo os valores de μ determinados conforme diagrama em (A) no slide anterior.

A vantagem do OS–CFAR é que ele quase elimina totalmente o problema de mascaramento que ocorre no caso de dois alvos com espaçamento próximo à resolução de *range*, situação em que o CA–CFAR resulta em uma alta probabilidade de mascaramento da detecção individual dos dois alvos.



Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

Exemplo 12: Um radar *pulse-Doppler* adota compressão de pulso *stretch processing* e detecção de alvo através do CFAR-1D. O cenário operacional do radar contempla 3 alvos, conforme mostrado em (A) abaixo. O janelamento aplicado é retangular. A amplitude e a frequência das componentes IQ de cada um dos respectivos 3 ecos presentes no sinal s_{oJ} na entrada do bloco “FFT” é mostrado na tabela abaixo. O sinal s_{oJ} é corrompido por ruído branco Gaussiano gerado basicamente no *front-end* analógico do RX (LNA, *mixer*, etc.). As componentes I e Q do ruído Gaussiano são respectivamente dadas por $Ruido_I(t) = 0.05 \eta(t)$ e $Ruido_Q(t) = 0.05 \eta(t)$, onde $\eta(t)$ representa o sinal no tempo gerado por um gerador de números randômicos com distribuição Gaussiana, média zero e variância unitária. A constante de *threshold* do CFAR-1D é $T = 2.3$.



Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

O RX do radar permite configurar 4 modos de operação do CFAR-1D : (I) “CA-CFAR” (*cell averaging* – CFAR), (II) “CAGO – CFAR” (*cell averaging greatest of* – CFAR), (III) “CASO – CFAR” (*cell averaging smallest of* – CFAR) e (IV) “OS – CFAR” (*ordered statistic* – CFAR).

O CFAR-1D é configurado para operar com 10 células de referência e 2 células de guarda em cada lado da janela (*sliding window*), sendo a CUT a célula no centro da janela.

Para o caso de operação no modo (IV) “OS – CFAR”, não há células de guarda na janela. A posição intermediária do *buffer* do modo “OS – CFAR”, da qual o valor de μ é obtido, é configurada para 75% de seu tamanho, sendo μ a variável que define o nível de limiar μT do CFAR-1D.

Pede-se: Considerando 1000 amostras no sinal $s_{oJ}[n]$ na entrada do bloco “FFT” no diagrama do slide anterior, determine e plote em um mesmo gráfico o sinal $S_o[k]$ na saída do bloco “FFT” em [dB] e a curva do nível de limiar μT em [dB] resultante do bloco “CFAR-1D” para os modos de operação em (a), (b), (c) e (d) abaixo:

(a) “CA-CFAR” (*cell averaging* – CFAR). **(b)** “CAGO – CFAR” (*cell averaging greatest of* – CFAR).

(c) “CASO – CFAR” (*cell averaging smallest of* – CFAR). **(d)** “OS – CFAR” (*ordered statistic* – CFAR).

(e) Houve erro de detecção do tipo “alvo não detectado” nos itens (a),(b), (c) e (d)? Se sim, identifique cada erro com uma seta no gráfico plotado para a solução de cada item.

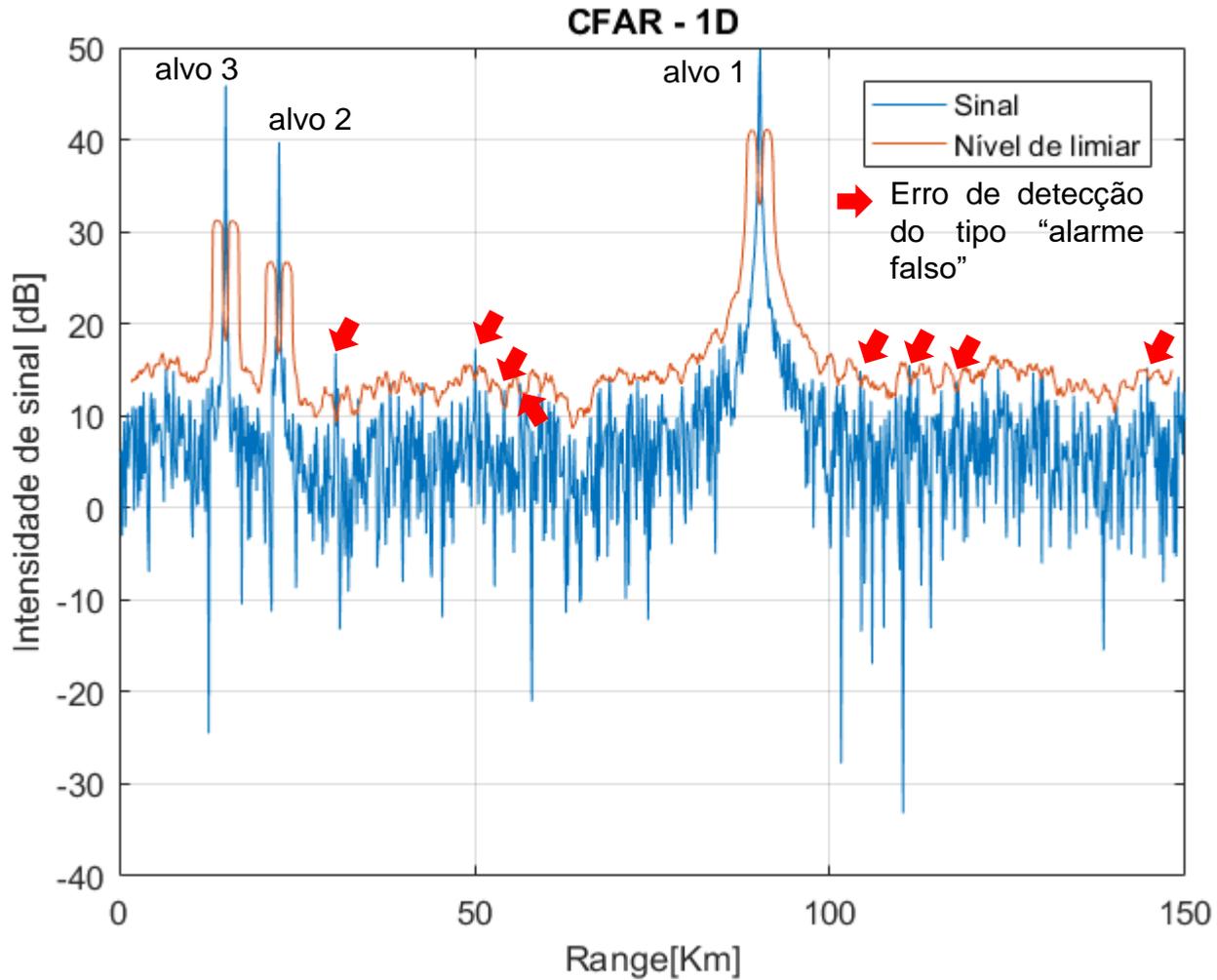
(f) Houve erro de detecção do tipo “alarme falso” nos itens (a),(b), (c) e (d)? Se sim, identifique cada erro com uma seta no gráfico plotado para a solução de cada item.

(g) Com base nos resultados em (e) e (f), analise e conclua qual o melhor modo de operação do CFAR-1D para este cenário operacional do radar.

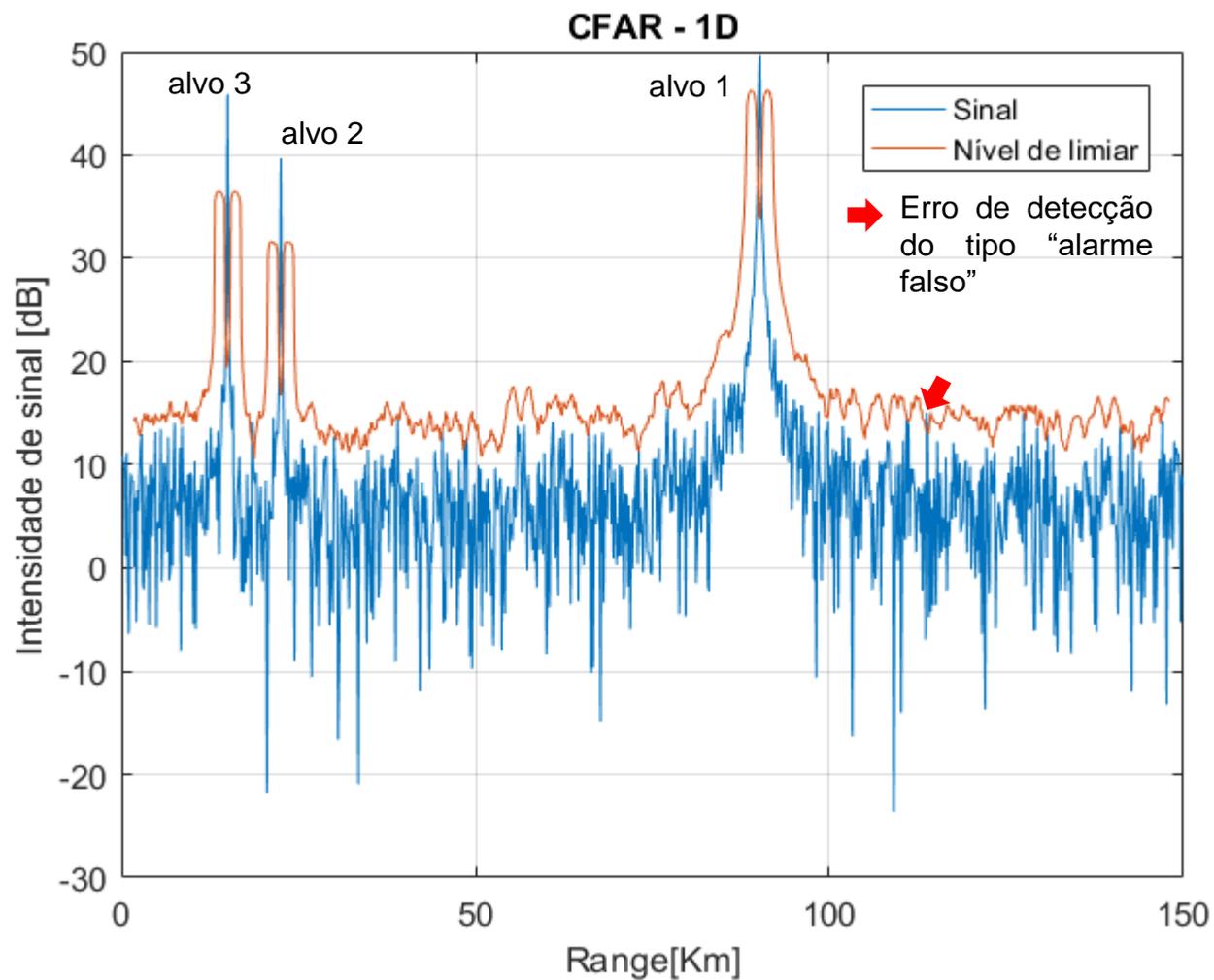
Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo12.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E12S159.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo12.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

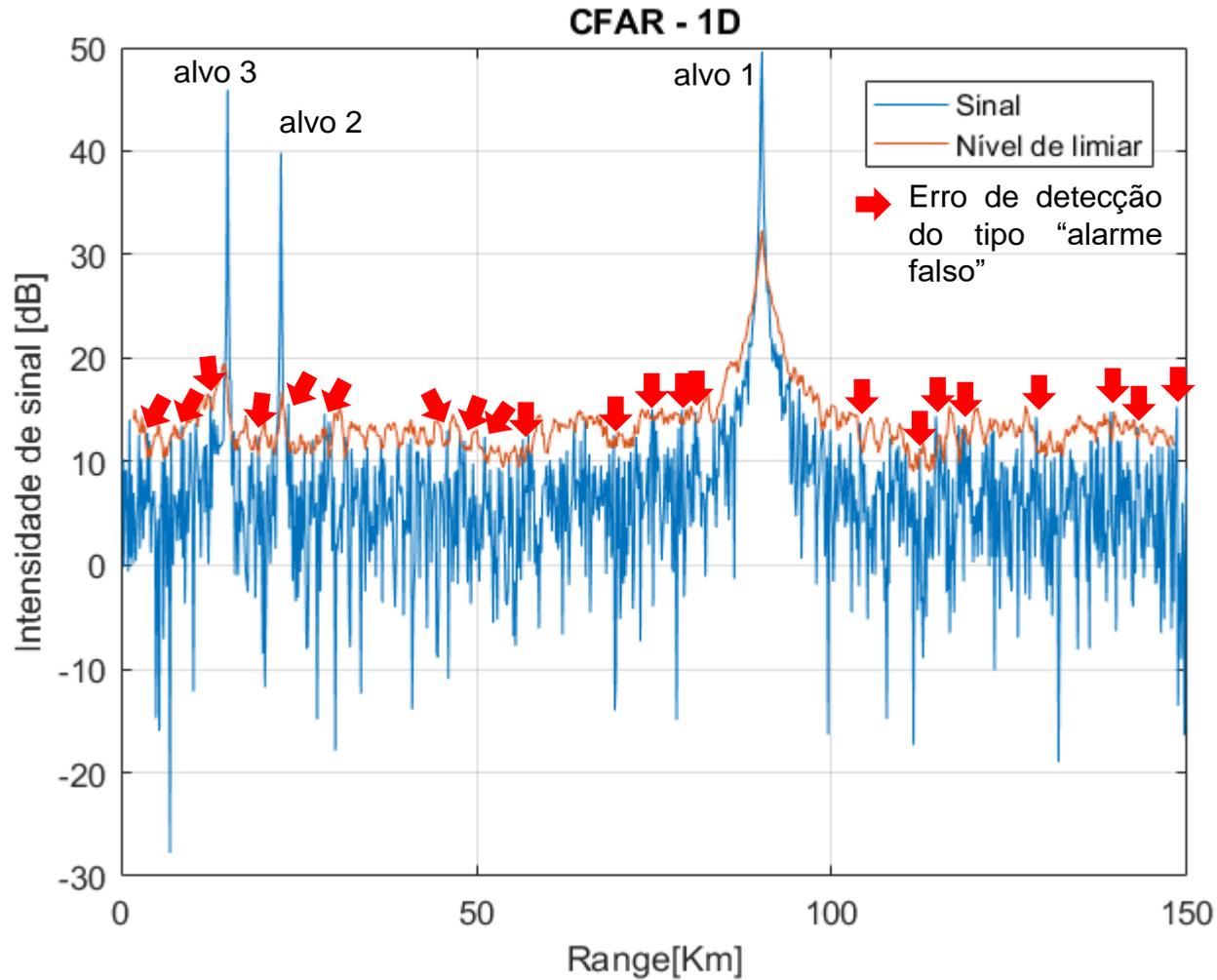
(a) “CA-CFAR” (*cell averaging* – CFAR):



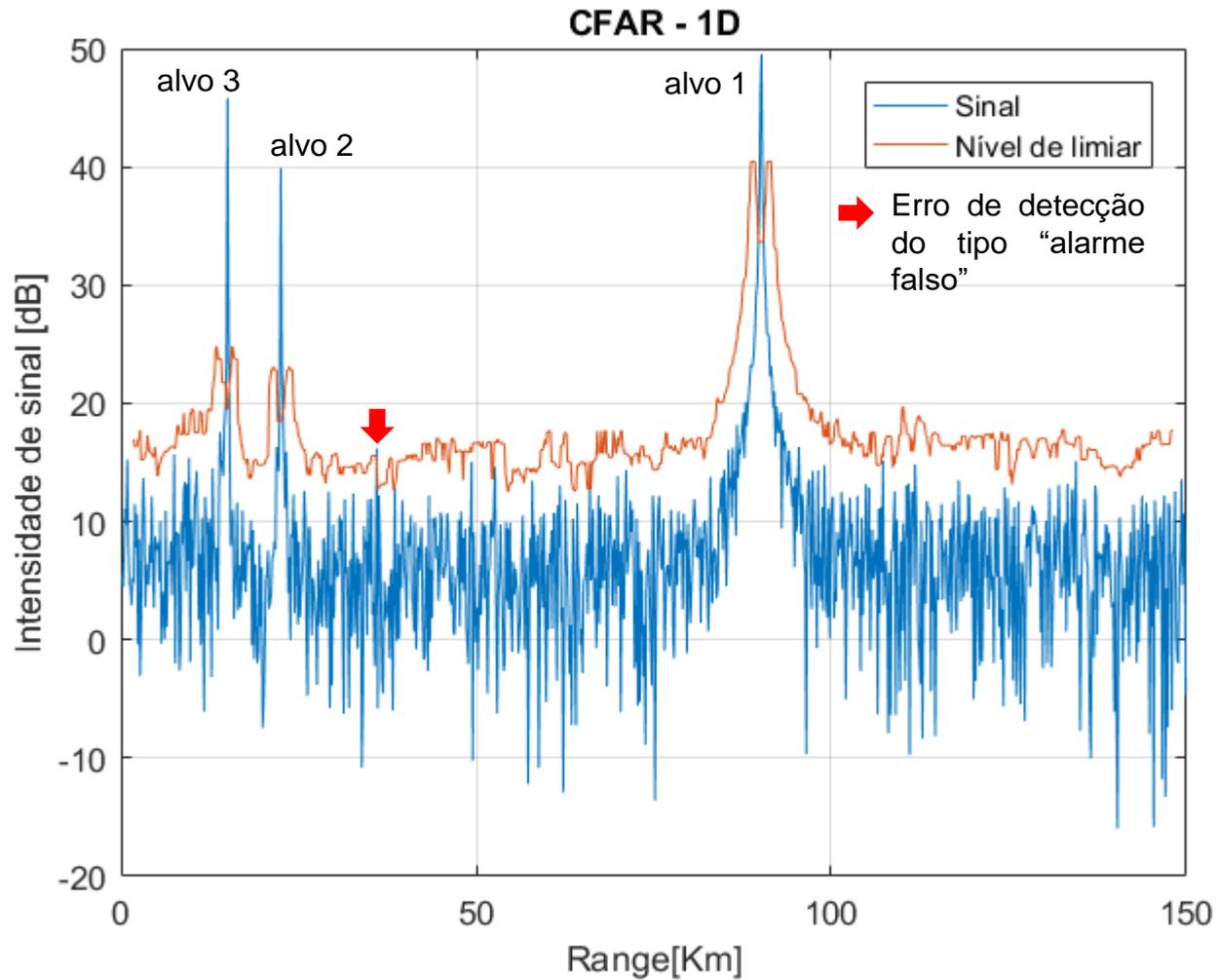
(b) “CAGO – CFAR” (*cell averaging greatest of* – CFAR):



(c) “CASO – CFAR” (*cell averaging smallest of* – CFAR):



(d) “OS – CFAR” (*ordered statistic* – CFAR):



Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

(e) Não houve erro de detecção do tipo “alvo não detectado” nos itens (a), (b), (c) e (d).

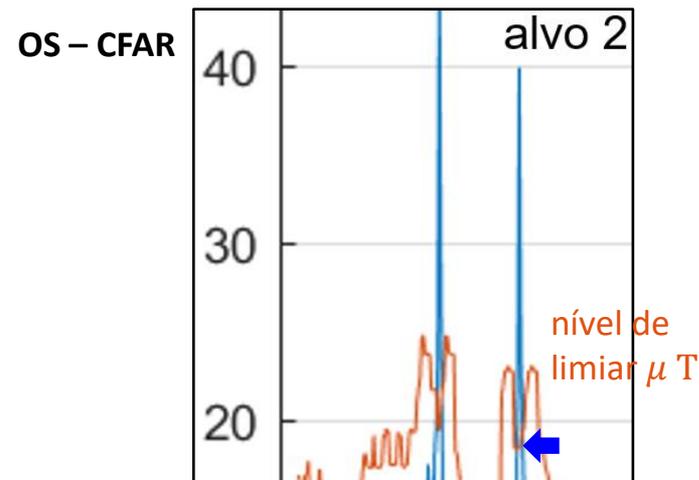
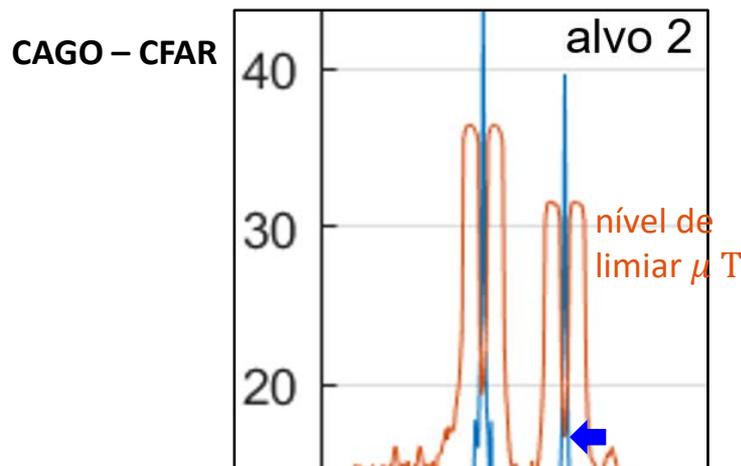
(f) Houve erro de detecção do tipo “alarme falso” nos itens (a),(b), (c) e (d), conforme identificado pelas setas **vermelhas** no gráfico plotado para a solução de cada item.

Múltiplos erros de detecção do tipo “alarme falso” ocorreram para os modos “CA–CFAR” (*cell averaging* – CFAR) e “CASO – CFAR” (*cell averaging smallest of* – CFAR).

Apenas um erro de detecção do tipo “alarme falso” ocorreu para os modos “CAGO – CFAR” (*cell averaging greatest of* – CFAR) e “OS – CFAR” (*ordered statistic* – CFAR).

(g) De (e) e (f) fica evidenciado o número muito menor de erros de detecção do tipo “alarme falso” para os modos “CAGO – CFAR” (*cell averaging greatest of* – CFAR) e “OS – CFAR” (*ordered statistic* – CFAR). Ficam descartados, portanto, os modos “CA–CFAR” (*cell averaging* – CFAR) e “CASO – CFAR” (*cell averaging smallest of* – CFAR).

Continuando a análise, observe que no *range* exato do eco de menor intensidade (alvo 2) o valor em [dB] da curva do nível de limiar μT para o “CAGO – CFAR” é ligeiramente menor que o valor da curva μT para o “OS – CFAR”, sugerindo que o “CAGO – CFAR” é um detector ligeiramente mais sensível que o “OS – CFAR” para ecos de intensidade fraca nas condições deste cenário de operação, conforme apontado pelas setas **azuis** abaixo. Isto indica que o “CAGO – CFAR” possivelmente resultará em menor probabilidade de erro de detecção do tipo “alvo não detectado” para ecos de intensidade muito fraca quando comparado com o “OS – CFAR”.



Detecção de alvos – algoritmo *Constant False Alarm Rate* (CFAR)

Portanto, apesar do quase empate, o melhor modo de operação do CFAR–1D para este cenário operacional do radar é o “CAGO – CFAR”, muito embora o desempenho do “OS – CFAR” seja quase igual.

Observação: Note que o ruído Gaussiano é gerado pela função `randn()` no *script* `Exemplo12.m`, conforme linhas de código abaixo:

```
% Gera NumAmostras das componentes I e Q do ruído Gaussiano na entrada da FFT:  
Ruido_I = AmplitudeRuido * randn(1, NumAmostras);  
Ruido_Q = AmplitudeRuido * randn(1, NumAmostras);
```

Como a inicialização de `randn()` é aleatória, é perfeitamente normal que o número de erros de detecção do tipo “alarme falso” observado na solução dos itens (a), (b), (c) e (d) varie ligeiramente a cada vez que o *script* `Exemplo12.m` for executado.

Esta observação quanto à inicialização aleatória também é válida para a função `rand()`, que gera uma sequência de números randômicos de distribuição uniforme. Usaremos a função `rand()` no Cap I.10.

Target tracking (rastreamento do alvo)

Além de registrar as coordenadas esféricas ($range_0, \theta_0, \phi_0$) e a palavra de identificação de cada alvo, que são os parâmetros principais de interesse para efeito de determinar o estado cinemático (posição, velocidade, aceleração) de cada alvo detectado pelo CFAR, alguns sistemas TT registram também em sua memória o desvio Doppler (velocidade radial) e outros parâmetros secundários do alvo (https://en.wikipedia.org/wiki/Radar_tracker).

Os valores ($range_0, \theta_0, \phi_0$) registrados ao longo do tempo na memória do sistema TT são resultado de medidas da posição radial $range_0$ e da posição angular (θ_0, ϕ_0) do alvo. Estas medidas são corrompidas tanto pelo **ruído de medição** que resulta da incerteza intrínseca a qualquer medida como também pelo **ruído do processo** que resulta da incerteza resultantes do desvio do modelo cinemático do alvo. Por exemplo, se o ângulo que a antena do radar efetua a varredura do volume de interesse for controlado por um posicionador angular mecânico (*gimbal* – ver <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/GFARM.pdf>), instabilidades mecânicas no *gimbal* (folga, deformação elástica, etc...) são uma possível origem do ruído na medição da posição angular (θ_0, ϕ_0). Se a antena não estiver protegida por um *radome* (<https://en.wikipedia.org/wiki/Radome>), a situação se torna mais crítica em consequência da força de arrasto aerodinâmico que ocorre na estrutura da antena, estrutura que está imersa no campo de velocidade do vento atmosférico, o qual varia aleatoriamente no tempo, aumentando a instabilidade mecânica do *gimbal*. No caso de um *phased array*, este ruído na medição da posição angular (θ_0, ϕ_0) pode originar-se do *scan blindness* que ocorre para alguns ângulos (θ, ϕ) em consequência da onda EM de superfície que se estabelece em determinados substratos dielétricos e/ou em determinadas condições de acoplamento mútuo entre os elementos do *array* (ver pag 42 de <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/PAA.pdf>). Erros na detecção efetuada pelo CFAR, como erros do tipo “alarme falso” e “alvo não detectado”, são possíveis e importantes fontes de ruído do processo na posição radial $range_0$ do alvo. Efeitos atmosféricos e ambientais na propagação da onda EM dos ecos refletidos nos alvos, que estudaremos no Cap II.1, são talvez a maior causa do ruído de medição. Não raro, o ruído de medição se confunde com o ruído do processo e vice-versa.

O resultado de cada medição ($range_0, \theta_0, \phi_0$) é, portanto, uma estimativa do valor verdadeiro das coordenadas ($range_0, \theta_0, \phi_0$) do alvo, mas corrompido pelo ruído intrínseco ao processo de medição. A estimativa, portanto, exhibe uma incerteza intrínseca associada. A incerteza pode ser reduzida se usarmos a série de estimativas armazenadas na memória do sistema TT ao longo do tempo t , combinando os valores das estimativas com as leis cinemáticas que modelam o movimento do alvo, de modo a se obter uma estimativa aprimorada das coordenadas verdadeiras do alvo ao longo de t .

As coordenadas verdadeiras do alvo, sua velocidade e sua aceleração são denominadas de **estado do alvo**. Os vetores de estado são definidos nas direções dos vetores unitários das coordenadas espaciais cartesianas (x, y, z). Neste contexto, o estado é melhor descrito por um **vetor de estado**, cujas componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ são valores reais.

Target tracking (rastreamento do alvo)

Nesse contexto, o objetivo do sistema de *target tracking* (TT) de um radar é **produzir a estimativa menos incerta do estado do alvo ao longo do tempo, com base em medições ruidosas**. A estimativa da trajetória do estado do alvo ao longo do tempo é denominada de **track** (trilha). A produção da estimativa menos incerta para cada *track* fica ao encargo do *track filter*, que é o bloco principal do sistema TT. Usualmente o *track filter* é um filtro de Kalman (<https://www.fccdecastro.com.br/pdf/KFTFUS.pdf>), conforme veremos adiante neste capítulo.

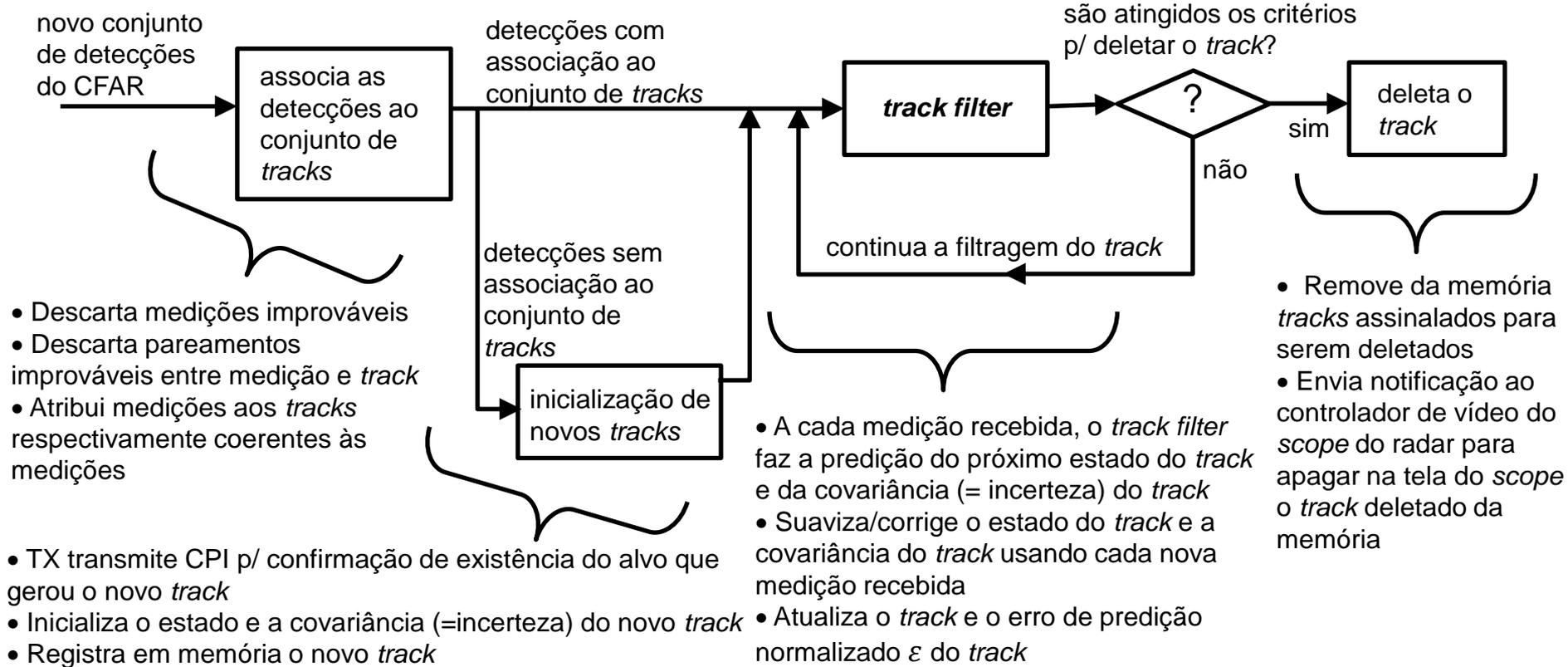
O ruído do processo, em particular, torna o *tracking* de alvos um problema desafiador. Erros de detecção do tipo “alarme falso” na saída do CFAR podem fazer com que o *track* se desvie da verdadeira trajetória do alvo. Erros de detecção do tipo “alvo não detectado” podem aumentar a incerteza associada ao *track*. Se vários alvos estiverem presentes na mesma vizinhança (no limite da resolução angular e/ou da resolução de *range*), medições não resolvidas ou caminhos cruzados podem dificultar a associação de novas medições com o *track* correto. Além disso, devido à natureza da propagação da onda EM irradiada, o radar mede a posição do alvo em coordenadas esféricas (*range*, θ , ϕ), enquanto que, sob o ponto de vista da complexidade computacional do *track filter*, que é o filtro que estima cada *track*, é geralmente desejável rastrear o alvo em coordenadas cartesianas (x, y, z). A transformação que se faz necessária das coordenadas esféricas para coordenadas cartesianas é uma transformação não-linear (ver expressões em verde no slide 63 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf), e isto complica a estabilidade numérica do processamento.

A saída do CFAR para cada alvo detectado já é suficiente para gerar um *blip* no *scope* do radar, de modo que nem sempre é necessário um sistema de *tracking*, conforme veremos no Cap III para o caso de um radar passivo. No entanto, quando o cenário operacional do radar é repleto de *clutter* e/ou sinais de *jamming* e/ou comportamento cinemático anômalo de alvos, o sistema de *target tracking* é uma necessidade absoluta.

O CFAR produz um novo conjunto de detecções a cada CPI. Cada “detecção” fornece o resultado da medição da posição ($range_0, \theta_0, \phi_0$) do alvo e, eventualmente, da velocidade radial do alvo obtida através do desvio Doppler do eco. Para cada conjunto de detecções efetuada pelo CFAR é possível estimar o ruído de medição e o ruído do processo com base no histórico gravado em memória da SNR (*signal to noise ratio*) do sinal dos ecos recebidos e em um identificador (*time stamp*) do instante de cada gravação. Uma vez que mais de um alvo pode ser detectado e rastreado ao mesmo tempo, cada um com SNR distinta das demais, o primeiro passo do *tracking* é associar as detecções com os *tracks* existentes, i.e., determinar quais detecções são coerentes com os *tracks* já registrados em memória e que descrevem a trajetória de alvos que já estão sendo rastreados pelo TT, de modo que a correta detecção seja usada para atualizar o respectivo *track*. Em cenários de operação com alta densidade de alvos isto pode resultar em um “pesadelo” em termos de complexidade computacional.

O ciclo de *tracking*

Quaisquer detecções que não puderem ser associadas a *tracks* já registrados em memória são candidatas a novos alvos e, portanto, são tratadas por um processo de inicialização de *tracks*, conforme bloco “inicialização de novos *tracks*” no diagrama abaixo. Antes de iniciar um novo *track* o *pencil beam* do *phased array* é mantido na posição angular (θ, ϕ) do CPI anterior e N novos CPIs de confirmação são transmitidos para verificar a validade da detecção e garantir que ela não seja um alarme falso. Os N ecos (de alvos e/ou de *clutter*) resultantes dos N novos CPIs são analisados por um algoritmo para reconhecimento de padrões para efeito de decidir se o TT deve promover um *track* provisório para um *track* confirmado. Mais recentemente técnicas de inteligência artificial têm sido utilizadas para este fim, não raro substituindo inteiramente a clássica abordagem por *track filter* $\alpha - \beta$, $\alpha - \beta - \gamma$ e Kalman, que veremos adiante neste capítulo. *Target tracking* através de inteligência artificial foge ao escopo de nosso estudo, mas algumas propostas neste sentido encontram-se em <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/OMTTRNN.pdf> e <https://www.fccdecastro.com.br/pdf/DDANMTTC.pdf>.



O ciclo de *tracking*

Cada novo *track* estabelecido como válido é inserido na memória do TT e o estado inicial do novo *track* e sua covariância (= incerteza) são determinados usando um procedimento de inicialização adequado ao tipo de *track filter* adotado no TT.

A seguir, os dados de medição associados a cada *track* são enviados ao *track filter*, que estima a trajetória do respectivo alvo com base no **estado do alvo**. O estado do alvo é representado pelos vetores de posição, velocidade e aceleração do mesmo, que, em geral, são estimados através da sistemática **PRC** (Predição – Residual – Correção) de 3 etapas: **(1º) O *track filter* faz a predição do estado futuro do alvo com base no estado atual e de acordo com o modelo cinemático que gera o espaço de estados do alvo (no caso, o modelo cinemático são as equações de movimento de Newton – ver https://en.wikipedia.org/wiki/Equations_of_motion).** **(2º)** A seguir o *track filter* recebe nova medição da posição do alvo e subtrai da medição a predição efetuada, com isto definindo o **residual ou inovação** dado por **residual = medição – predição**, que é um indicativo do erro instantâneo da predição efetuada. **(3º)** Finalmente, o *track filter* **ajusta/corriga (i.e, filtra) a predição efetuada** somando ao respectivo estado predito o valor do residual ponderado por um respectivo fator de proporcionalidade que pode ser uma constante (que é o caso do filtro $\alpha - \beta$ e do filtro $\alpha - \beta - \gamma$, conforme veremos) ou uma variável adaptativamente ajustada (que é o caso do filtro de Kalman, conforme veremos). Este processo resulta na suavização da trajetória de estado do alvo, minimizando a ação do ruído (incertezas) que ocorrem na medição e no modelo do processo, e, conseqüentemente **produzindo a estimativa menos incerta do estado do alvo ao longo do tempo**.

Um erro de predição normalizado ε é atribuído a cada *track* com base na distância entre medição e predição normalizada pela covariância do *track*. Se ε exceder um limite superior pré-estabelecido pode ser indício de uma associação incorreta entre medição e *track* ou indício de um modelo cinemático inadequado para o alvo. Se ε cair abaixo de um limite inferior pode ser indício de que o ruído do processo que modela a cinemática do alvo é muito grande no âmbito do processo iterativo efetuado pelo filtro de Kalman.

Os *tracks* registrados em memória devem ser eventualmente descartados em algum momento. Por exemplo, quando um alvo se move para fora do *range* de detecção do radar. Outra situação em que um *track* deve ser deletado é conforme segue: Para um único erro de detecção no CFAR do tipo “alvo não detectado” o *track filter* adota como recurso à situação de erro usar a medição válida anterior como entrada. O *track filter* pode usar este recurso para alguns poucos erros de detecção “alvo não detectado” que ocorrerem em sequência na saída do CFAR. No entanto, a falha em associar uma nova detecção a um *track* para um número mínimo de iterações acionará o processo indicado no bloco “deleta o *track*” no diagrama do slide anterior.

Alternativamente, um histórico recente de elevado erro de predição normalizado ε pode acionar o bloco “deleta o *track*”. Quando um *track* é deletado, a memória do TT deve ser atualizada. Uma notificação é enviada ao controlador de vídeo do *scope* do radar para apagar na tela do *scope* o *track* deletado da memória.

No âmbito da operação do ciclo de *tracking* mostrado no slide 170, a produção da estimativa menos incerta para cada *track* fica ao encargo do *track filter*, que é o bloco principal do sistema TT. Neste contexto, passamos agora a estudar os princípios do operação do *track filter*, seguido do estudo de três abordagens clássicas para implementação do *track filter*: o filtro $\alpha - \beta$, o filtro $\alpha - \beta - \gamma$ e o filtro de Kalman.

O objetivo do *track filter* é produzir uma estimativa a mais exata e precisa possível da posição, velocidade e aceleração do alvo na presença da incerteza gerada pelo **ruído de medição** e pelo **ruído do processo**, conforme já discutido em slides anteriores. As incertezas de medição (i.e., o ruído de medição) dependem de muitos fatores, como ruído térmico no *front end* do RX, incertezas mecânicas no posicionador angular da antena, efeitos atmosféricos na propagação da onda EM dos ecos e até na ação do vento na estrutura da antena. Há também incertezas no modelo do processo (i.e., o ruído do processo) que representa o movimento do alvo, como, por exemplo, manobras súbitas efetuadas pelo alvo. O radar transmite a onda EM na direção do alvo com um determinado intervalo de repetição de pulso *PRI*. A partir do sinal do eco refletido no alvo que retorna ao radar, o sistema de *target tracking* (TT) do radar estima o futuro estado do alvo (posição, velocidade e aceleração) com base na predição e subsequente filtragem a partir do estado anterior do alvo. A predição da posição, velocidade e aceleração do alvo (= predição do estado do alvo) é calculada usando as equações de movimento de Newton (https://en.wikipedia.org/wiki/Equations_of_motion), dadas por:

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{v}_0 \Delta t + \frac{1}{2} \underline{a} \Delta t^2 \quad [\text{m}] \quad (111)$$

onde

$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} [\text{m}]$ é o vetor que define a posição futura do alvo.

$\underline{v}_0 = \begin{bmatrix} v_{x0} \\ v_{y0} \\ v_{z0} \end{bmatrix} [\text{m/s}]$ é o vetor que define a velocidade inicial do alvo.

$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} [\text{m}]$ é o vetor que define a posição inicial do alvo.

$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix} [\text{m/s}^2]$ é o vetor que define a aceleração do alvo.

$\Delta t[\text{s}]$ é o intervalo de tempo entre duas atualizações do *track* do alvo.

Expandindo (111) em suas componentes Cartesianas em \mathbb{R}^3 (i.e., em 3 dimensões x , y e z) obtemos:

$$x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_x \Delta t^2 \quad [\text{m}] \quad (112)$$

$$y = y_0 + v_{y0} \Delta t + \frac{1}{2} a_y \Delta t^2 \quad [\text{m}] \quad (113)$$

$$z = z_0 + v_{z0} \Delta t + \frac{1}{2} a_z \Delta t^2 \quad [\text{m}] \quad (114)$$

A posição $\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ [m], a velocidade $\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$ [m/s] e a aceleração $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{bmatrix}$ [m/s²] definem o **estado do alvo** e (111)

e/ou (112) – (114) definem o modelo do **espaço de estados**. O estado atual ou medido é a entrada do *track filter* e a predição do estado futuro é uma das saídas do *track filter*. A predição do estado futuro do alvo envolve processamento e esforço computacional dado que as medições apresentam erros aleatórios e incerteza, que constituem o denominado **ruído de medição**, conforme já discutimos em slides anteriores.

Além disso, o movimento do alvo não segue estritamente o modelo cinemático definido por (111) devido ao vento, arrasto aerodinâmico, manobras súbitas efetuadas pelo alvo e por aí vai. Esta incerteza no modelo do espaço de estados é chamada de **ruído do processo**. Tanto o ruído do processo quanto o ruído da medição podem resultar em uma estimativa inadequada para a posição alvo. A função do *track filter* é, portanto, minimizar estas incertezas no estado do alvo.

Um dos mais simples algoritmos para *tracking* de alvos, e que apresenta baixa complexidade computacional com razoável desempenho, é o filtro $\alpha - \beta$, conforme estudaremos nos próximos slides.

O filtro $\alpha - \beta$

O *track filter* $\alpha - \beta$ é um filtro simples para estimação de parâmetros e suavização de trajetórias de estado. O filtro $\alpha - \beta$ é similar ao filtro de Kalman que estudaremos adiante neste capítulo. Mas, ele difere do filtro de Kalman na 3ª etapa da sistemática PRC referida no slide 171, em que é efetuado o ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição realizada na 1ª etapa. O ajuste/correção efetuado na 3ª etapa do *track filter* $\alpha - \beta$ é parametrizada por constantes α e β , diferente do filtro de Kalman em que o ajuste/correção efetuado na 3ª etapa é controlado pelo ganho de Kalman K_k dado pela equação (134) do slide 191, ganho que é uma variável ajustada adaptativamente.

O filtro $\alpha - \beta$ assume que o modelo cinemático do alvo pode ser aproximado por duas variáveis de estado, em que a primeira variável de estado (posição do alvo) é determinada pela integração da segunda variável de estado (velocidade do alvo) ao longo do tempo. **Assume também que a velocidade do alvo permanece constante ao longo do intervalo de tempo Δt entre as medições (suposição que ocorre em muitas situações reais em que Δt é pequeno, como a situação que decorre da rápida varredura espacial efetuada por antenas baseadas em *phased-arrays*).** Neste contexto, executando a 1ª etapa da sistemática PRC (Predição) referida no slide 171, a posição atual do alvo é projetada à frente no tempo para o instante da próxima iteração k através da seguinte predição baseada no modelo cinemático do alvo:

$$\underline{x}_{k,k-1} = \underline{x}_{k-1,k-1} + \underline{v}_{k-1,k-1} \Delta t \quad [\text{m}] \quad (115)$$

onde

$\underline{x}_{k-1,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a posição [m] iterativamente filtrada do alvo na iteração de atualização $k - 1$ dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

$\underline{v}_{k-1,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a velocidade [m/s] iterativamente filtrada do alvo na iteração de atualização $k - 1$ dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

$\underline{x}_{k,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a predição de posição [m] do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

Δt [s] é o intervalo de tempo entre duas atualizações das medições do alvo.

Ainda, na 1ª etapa da sistemática PRC a velocidade é assumida ser constante no intervalo de tempo Δt entre as medições, de modo que a predição $\underline{v}_{k,k-1}$ do valor da velocidade do alvo é igual ao valor atual $\underline{v}_{k-1,k-1}$ da velocidade do alvo, i.e.:

$$\underline{v}_{k,k-1} = \underline{v}_{k-1,k-1} \quad [\text{m/s}] \quad (116)$$

O filtro $\alpha - \beta$

Como o filtro $\alpha - \beta$ é um modelo dinâmico simplificado, é esperado que a medição \underline{z}_k da posição do alvo e o valor da predição $\underline{x}_{k,k-1}$ da posição do alvo dada por (115) se desviem um do outro devido a ruído de medição e demais efeitos não incluídos no modelo cinemático, conforme já discutimos em slides anteriores. Este desvio, cuja determinação é efetuada na 2ª etapa da sistemática PRC (Residual) referida no slide 171, é denominado **residual** ou **inovação** e é expresso como:

$$\text{onde} \quad \underline{r}_k = \underline{z}_k - \underline{x}_{k,k-1} \quad [\text{m}] \quad (117)$$

\underline{z}_k é o vetor que define a medição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{x}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

\underline{r}_k é o vetor que define o residual da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

Na 3ª etapa da sistemática PRC (Correção) referida no slide 171 o filtro $\alpha - \beta$ usa os dois parâmetros constantes e configuráveis α e β para ajustar/corrigir (i.e., filtrar) a predição do estado efetuada na 2ª etapa, somando o valor do residual \underline{r}_k dado por (117) ponderado por respectivos fatores de proporcionalidade α e β às variáveis de estado preditas por (115) e (116) (i.e., posição $\underline{x}_{k,k-1}$ e velocidade $\underline{v}_{k,k-1}$) a cada iteração k de duração Δt ao longo do tempo:

$$\underline{x}_{k,k} = \underline{x}_{k,k-1} + \alpha \underline{r}_k \quad [\text{m}] \quad (118)$$

$$\text{onde} \quad \underline{v}_{k,k} = \underline{v}_{k,k-1} + \beta \frac{\underline{r}_k}{\Delta t} \quad [\text{m/s}] \quad (119)$$

α e β são parâmetros constantes e configuráveis que controlam o ajuste/correção (i.e., filtragem) respectivamente da predição da posição do alvo e da predição da velocidade do alvo a cada iteração k de duração Δt ao longo do tempo.

\underline{r}_k é o vetor que define o residual da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{x}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{v}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da velocidade [m/s] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{x}_{k,k}$ é o vetor que define a posição [m] filtrada do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração k .

$\underline{v}_{k,k}$ é o vetor que define a velocidade [m/s] filtrada do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração k .

Os ajustes no processo iterativo descrito por (118) e (119) consistem **em pequenos passos ao longo da direção estimada do gradiente do processo a cada instante**, sendo o tamanho dos passos controlados pelos parâmetros α e β . À medida que as medições são feitas e os ajustes vão sendo sequencialmente efetuados a cada iteração, o erro no estado filtrado é reduzido.

O filtro $\alpha - \beta$

Os valores ótimos de α e β são, na prática, determinados experimentalmente. Em geral, valores maiores de α e β resultam em respostas mais rápidas às mudanças transitórias, enquanto valores menores de α e β reduzem o nível de ruído no estado estimado. Portanto, os valores de α e β devem ser positivos e pequenos para uma boa convergência e estabilidade do processo iterativo. Valores recomendados típicos para α e β são dados por (120), (121) e (122) abaixo:

$$0 < \alpha < 1 \quad (120)$$

$$0 < \beta \leq 2 \quad (121)$$

$$0 < 4 - 2\alpha - \beta \quad (122)$$

Na prática, é observado que ocorrerá amplificação de ruído se $\beta \geq 1$ e que ocorrerá atenuação de ruído se $0 < \beta < 1$.

A sequência de procedimentos que descreve o algoritmo para o filtro $\alpha - \beta$ é conforme tabela abaixo:

Passo	Procedimento
1	Definir os valores para os parâmetros α e β .
2	Inicializar $\underline{x}_{0,0}$ [m] e $\underline{v}_{0,0}$ [m/s] com valores de medição iniciais ou definir ambos como zero.
3	Efetuar a predição $\underline{x}_{k,k-1}$ [m] e $\underline{v}_{k,k-1}$ [m/s] do estado futuro do alvo, usando para isto (115) e (116) com as medições $\underline{x}_{k-1,k-1}$ e $\underline{v}_{k-1,k-1}$ (1ª etapa da sistemática PRC referida no slide 171).
4	Determinar o residual \underline{r}_k [m] da posição do alvo, usando para isto (117) (2ª etapa da sistemática PRC referida no slide 171).
5	Ajustar corrigindo (= filtrar) a predição do estado, usando para isto (118) e (119) (3ª etapa da sistemática PRC referida no slide 171).
6	Atribuir à saída do filtro $\alpha - \beta$ os valores $\underline{x}_{k,k}$ [m] e $\underline{v}_{k,k}$ [m/s] obtidos em [5].
7	Incrementar $k = k + 1$, efetuar nova medição $\underline{x}_{k-1,k-1}$ da posição do alvo (proveniente do CFAR), e repetir [3]–[7].

Veremos a seguir um exemplo de operação de um *track filter* $\alpha - \beta$ unidimensional, no âmbito da operação de um radar automotivo simples, o qual precisa estimar unicamente a distância do alvo para evitar a colisão entre veículos. Embora seja um exemplo simples, ele é instrutivo no sentido de facilitar a compreensão do *track filter* em 3 dimensões (x, y, z) baseado no filtro de Kalman que estudaremos adiante neste capítulo.

O filtro $\alpha - \beta$

Exemplo 13: Um radar automotivo adota um *track filter* $\alpha - \beta$ em seu sistema de *target tracking* (TT). Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição inicial medida e sua velocidade inicial medida são respectivamente 2.5 [m] e 3.5 [m/s]. Sabe-se que a velocidade do alvo é constante ao longo do tempo. O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{Inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 50.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 1.4 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. O filtro é configurado com parâmetros $\alpha = 0.2$ e $\beta = 0.005$.

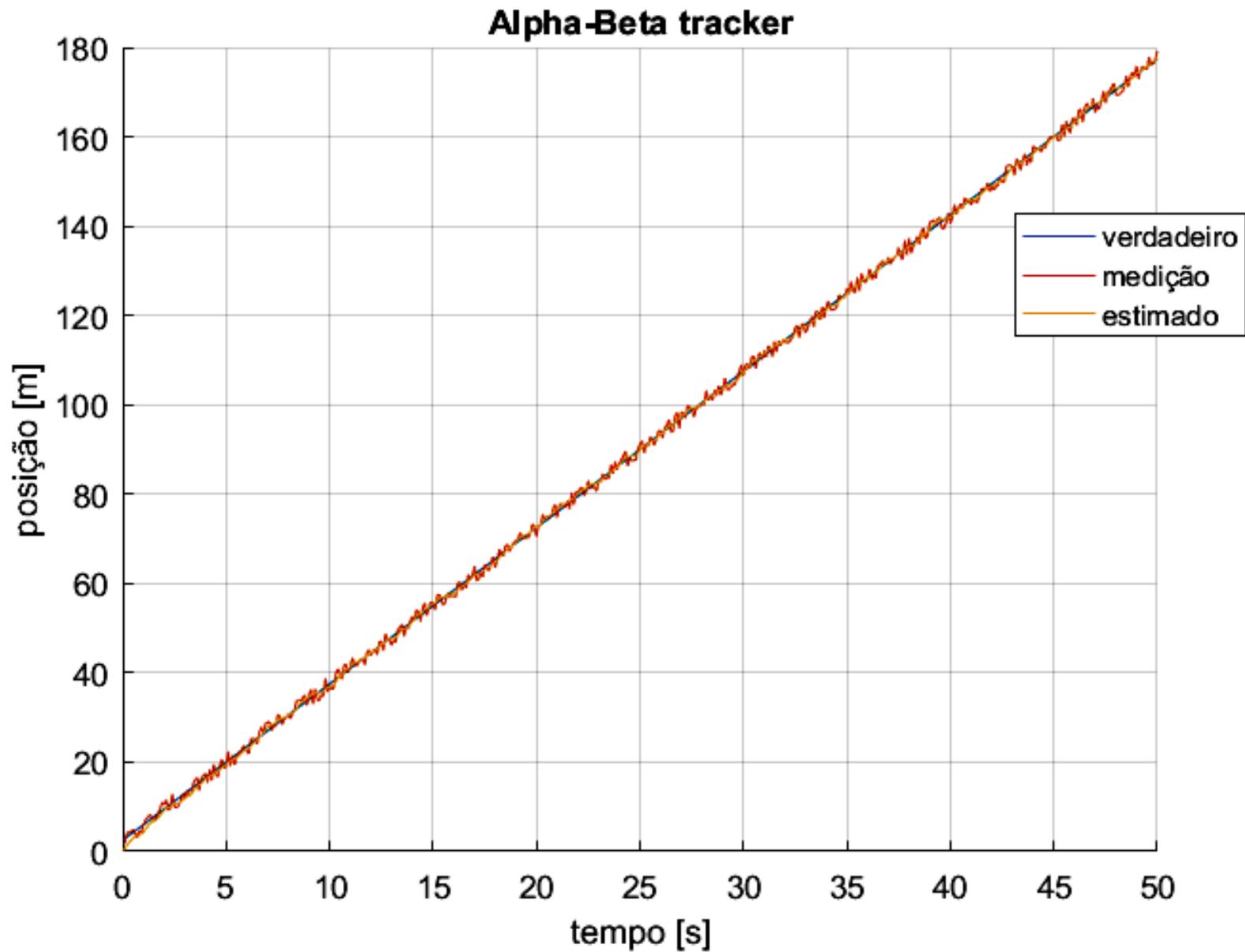
Pede-se:

- Determine e plote em um mesmo gráfico a curva ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, a curva da posição medida do alvo e a curva da posição do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta$.
- Aplique um *zoom* no gráfico obtido em (a) delimitando o tempo ao intervalo $0 < t < 15$ [s] e analise o comportamento da curva da posição do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta$.
- Determine e plote em um mesmo gráfico a curva ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e a curva da velocidade do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta$. Analise o comportamento da curva da velocidade do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta$.
- Plote a curva ao longo do tempo do residual da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo *track filter* $\alpha - \beta$. Analise o comportamento da curva do residual da posição do alvo.

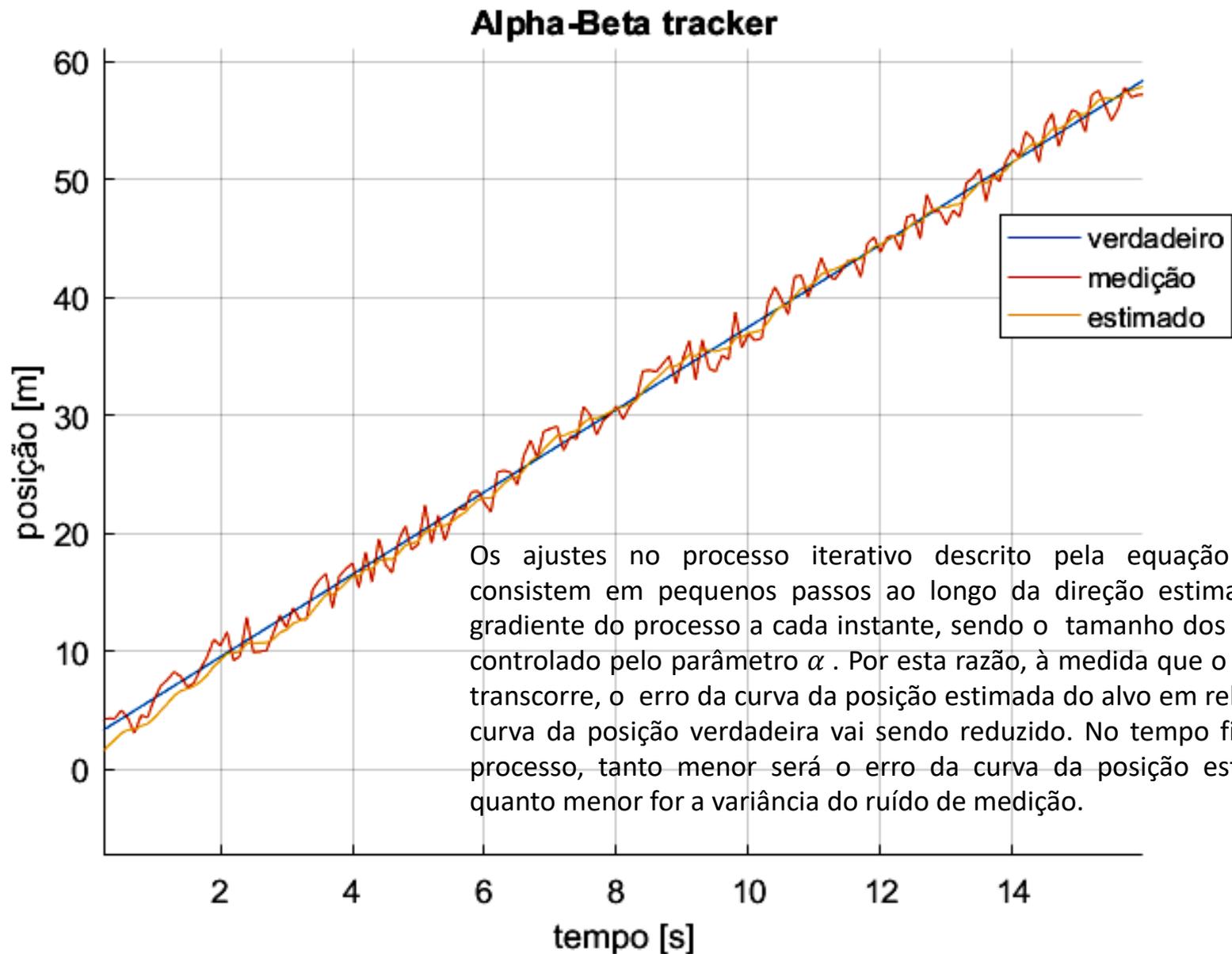
Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo13.m disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E13S177.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo13.m).

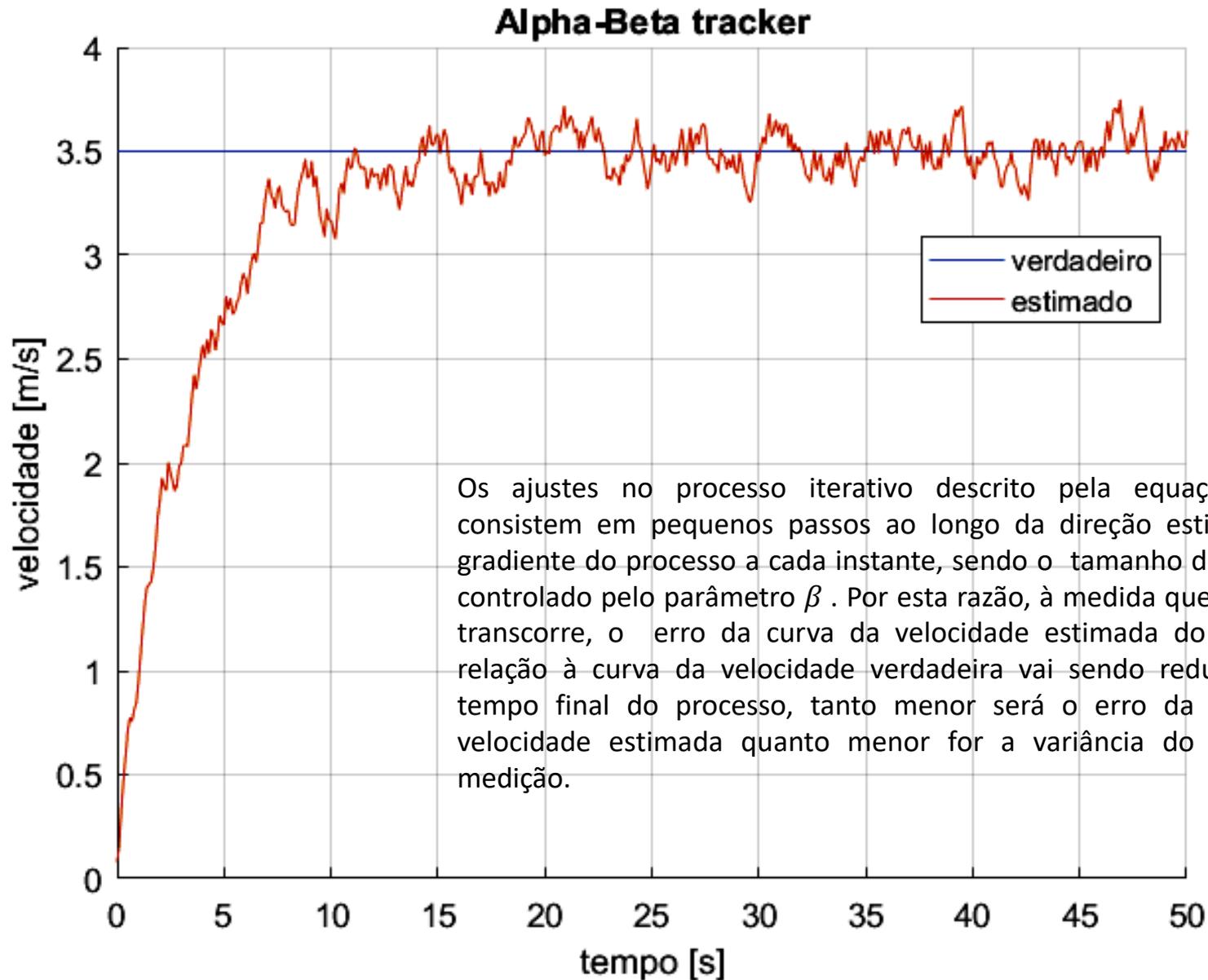
(a)



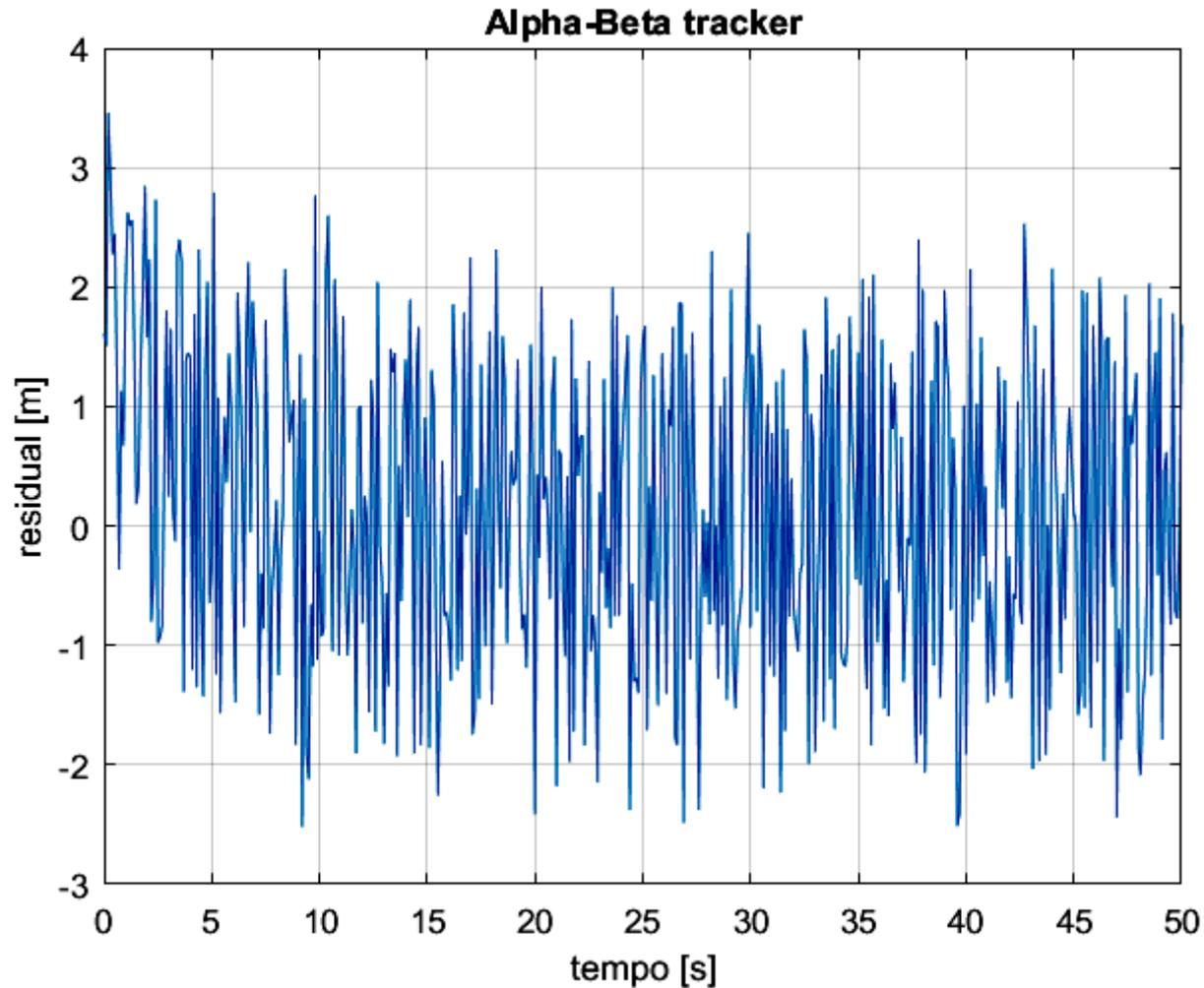
(b)



(c)



(d)



Os ajustes no processo iterativo descrito pela equação (118) consistem em pequenos passos ao longo da direção estimada do gradiente do processo a cada instante, sendo o tamanho dos passos controlado pelo parâmetro α . O residual é o desvio entre o valor da medição da posição do alvo e o valor da predição da posição do alvo ao longo deste processo iterativo. Por ser um processo iterativo baseado em gradiente, à medida que o tempo transcorre, o valor médio do residual vai sendo reduzido, conforme se observa no gráfico.

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$

Vimos nos slides anteriores que o filtro $\alpha - \beta$ assume que a velocidade do alvo permanece constante ao longo do intervalo de tempo Δt entre as medições. Em geral, esta suposição é válida para radares em que a antena é um *phased-array* (ver slides 52 a 116 de https://www.fccdecastro.com.br/pdf/CE_Cap_II.1_II.5.pdf), cuja varredura espacial é suficientemente rápida, resultando em um Δt suficientemente pequeno. No entanto, para radares em que a varredura espacial da antena é feita por um posicionador mecânico, como é o caso de antenas parabólicas, a varredura espacial pode não ser suficientemente rápida o que resulta em um Δt relativamente longo. Para estes casos, é necessário, portanto, modificar o filtro $\alpha - \beta$ para contemplar a aceleração do alvo.

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$ é uma extensão do filtro $\alpha - \beta$ em que a velocidade é obtida pela integração da aceleração. Neste contexto, é adicionada uma equação para a aceleração nas equações que descrevem o estado do alvo. É também acrescentado um terceiro parâmetro configurável γ que controla o processo iterativo que ajusta/corriga a predição da aceleração do alvo a cada iteração ao longo do tempo.

Assumindo que a aceleração do alvo permanece constante ao longo do intervalo de tempo Δt entre as medições, a posição atual do alvo é projetada para frente no tempo de modo a ser efetuada a predição de seu valor no próximo instante de amostragem. Isto é feito através de (1ª etapa da sistemática PRC (Predição) referida no slide 171) :

$$\underline{x}_{k,k-1} = \underline{x}_{k-1,k-1} + \underline{v}_{k-1,k-1}\Delta t + \underline{a}_{k-1,k-1} \frac{\Delta t^2}{2} \text{ [m]} \quad (123)$$

onde

$\underline{x}_{k-1,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a posição [m] iterativamente filtrada do alvo na iteração de atualização $k - 1$ dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

$\underline{v}_{k-1,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a velocidade [m/s] iterativamente filtrada do alvo na iteração de atualização $k - 1$ dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

$\underline{a}_{k-1,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a aceleração [m/s²] iterativamente filtrada do alvo na iteração de atualização $k - 1$ dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

$\underline{x}_{k,k-1}$ é o vetor em \mathbb{R}^3 que define a predição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração $k - 1$.

Δt [s] é o intervalo de tempo entre duas atualizações das medições do alvo.

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$

A predição da velocidade do alvo é obtida da sua aceleração:

$$\underline{v}_{k,k-1} = \underline{v}_{k-1,k-1} + \underline{a}_{k-1,k-1} \Delta t \quad [\text{m/s}] \quad (124)$$

A aceleração é assumida ser constante, de modo que a predição do valor da aceleração do alvo é igual ao valor atual da aceleração do alvo, i.e:

$$\underline{a}_{k,k-1} = \underline{a}_{k-1,k-1} \quad [\text{m/s}^2] \quad (125)$$

Assim como para o filtro $\alpha - \beta$, o filtro $\alpha - \beta - \gamma$ adota a definição de residual dada por (117), conforme 2ª etapa da sistemática PRC (Residual) referida no slide 171:

$$\underline{r}_k = \underline{z}_k - \underline{x}_{k,k-1} \quad [\text{m}] \quad (117)$$

onde

\underline{z}_k é o vetor que define a medição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{x}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

\underline{r}_k é o vetor que define o residual da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$

Na 3ª etapa da sistemática PRC (Correção) referida no slide 171 o filtro $\alpha - \beta - \gamma$ usa os três parâmetros constantes e configuráveis α , β e γ para ajustar/corriger (i.e, filtrar) a predição do estado efetuada na 2ª etapa, somando o valor do residual \underline{r}_k dado por (117) ponderado por respectivos fatores de proporcionalidade α , β e γ às variáveis de estado preditas por (123), (124) e (125) (i.e., posição $\underline{x}_{k,k-1}$, velocidade $\underline{v}_{k,k-1}$ e aceleração $\underline{a}_{k,k-1}$) a cada iteração k de duração Δt ao longo do tempo:

$$\underline{x}_{k,k} = \underline{x}_{k,k-1} + \alpha \underline{r}_k \quad [\text{m}] \quad (126)$$

$$\underline{v}_{k,k} = \underline{v}_{k,k-1} + \beta \frac{\underline{r}_k}{\Delta t} \quad [\text{m/s}] \quad (127)$$

$$\underline{a}_{k,k} = \underline{a}_{k,k-1} + \gamma \frac{2}{\Delta t^2} \underline{r}_k \quad [\text{m/s}^2] \quad (128)$$

onde

α , β e γ são parâmetros constantes e configuráveis que controlam o ajuste/correção (i.e., filtragem) respectivamente da predição da posição do alvo, da predição da velocidade do alvo, e da predição da aceleração do alvo a cada iteração k de duração Δt ao longo do tempo.

\underline{r}_k é o vetor que define o residual da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{x}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da posição [m] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{v}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da velocidade [m/s] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{a}_{k,k-1}$ é o vetor que define a predição da aceleração [m/s²] do alvo na iteração de atualização k .

$\underline{x}_{k,k}$ é o vetor que define a posição [m] filtrada do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração k .

$\underline{v}_{k,k}$ é o vetor que define a velocidade [m/s] filtrada do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração k .

$\underline{a}_{k,k}$ é o vetor que define a aceleração [m/s²] filtrada do alvo na iteração de atualização k dadas as medições até e inclusive a iteração k .

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$

Valores recomendados típicos para α , β e γ são dados por

$$\alpha = 1 - s^2 \quad (129)$$

$$\beta = 2(1 - s^2) \quad (130)$$

$$\gamma = \beta^2 / (2\alpha) \quad (131)$$

$$0 \leq s < 1 \quad (132)$$

O filtro $\alpha - \beta - \gamma$

Exemplo 14: Um radar automotivo adota um *track filter* $\alpha - \beta - \gamma$ em seu sistema de *target tracking* (TT). Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição, velocidade e aceleração iniciais medidas são respectivamente 1.3 [m], 3.5 [m/s] e 3.0 [m/s²]. Sabe-se que a aceleração do alvo é constante ao longo do tempo. O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 100.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 1.4 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. O filtro é configurado com parâmetros $\alpha = 0.08$, $\beta = 0.002$ e $\gamma = 3.0 \times 10^{-5}$.

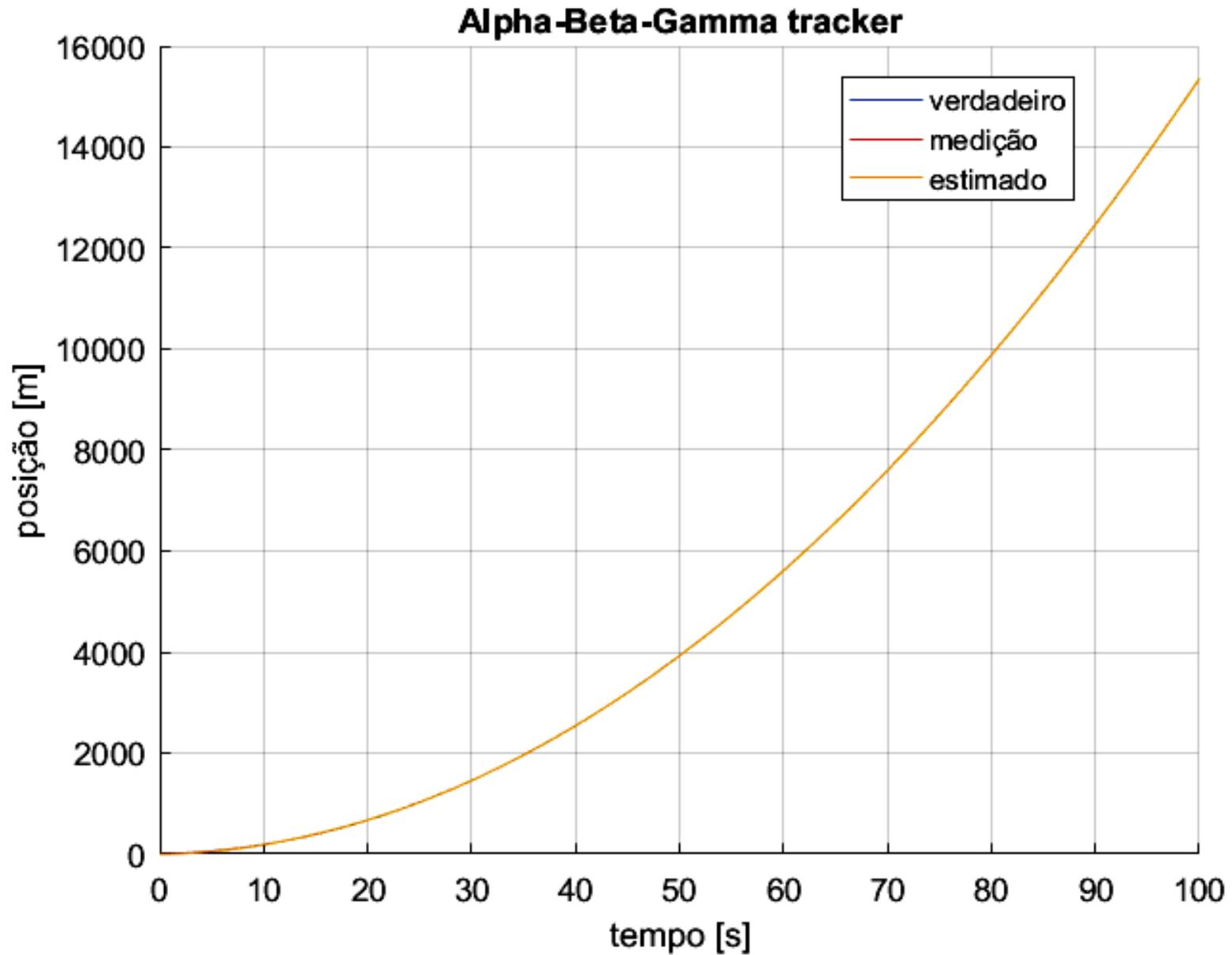
Pede-se:

- (a) Determine e plote em um mesmo gráfico a curva ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, a curva da posição medida do alvo e a curva da posição do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta - \gamma$.
- (b) Determine e plote em um mesmo gráfico a curva ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e a curva da velocidade do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta - \gamma$.
- (c) Determine e plote em um mesmo gráfico a curva ao longo do tempo da aceleração verdadeira do alvo e a curva da aceleração do alvo estimada pelo *track filter* $\alpha - \beta - \gamma$.
- (d) Plote a curva ao longo do tempo do residual da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo *track filter* $\alpha - \beta - \gamma$.

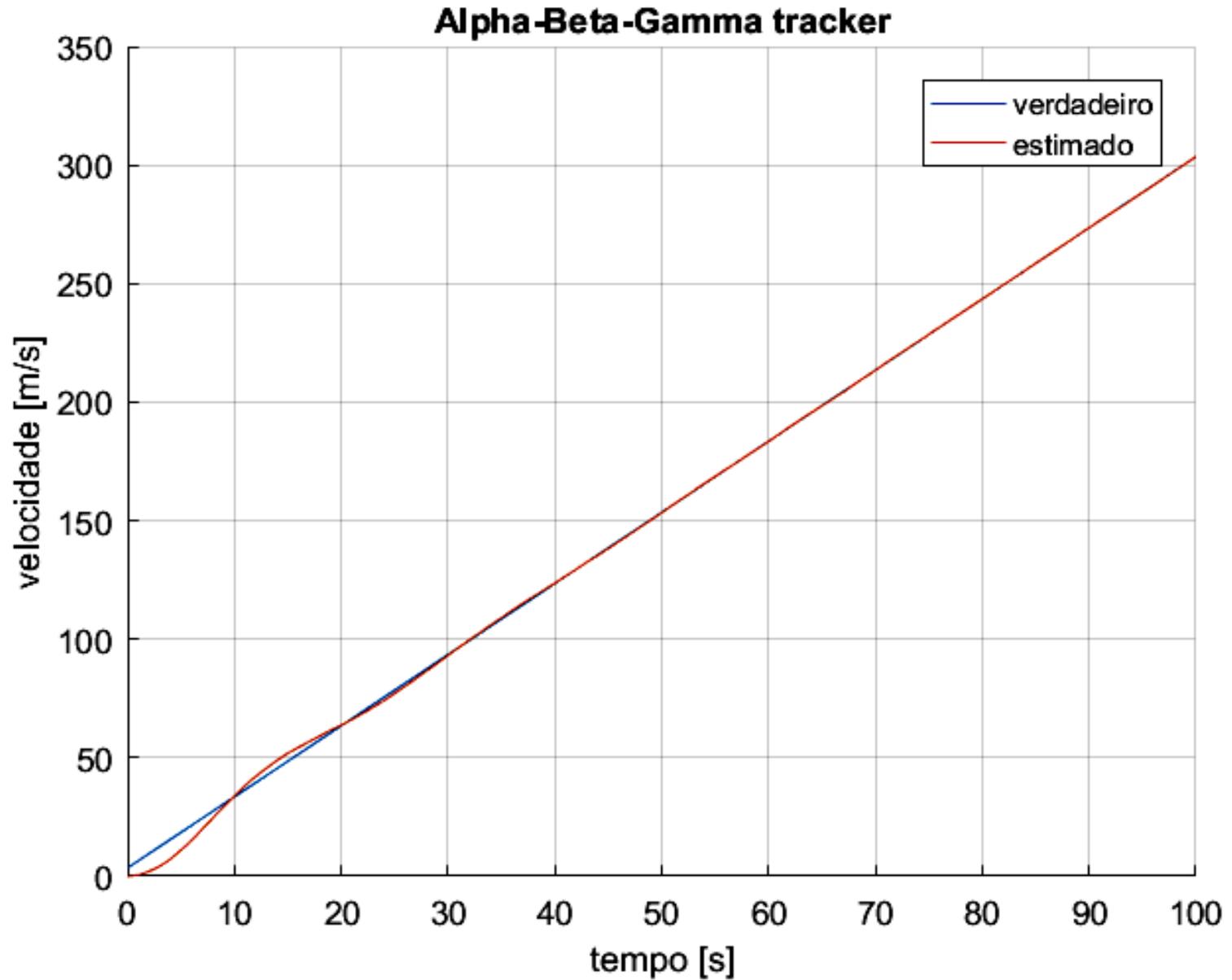
Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo14.m disponível em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E14S186.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo14.m).

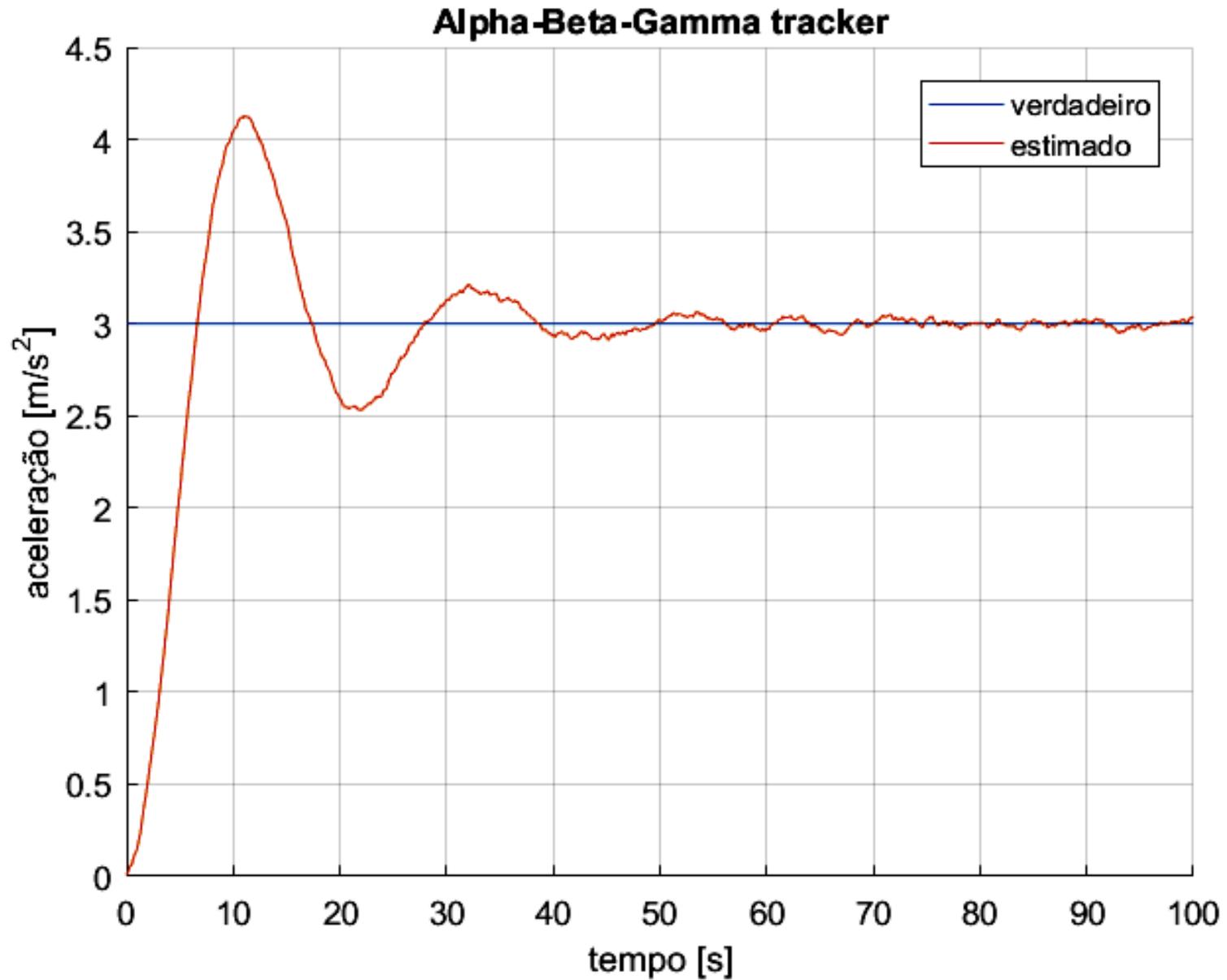
(a)



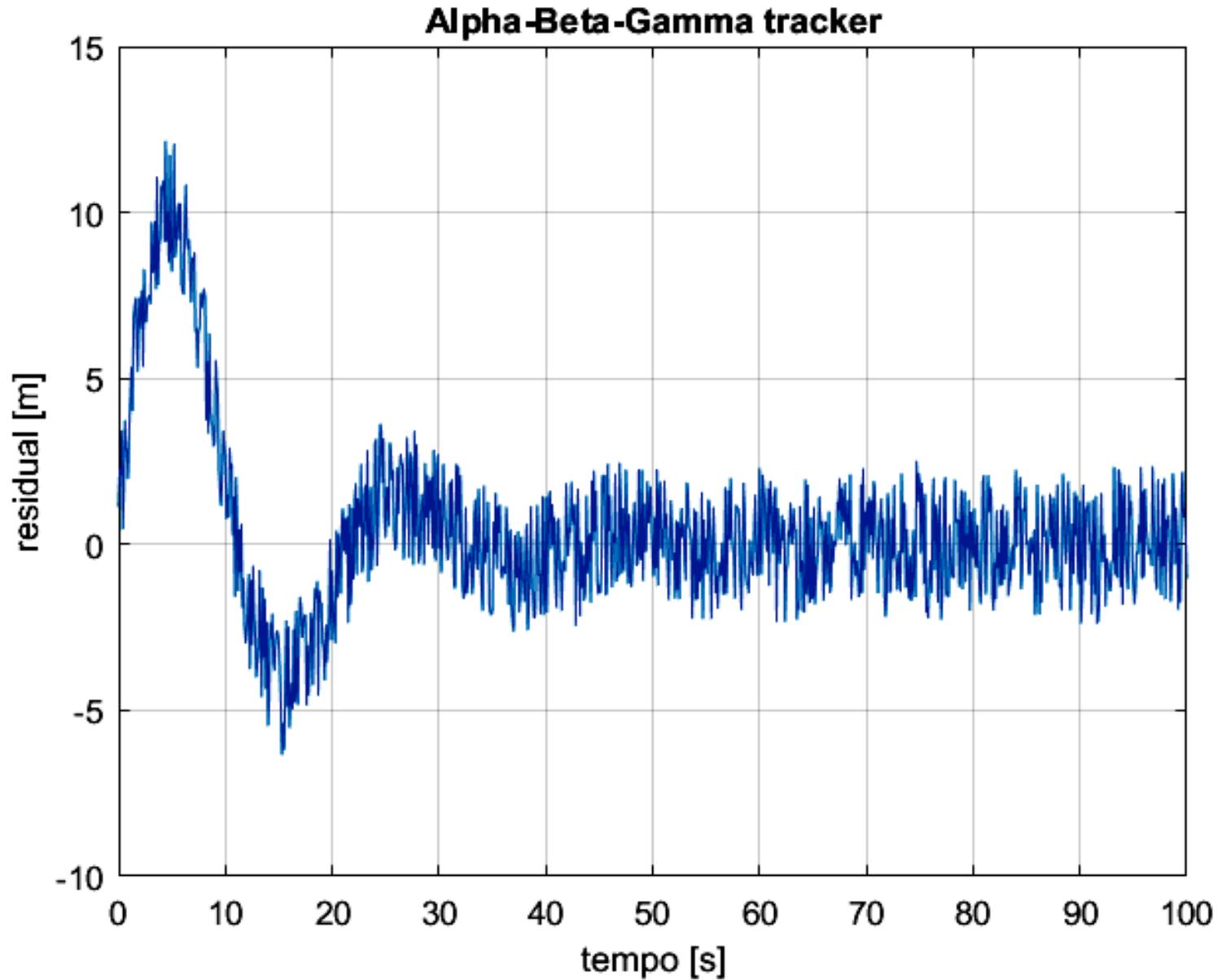
(b)



(c)



(d)



O filtro de Kalman unidimensional

O filtro de Kalman 1D segue a sistemática PRC (Predição – Residual – Correção) em 3 etapas referida no slide 171, (1º) efetuando a predição do estado do alvo de acordo com o modelo cinemático, (2º) determinando o residual a partir da medição e da predição do estado do alvo e (3º) efetuando o ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição efetuada na etapa “(1º)” através da soma ao respectivo estado predito o valor do residual ponderado por um fator de ganho K_k denominado de **ganho de Kalman**, conforme equação (133) abaixo, que expressa a 3ª etapa da sistemática PRC para o filtro de Kalman 1D:

$$x_{k,k} = x_{k,k-1} + K_k(z_k - x_{k,k-1}) = (1 - K_k)x_{k,k-1} + K_k z_k \text{ [m]} \quad (133)$$

onde $(z_k - x_{k,k-1})$ [m] é o **residual** e $x_{k,k}$ [m] é a posição do alvo que resulta após a filtragem efetuada na 3ª etapa da sistemática PRC na iteração de atualização k . z_k [m] é a medição (ruidosa) da posição do alvo. Além de filtrar a variável de estado x [m] (posição do alvo), o processo de filtragem ajusta/corriga as variáveis de estado velocidade do alvo v [m/s] e a aceleração do alvo a [m/s²]. Para as situações em que o intervalo de tempo Δt [s] entre as medições é pequeno em relação ao período de varredura espacial da antena, como é o caso de *phased-arrays*, é viável assumir que a velocidade do alvo v é constante e a aceleração do alvo a é nula durante o intervalo de tempo Δt entre as medições.

Note em (133) que o ganho de Kalman K_k é o ganho dado à medição z_k da posição do alvo ao longo do processo iterativo de ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição $x_{k,k-1}$ da posição do alvo. O fator $(1 - K_k)$ é o ganho dado à predição $x_{k,k-1}$ ao longo do referido processo iterativo de filtragem. Especificamente, o ganho de Kalman K_k é um indicador de quanto a estimativa pós-filtragem definida pela posição $x_{k,k}$ do alvo dada por (133) é influenciada pela medição z_k da posição.

O ganho de Kalman K_k é dado pela predição da incerteza $P_{k,k-1}$ [m²] no valor do estado (i.e., $P_{k,k-1}$ [m²] = **predição da variância do ruído do processo**) normalizada por $P_{k,k-1}$ acrescida da incerteza R_k [m²] na medição (i.e., R_k [m²] = **variância do ruído de medição**):

$$K_k = \frac{P_{k,k-1} \text{ [m}^2\text{]}}{P_{k,k-1} \text{ [m}^2\text{]} + R_k \text{ [m}^2\text{]}} \quad (134)$$

Note em (134) que se $P_{k,k-1} \ll R_k$, o ganho $K_k \rightarrow 0$, indicando que a estimativa $x_{k,k}$ pós-filtragem da posição do alvo dada por (133) é fortemente influenciada pela predição $x_{k,k-1}$ do estado do alvo e pouco influenciada pela medição z_k da posição do alvo. Por outro lado, se $P_{k,k-1} \gg R_k$, o ganho $K_k \rightarrow 1$, indicando que a estimativa $x_{k,k}$ pós-filtragem da posição do alvo dada por (133) é fortemente influenciada pela medição z_k da posição do alvo e pouco influenciada pela predição $x_{k,k-1}$ do estado do alvo. **Informalmente, o filtro de Kalman obtém as estimativas $x_{k,k}$ pós-filtragem escolhendo “acreditar mais na dica” de menor incerteza – ou o filtro “acredita mais na dica” da medição z_k da posição do alvo, ou o filtro “acredita mais na dica” da predição $x_{k,k-1}$ do estado, a que tiver menor incerteza entre elas.**

O filtro de Kalman unidimensional

No processo iterativo de filtragem dado por (133), as variáveis de estado têm seu valor iterativamente corrigido ao longo do tempo (depois de previamente predito pelo modelo cinemático). Para manter conformidade com o processo iterativo de filtragem é necessário também especificar o ajuste/correção (i.e, filtragem) da variável que dá a predição da incerteza $P_{k,k-1}$ no valor do estado (= predição da variância do ruído do processo), variável que afeta diretamente o ganho de Kalman K_k dado por (134). Neste contexto, temos que

$$P_{k,k} = (1 - K_k) P_{k,k-1} \text{ [m}^2\text{]} \quad (135)$$

onde $P_{k,k}$ [m²] é o ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição da incerteza $P_{k,k-1}$ [m²] no valor do estado. $P_{k,k}$ é usualmente inicializada em um valor aproximadamente 1000 vezes maior que a variância R_k [m²] do ruído de medição. Desta maneira, o ganho de Kalman K_k dado por (134) resulta inicialmente próximo do unitário fazendo com que o processo iterativo de ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição $x_{k,k-1}$ da posição do alvo dado por (133) inicie com o filtro “acreditando” mais na medição (ruidosa) z_k da posição do alvo do que na predição $x_{k,k-1}$ do estado do alvo. Isto é desejado porque as predições iniciais não são “confiáveis”, usualmente resultando em um residual alto ao longo das primeiras iterações.

O processo iterativo de filtragem dado por (133) assume que as variáveis de estado (posição, velocidade e aceleração) sejam previamente preditas de acordo com o modelo cinemático, conforme a sistemática PRC (Predição – Residual – Correção). É necessário, portanto, definir a equação que determina a predição do estado do alvo de acordo com o modelo cinemático bem como definir a equação que determina a predição da incerteza $P_{k,k-1}$ no valor do estado do alvo.

Neste caso unidimensional sob análise, assumindo por simplicidade didática que durante o intervalo Δt entre as medidas a aceleração seja nula e, portanto, a velocidade do alvo seja constante, a predição do estado do alvo (variáveis de estado posição e velocidade) é dada pelo modelo cinemático:

$$x_{k,k-1} = x_{k-1,k-1} + v_{k-1,k-1} \Delta t \text{ [m]} \quad (136)$$

$$v_{k,k-1} = v_{k-1,k-1} \text{ [m/s]} \quad (137)$$

De mesma forma, para manter conformidade com o processo iterativo de predição intrínseco à sistemática PRC (Predição – Residual – Correção), a predição da incerteza nos valor das variáveis de estado (no caso, duas variáveis de estado – posição e velocidade) do alvo é dada por:

$$P_{k,k-1}^x = P_{k-1,k-1}^x + P_{k-1,k-1}^v (\Delta t)^2 \text{ [m}^2\text{]} \quad (138)$$

$$P_{k,k-1}^v = P_{k-1,k-1}^v \text{ [(m/s)}^2\text{]} \quad (139)$$

onde P^x [m²] é a incerteza na posição do alvo e P^v [(m/s)²] é a incerteza na velocidade do alvo.

O filtro de Kalman unidimensional

Conforme já discutido nos slides 172 e 173, o movimento do alvo não segue estritamente o modelo cinemático dado pela equação (111) devido às incertezas originadas por transientes na velocidade do vento, arrasto aerodinâmico, manobras súbitas efetuadas pelo alvo, acelerações aleatórias devido a fatores ambientais etc ... Esta incerteza no modelo do espaço de estados é denominada de ruído do processo.

Neste contexto, para dar dinamicidade ao modelo cinemático, de modo que o modelo cinemático tenha chance de se acomodar às incertezas geradas pelas incertezas no modelo do espaço de estados, uma variável que define a variância do ruído do processo, denotada por Q_k , é adicionada à predição da incerteza $P_{k,k-1}$ no valor do estado dada por (138) e (139) do slide anterior:

$$P_{k,k-1}^x = P_{k-1,k-1}^x + P_{k-1,k-1}^v (\Delta t)^2 + Q_k \text{ [m}^2\text{]}$$
$$P_{k,k-1}^v = P_{k-1,k-1}^v + Q_k \text{ [(m/s)}^2\text{]}$$

Ou, generalizando para um contexto multivariável:

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \mathbf{P}_{k-1,k-1} + \text{Predição Modelo Cinemático} + \mathbf{Q}_k \quad (140)$$

O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

Um filtro de Kalman 3D multivariável generalizado também segue a sistemática PRC (Predição – Residual – Correção) em 3 etapas referida no slide 171. A cada iteração k primeiramente é efetuada a predição do estado do alvo e a predição da incerteza (= variância) do estado. A seguir, é efetuado o ajuste/correção (i.e, filtragem) das predições, conforme já vimos para o caso de filtro de Kalman 1D.

Conceitualmente e em linha gerais, a trajetória do estado cinemático do alvo é iterativamente modelada pela equação de transição de estado dada por:

$$\underline{x}_k = \mathbf{A}_k \underline{x}_{k-1} + \mathbf{B}_k \underline{u}_k + \underline{w}_k \quad [\text{m}], \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right], \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right] \quad (141)$$

onde \underline{x}_k é o vetor que define o estado do alvo (posição [m] em \mathbb{R}^3 , velocidade $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ em \mathbb{R}^3 e aceleração $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]$ em \mathbb{R}^3) na iteração de atualização k . Ver exemplo de formato do vetor \underline{x}_k nos slides 224 e 223.

\mathbf{A}_k é a matriz que define as predições resultantes das transições de estado do processo iterativo, i.e., é a matriz que define o **modelo cinemático** do processo. Ver exemplo de formato da matriz \mathbf{A}_k nos slides 223 e 224.

\underline{x}_{k-1} é o vetor que define o estado do alvo na iteração de atualização $k - 1$.

\underline{u}_k é o vetor de controle dos dados de entrada.

\mathbf{B}_k é a matriz que relaciona o vetor \underline{u}_k de controle dos dados de entrada com a matriz \mathbf{A}_k de transição de estado do processo iterativo. Em um problema de *tracking* a matriz \mathbf{B} é nula dado que não há dados de entrada.

\underline{w}_k é o vetor que define o ruído do processo.

Assume-se que as medições \underline{z}_k do estado do alvo (no caso, posição do alvo – o **radar mede posição**, i.e., *range*, azimuth e elevação do alvo e depois converte para coordenadas cartesianas [x y z]) podem ser representadas por uma combinação linear entre as componentes do estado \underline{x}_k que representam a posição do alvo e o ruído de medição \underline{v}_k , sendo usualmente unitários os coeficientes de \mathbf{H}_k que efetuam a ponderação (ver, por exemplo, \mathbf{H}_k do slide 223):

$$\underline{z}_k = \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k \quad [\text{m}] \quad (142)$$

onde \underline{z}_k é o vetor que define a medição do estado (no caso, posição) do alvo na iteração de atualização k .

\underline{x}_k é o vetor que define o estado do alvo na iteração de atualização k .

\mathbf{H}_k é a matriz que relaciona o estado \underline{x}_k do alvo com a medição \underline{z}_k do estado alvo (no caso, posição do alvo).

\underline{v}_k é o vetor que define o ruído de medição da posição do alvo.

O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

Especificamente, o primeiro passo na operação de um filtro de Kalman 3D multivariável generalizado é determinar os valores dos elementos das matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{H} que fazem com que o problema se ajuste ao modelo dado por (141) e (142). Normalmente, essas matrizes são de valores constantes. Em geral \mathbf{B} é nula dado que não há dados de entrada em um problema de *tracking*. Uma vez que \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{H} tenham os valores de seus elementos determinados, o vetor \underline{w} do ruído do processo e o vetor \underline{v} do ruído de medição são determinados por meio de informação a priori ou por meio de experimentos. A partir deste ponto, ficam definidos dois conjuntos distintos de equações – equações de predição e equações ajuste/correção (i.e, filtragem). Ambos os conjuntos de equações são aplicados em cada passo de tempo k , para o qual existe uma medição. As equações de predição do estado e de predição da incerteza do estado são:

$$\underline{x}_{k,k-1} = \mathbf{A}_k \underline{x}_{k-1,k-1} + \mathbf{B}_k \underline{u}_k \quad [\text{m}], \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right], \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] \quad (143)$$

$$\mathbf{P}_{k,k-1} = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1,k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_k \quad [\text{m}^2], \left[\left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^2 \right], \left[\left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)^2 \right] \quad (144)$$

onde

\mathbf{A}_k é a matriz que define as predições resultantes das transições de estado do processo iterativo, i.e., é a matriz que define o **modelo cinemático** do processo. Ver exemplo de formato da matriz \mathbf{A}_k nos slides 223 e 224.

$\mathbf{P}_{k,k-1}$ é a matriz predição da incerteza (=variância) no valor do estado do alvo na iteração de atualização k , ou, equivalentemente, predição da variância do ruído do processo na iteração de atualização k .

$\mathbf{P}_{k-1,k-1}$ é a matriz estimativa da incerteza no valor do estado do alvo na iteração de atualização $k - 1$.

\mathbf{Q}_k é a matriz da variância do ruído do processo na iteração de atualização k .

Uma vez que a predição do estado e a predição da incerteza do estado sejam respectivamente calculadas por (143) e (144), o valor da medição da posição do alvo é usado para ajustar/corrigir (i.e, filtrar) o estado e a incerteza preditos por (143) e (144). Para esta correção, primeiramente é necessário calcular o ganho de Kalman através de :

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k)^{-1} \quad (145)$$

onde

$\mathbf{P}_{k,k-1}$ é a matriz predição da incerteza no valor do estado do alvo na iteração de atualização k .

\mathbf{H}_k é a matriz que relaciona o estado \underline{x}_k do alvo com a medição \underline{z}_k da posição do alvo.

\mathbf{R}_k é matriz da variância do ruído de medição na iteração de atualização k .

\mathbf{K}_k é o ganho de Kalman na iteração de atualização k .

O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

Note a semelhança da equação (145) com a equação (134) para o filtro de Kalman 1D , abaixo reproduzida por comodidade de visualização:

$$K_k = \frac{P_{k,k-1}}{P_{k,k-1} + R_k} = P_{k,k-1} (P_{k,k-1} + R_k)^{-1} \quad (134)$$

Note que (145) tem a mesma interpretação que (134), i.e., após a predição, o filtro de Kalman obtém as estimativas $x_{k,k}$ pós-filtragem “escolhendo” através do ganho de Kalman “acreditar mais na dica” de menor incerteza – ou o filtro “acredita mais na dica” da medição da posição do alvo, ou o filtro “acredita mais na dica” da predição do estado, a que tiver menor incerteza entre elas. A matriz \mathbf{H}_k em (145), que não consta em (134), é necessária em (145) porque ela permite relacionar o estado \underline{x}_k do alvo referente à posição do alvo com a medição \underline{z}_k da posição do alvo (ver slide 223).

O ganho de Kalman \mathbf{K}_k dado por (145) é então usado para ajustar/corriger (i.e, filtrar) a predição $\underline{x}_{k,k-1}$ do estado resultante de (143) e para ajustar/corriger (i.e, filtrar) a predição $\mathbf{P}_{k,k-1}$ da incerteza do estado resultante de (144) conforme segue:

$$\underline{x}_{k,k} = \underline{x}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k (\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \underline{x}_{k,k-1}) = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \underline{x}_{k,k-1} + \mathbf{K}_k \underline{z}_k \quad (146)$$

$$\mathbf{P}_{k,k} = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_{k,k-1} \quad (147)$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade e onde $\underline{z}_k - \mathbf{H}_k \underline{x}_{k,k-1}$ é o **residual** do filtro de Kalman, equivalente ao residual dado pela equação (117) $r_k = \underline{z}_k - \underline{x}_{k,k-1}$ [m] que vimos no âmbito do filtro $\alpha - \beta$. $\mathbf{P}_{k,k}$ é uma matriz diagonal usualmente inicializada com valores da diagonal aproximadamente 1000 vezes maior que a variância \mathbf{R}_k [m²] do ruído de medição, conforme discutido no 2º parágrafo do slide 192.

Note a semelhança das equações (146) e (147) com as equações (133) e (135) para o filtro de Kalman 1D , abaixo reproduzidas por comodidade de visualização:

$$x_{k,k} = x_{k,k-1} + K_k (z_k - x_{k,k-1}) = (1 - K_k) x_{k,k-1} + K_k z_k \text{ [m]} \quad (133)$$

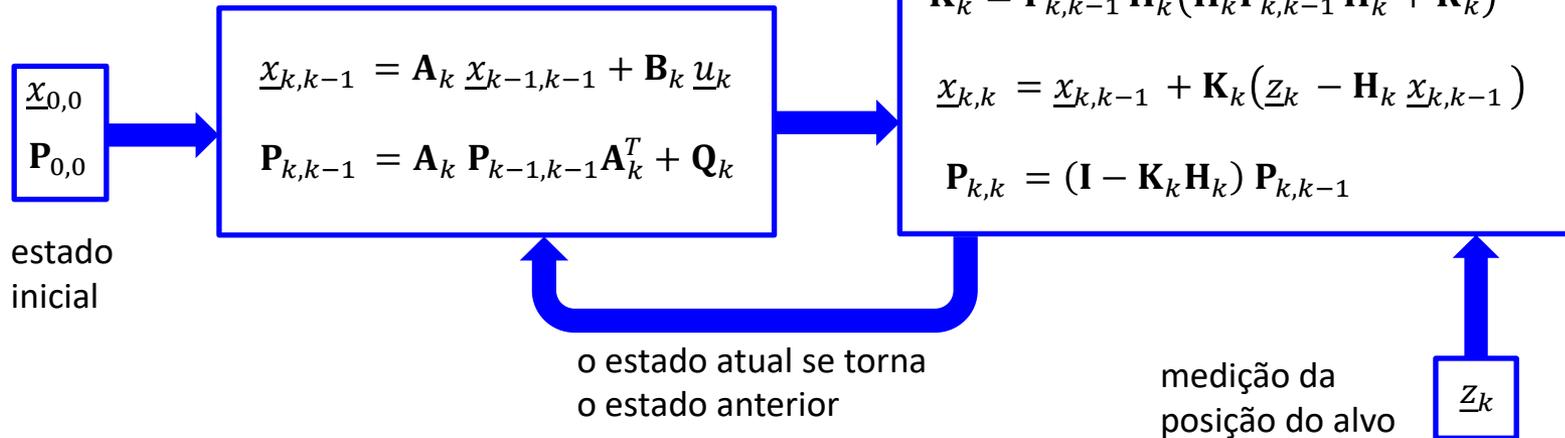
$$P_{k,k} = (1 - K_k) P_{k,k-1} \quad (135)$$

O diagrama no próximo slide mostra as etapas do processo iterativo efetuado pelo filtro de Kalman.

O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

Processo iterativo efetuado pelo filtro de Kalman:

Etapa 1: Determina a predição $\underline{x}_{k,k-1}$ do estado e a predição $\mathbf{P}_{k,k-1}$ da incerteza do estado (= predição da variância do ruído do processo).



Etapa 2: Usando a medição \underline{z}_k da posição do alvo, efetua o ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição $\underline{x}_{k,k-1}$ do estado e da predição $\mathbf{P}_{k,k-1}$ da incerteza do estado (= predição da variância do ruído do processo).

Veremos nos próximos slides o Exemplo 15, em que um filtro de Kalman 3D efetua o rastreamento (*tracking*) de um alvo movendo-se em velocidade constante, e o Exemplo 16, em que o filtro de Kalman 3D efetua o rastreamento de um alvo movendo-se sob aceleração constante.

O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

Exemplo 15: Um radar adota um filtro de Kalman como *track filter* de seu sistema de *target tracking* (TT). Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição e velocidade iniciais medidas são respectivamente:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 11.0 \\ 3.2 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 2.0 \\ 1.5 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{Inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 40.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 1.4 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. A variância do ruído do processo é 1.0×10^{-6} . A predição $\mathbf{P}_{k,k}$ da incerteza (variância) do estado é inicializada em 1000 para todas as variáveis de estado. A velocidade do alvo pode ser considerada constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas durante o rastreamento que ocorre no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{final}$. Ver dica sobre a definição das matrizes do processo no Apêndice B.

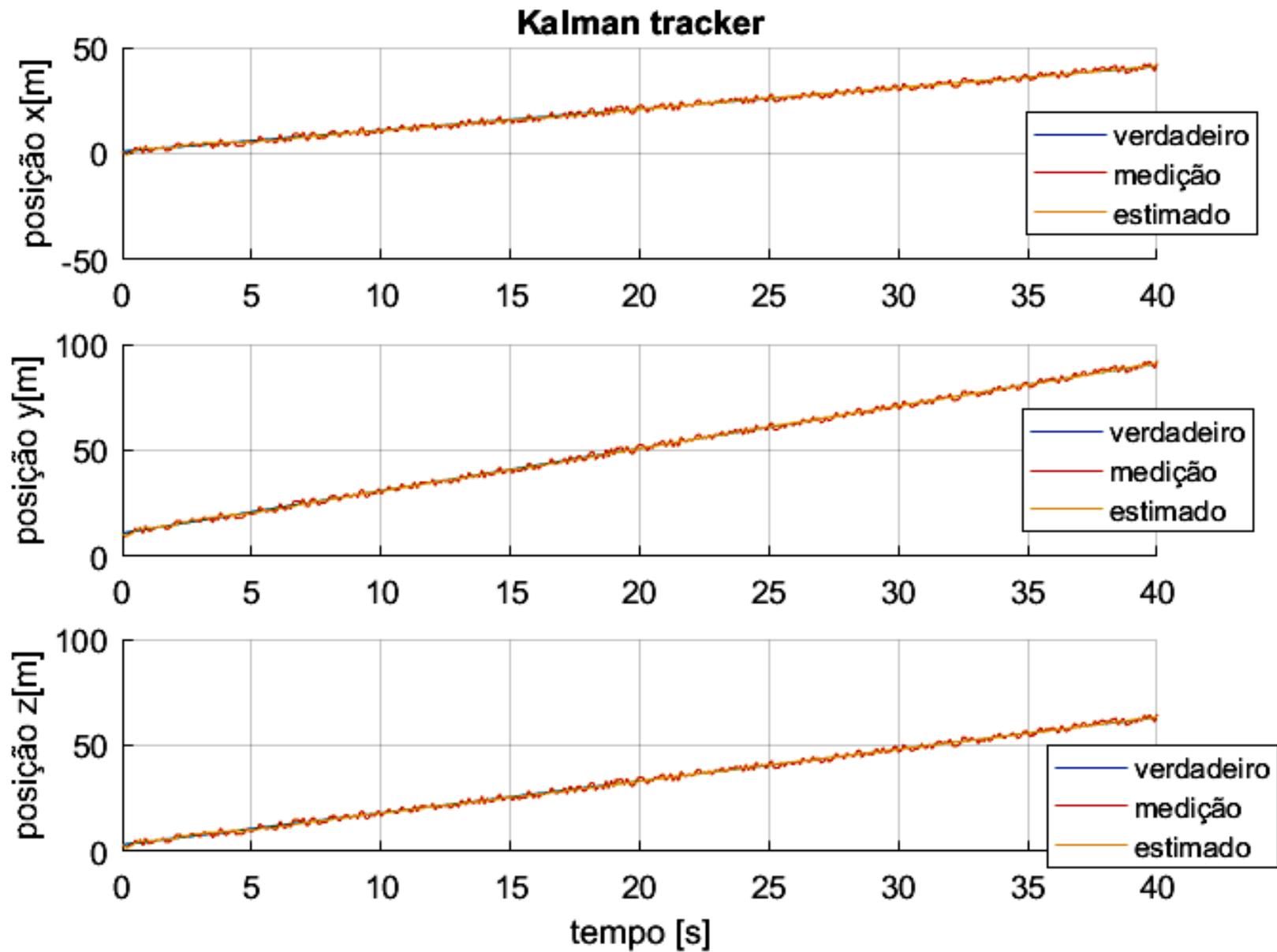
Pede-se:

- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da posição do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, as 3 curvas da posição medida do alvo e as 3 curvas da posição estimada do alvo.
- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da velocidade do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e as 3 curvas da velocidade estimada do alvo.
- Plote a curva ao longo do tempo do residual $|\underline{r}_k|$ da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo filtro de Kalman.
- Compare os resultados obtido em (b) com o resultado obtido em (c) do *track filter* $\alpha - \beta$ especificado no Exemplo 13.

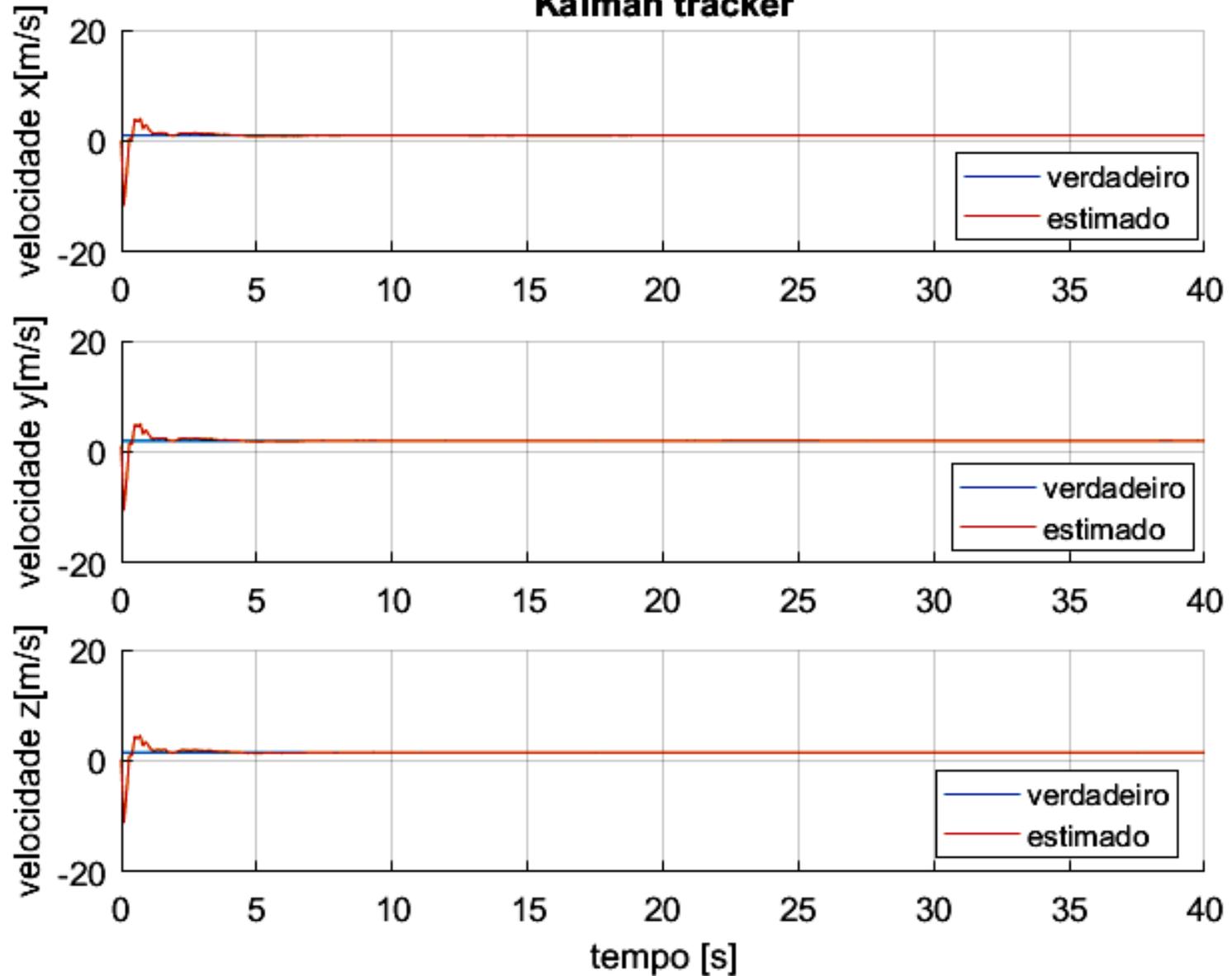
Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo15.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E15S198.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo15.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

(a)

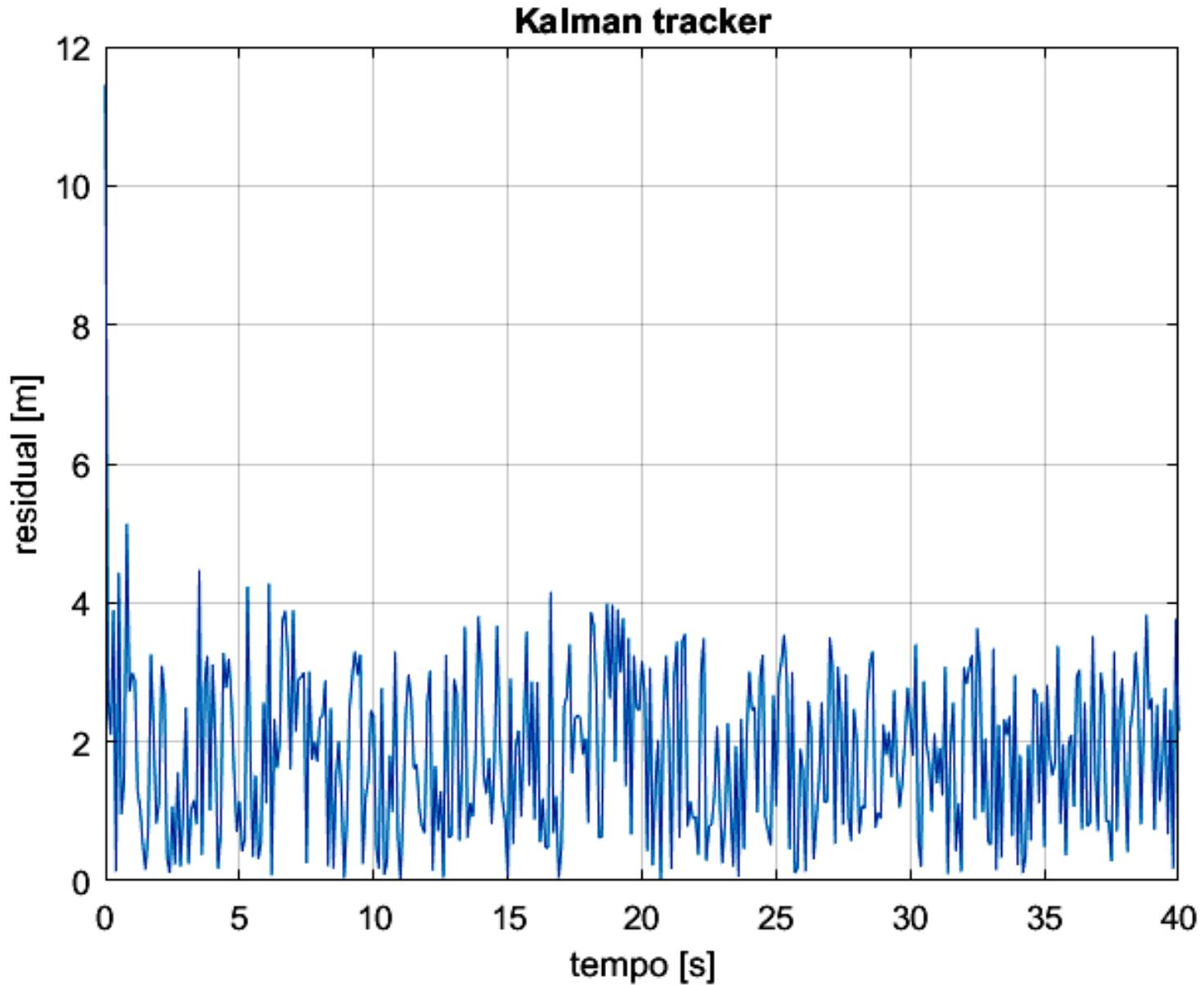


Kalman tracker



(d) Comparando com o resultado obtido em (c) do *track filter* $\alpha - \beta$ especificado no Exemplo 13, observa-se que o filtro de Kalman atinge o regime permanente em muito menos tempo que o *track filter* $\alpha - \beta$.

(c)



O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

Exemplo 16: Um radar adota um filtro de Kalman como *track filter* de seu sistema de *target tracking* (TT). Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição, velocidade e aceleração iniciais medidas são respectivamente:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 7.0 \\ 11.0 \\ 21.0 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]} \quad \underline{a}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 0.75 \end{bmatrix} \text{ [m/s}^2\text{]}$$

O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{Inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 20.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 1.4 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. A variância do ruído do processo é 1.0×10^{-6} . A predição $\mathbf{P}_{k,k}$ da incerteza (variância) do estado é inicializada em 1000 para todas as variáveis de estado. A aceleração do alvo pode ser considerada constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas durante o rastreamento que ocorre no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{final}$. Ver dica sobre a definição das matrizes do processo no Apêndice C.

Pede-se:

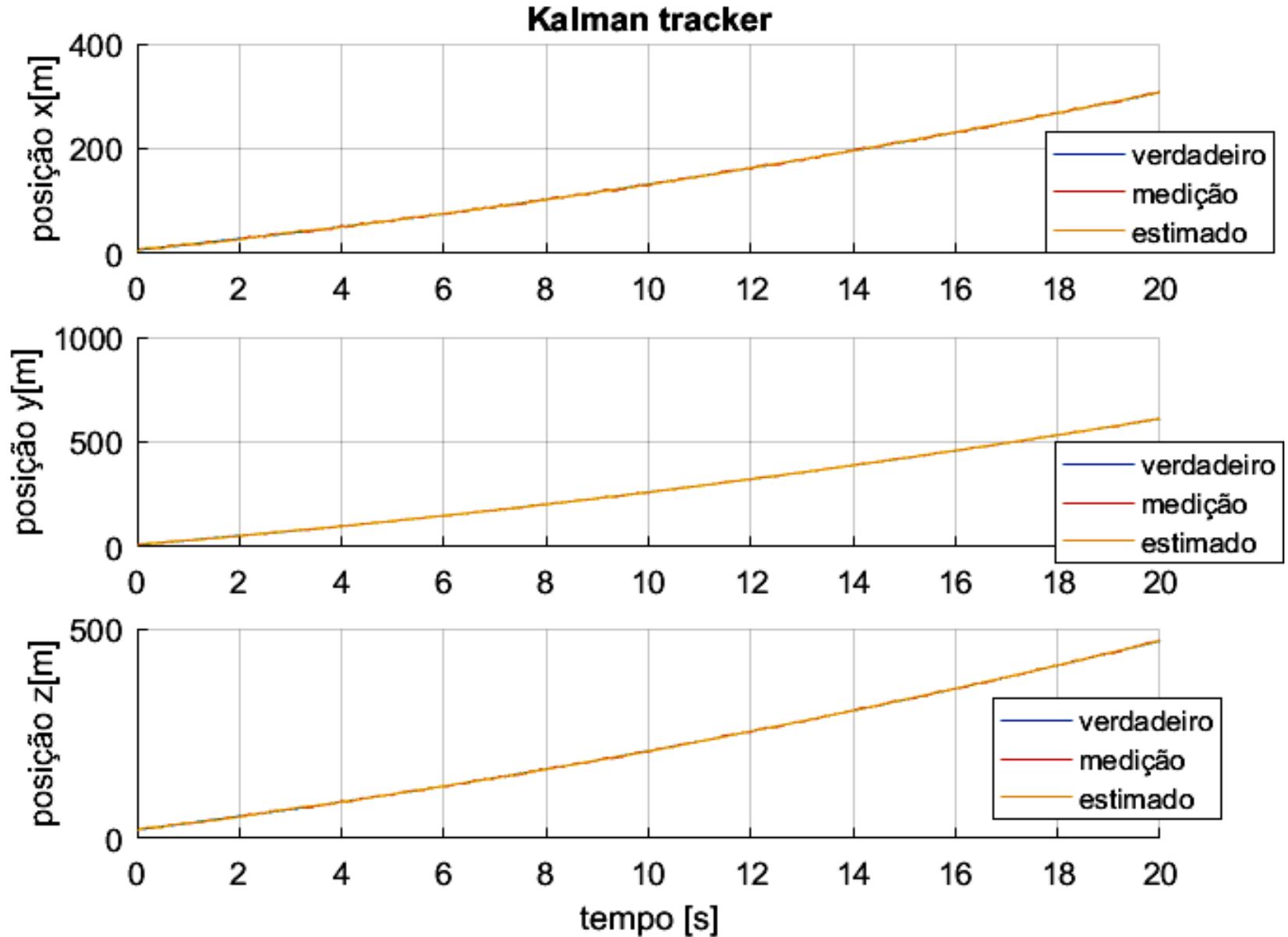
- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da posição do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, as 3 curvas da posição medida do alvo e as 3 curvas da posição estimada do alvo.
- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da velocidade do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e as 3 curvas da velocidade estimada do alvo.
- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da aceleração do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da aceleração verdadeira do alvo e as 3 curvas da aceleração estimada do alvo.
- Plote a curva ao longo do tempo do residual $|\underline{r}_k|$ da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo filtro de Kalman.

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo16.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E16S202.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo16.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

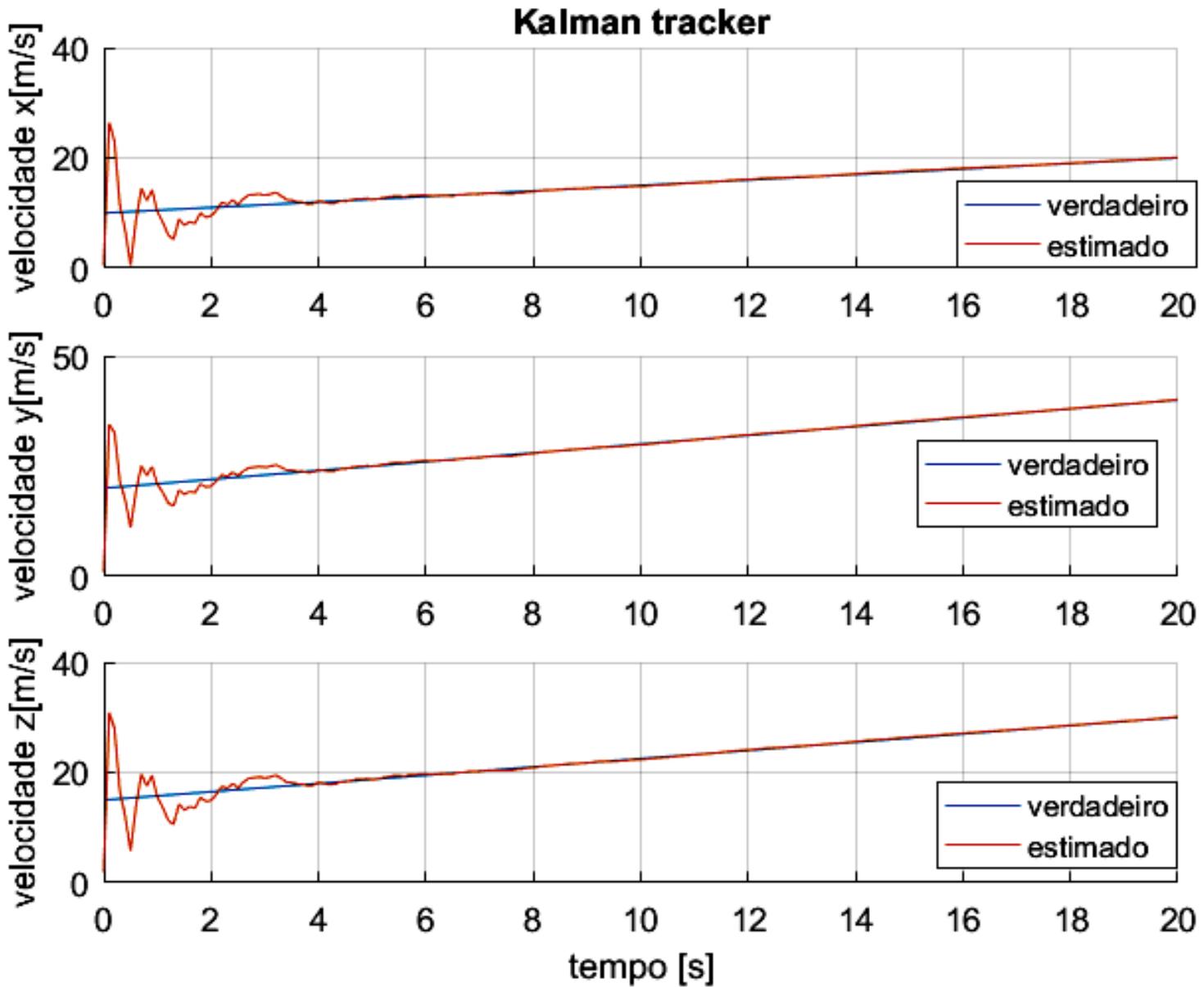
O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

(a)

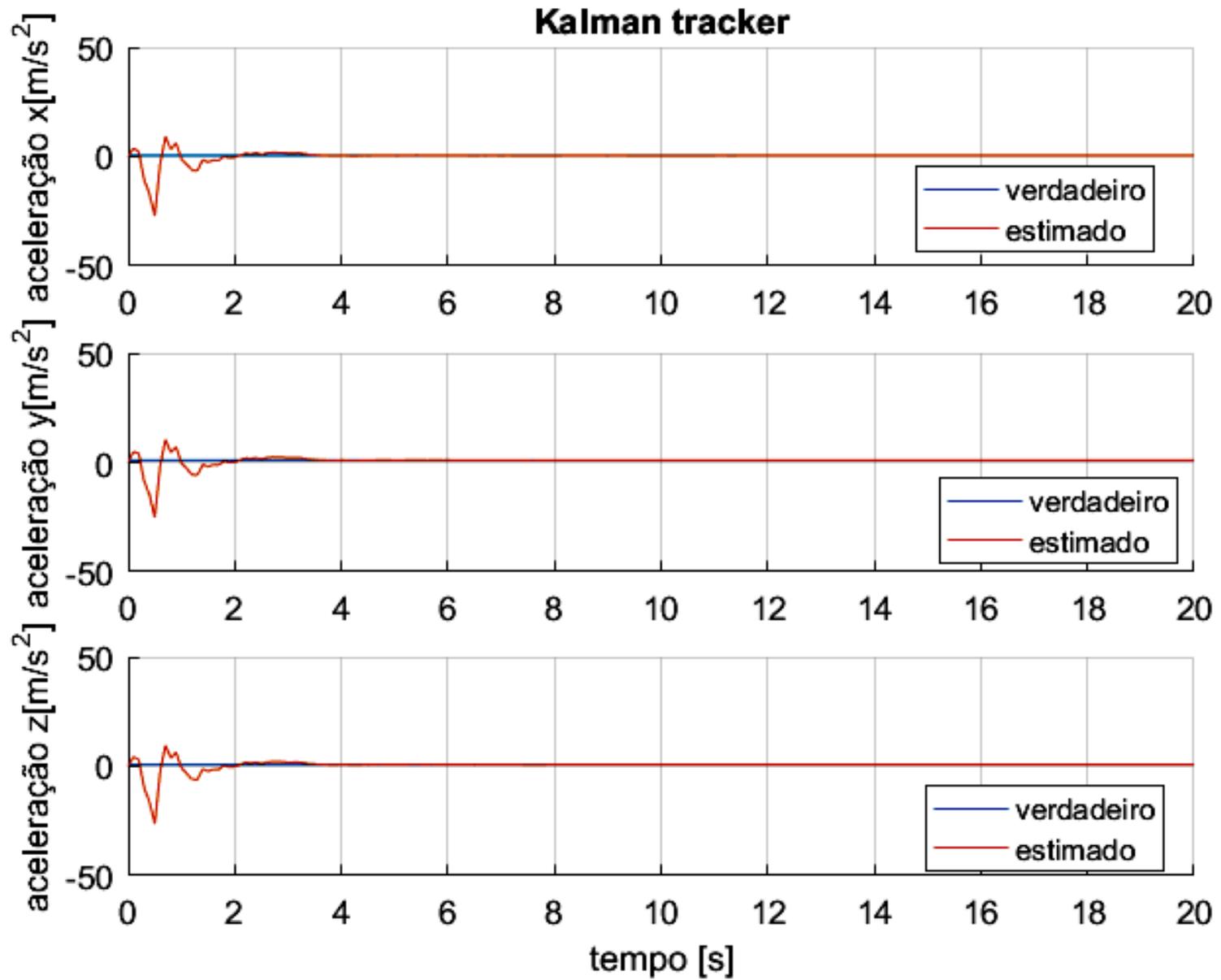


O filtro de Kalman para *target tracking* em 3 dimensões

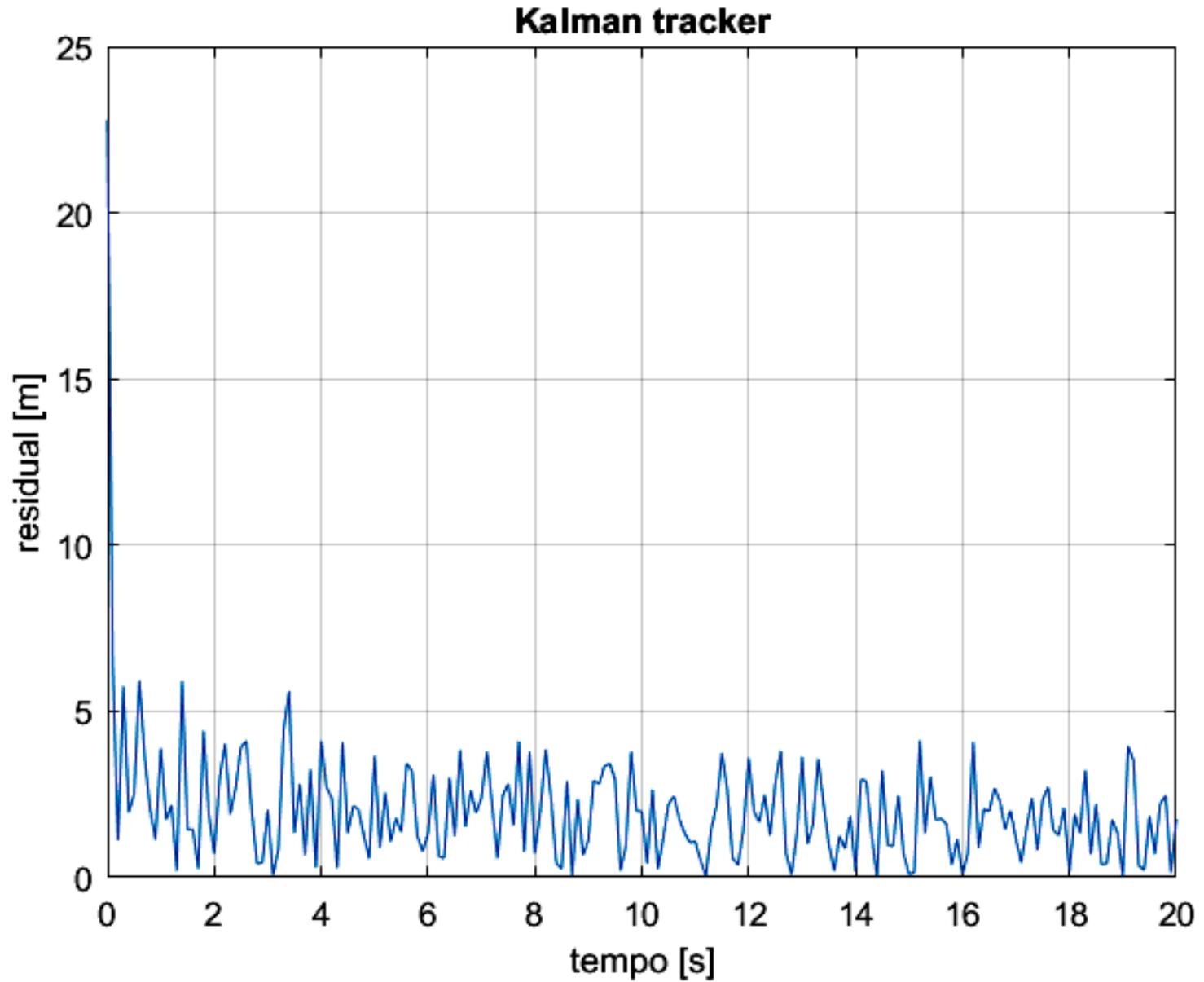
(b)



(c)



(d)



O filtro de Kalman adaptativo

Nos slides anteriores vimos o filtro de Kalman rastreando alvos que seguem o modelo do processo com poucos desvios, desvios que são basicamente representados pelo ruído de medição. Passamos a analisar agora a situação em que o alvo efetua uma manobra súbita, como acontece com qualquer alvo do mundo real. Navios, aeronaves, automóveis, mísseis balísticos, etc., todos eles efetua manobras que desviam drasticamente o comportamento do alvo do modelo cinemático definido pela equação (111) no slide 172. O desvio do modelo é adicionalmente influenciado pelo arrasto aerodinâmico (ou hidrodinâmico, no caso de navios) resultante do movimento do alvo.

É até possível modelar e incluir no modelo cinemático do alvo alguns destes fatores de desvio do modelo, mas seria uma abordagem de altíssima complexidade e de eficácia discutível tentar modelar variações nas condições ambientais, como a velocidade e direção de correntes oceânicas, o campo de velocidade do vento atmosférico incluindo as turbulências intrínsecas, sem falar de variações de temperatura.

Há diversas abordagens para efeito de ajustar o modelo do filtro ao contexto dinâmico acima descrito. Uma abordagem para este problema, e que será o escopo de nosso estudo, consiste em adaptativamente ajustar a variância \mathbf{Q}_k do ruído do processo, de modo que a variação súbita no modelo cinemático do alvo seja contemplada no processo iterativo do filtro de Kalman. Esta é uma abordagem de baixo custo computacional que, embora não sendo a abordagem ideal, é uma abordagem que não compromete a convergência do processo iterativo do filtro de Kalman. O baixo custo computacional desta abordagem a torna atrativa, apesar de não ser ideal, conforme veremos nos exemplos 18 e 19.

Note da equação (144) que um valor grande para a variância \mathbf{Q}_k do ruído do processo aumenta a predição da variância (=incerteza) $\mathbf{P}_{k,k-1}$ do estado, o que, de (145), faz o ganho de Kalman \mathbf{K}_k se aproximar do valor unitário. Um ganho de Kalman \mathbf{K}_k unitário faz com que o ajuste/correção (i.e, filtragem) $\underline{x}_{k,k}$ da predição do estado $\underline{x}_{k,k-1}$ dada por (146) seja fortemente influenciada pela medição $\underline{z}_k = \mathbf{H}_k \underline{x}_k + \underline{v}_k$ da posição do alvo dada pela equação (142), dado que (146) tem a mesma interpretação que (133). Portanto, (146) é fortemente influenciado pelo ruído de medição \underline{v}_k na situação em que \mathbf{K}_k se aproxima do valor unitário. Este é o maior problema desta abordagem adaptativa – o resultante **aumento da influência do ruído da medição \underline{v}_k da posição do alvo no ajuste/correção (i.e, filtragem) da predição do estado, causado pelo aumento do ruído do processo \mathbf{Q}_k** que se faz necessário para acomodar a variação na dinâmica do sistema desconhecido.

Qualquer alvo que efetue uma manobra súbita sofre algum tipo de aceleração. Portanto, a implementação de um modelo de velocidade constante no intervalo de medida Δt resulta que o filtro de Kalman não reage rapidamente à manobra levando um longo período de tempo de resposta para se recuperar, conforme veremos no Exemplo 17 a seguir.

O filtro de Kalman adaptativo

Exemplo 17: Um radar adota um filtro de Kalman como *track filter* de seu sistema de *target tracking* (TT). Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição e velocidade medidas são respectivamente:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{Inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 100.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 0.8 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. A variância do ruído do processo é 1.0×10^{-6} . A predição $\mathbf{P}_{k,k}$ da incerteza (variância) do estado é inicializada em 1000 para todas as variáveis de estado. A velocidade do alvo pode ser considerada constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas durante o rastreamento que ocorre no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{final}$. A velocidade \underline{v}_0 do alvo é mantida constante no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{manobra}$, onde $t_{manobra} = 20$ [s] é o instante em que o alvo efetua uma manobra súbita alterando sua velocidade para

$$\underline{v}_{manobra} = \begin{bmatrix} 100.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]} \quad \text{A partir da manobra o alvo mantém velocidade constante no intervalo } t_{manobra} < t < t_{final}.$$

Pede-se:

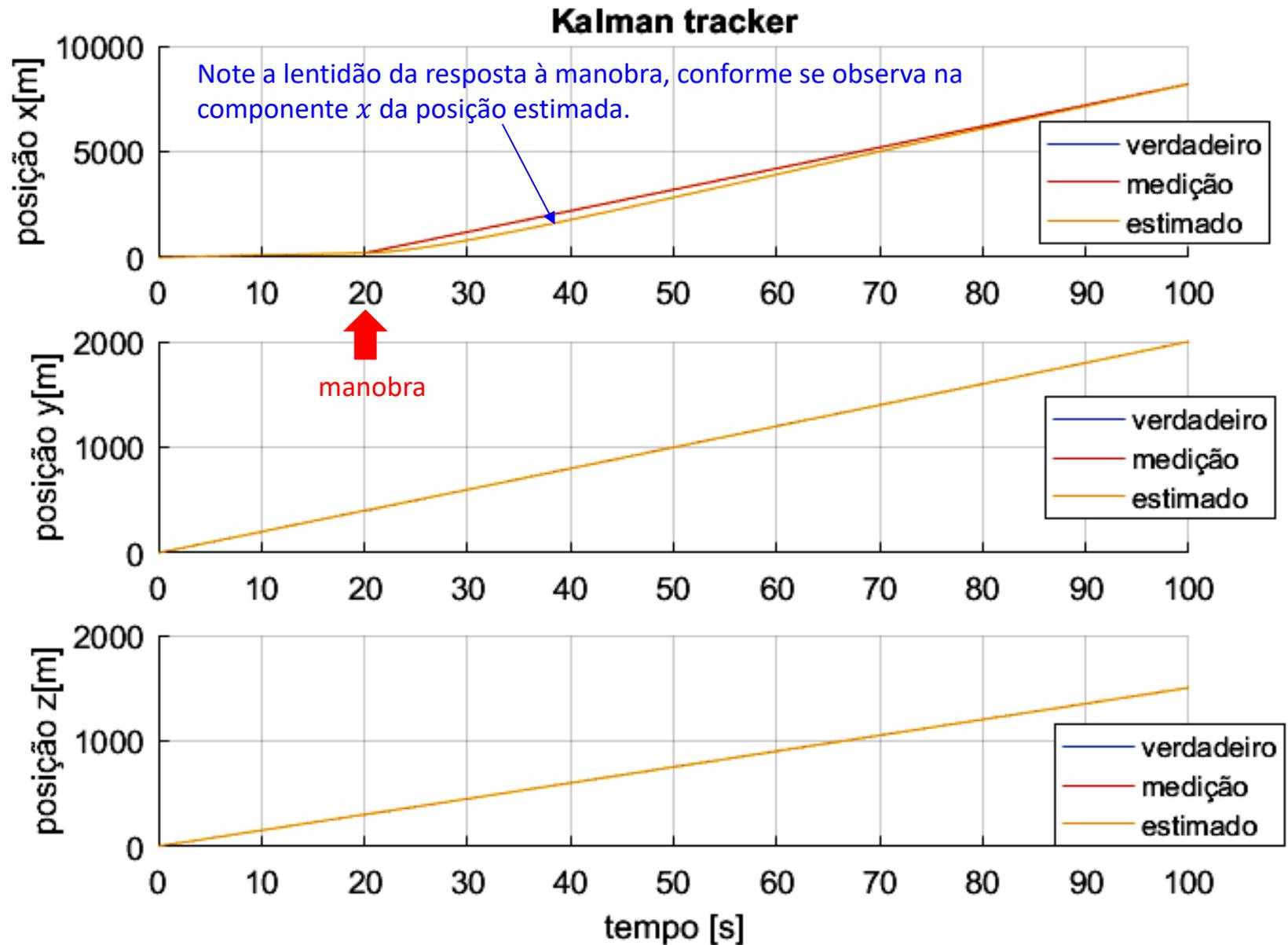
- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da posição do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, as 3 curvas da posição medida do alvo e as 3 curvas da posição estimada do alvo.
- Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da velocidade do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e as 3 curvas da velocidade estimada do alvo.
- Plote a curva ao longo do tempo do residual $|r_k|$ da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo filtro de Kalman.

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo17.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E17S208.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo17.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

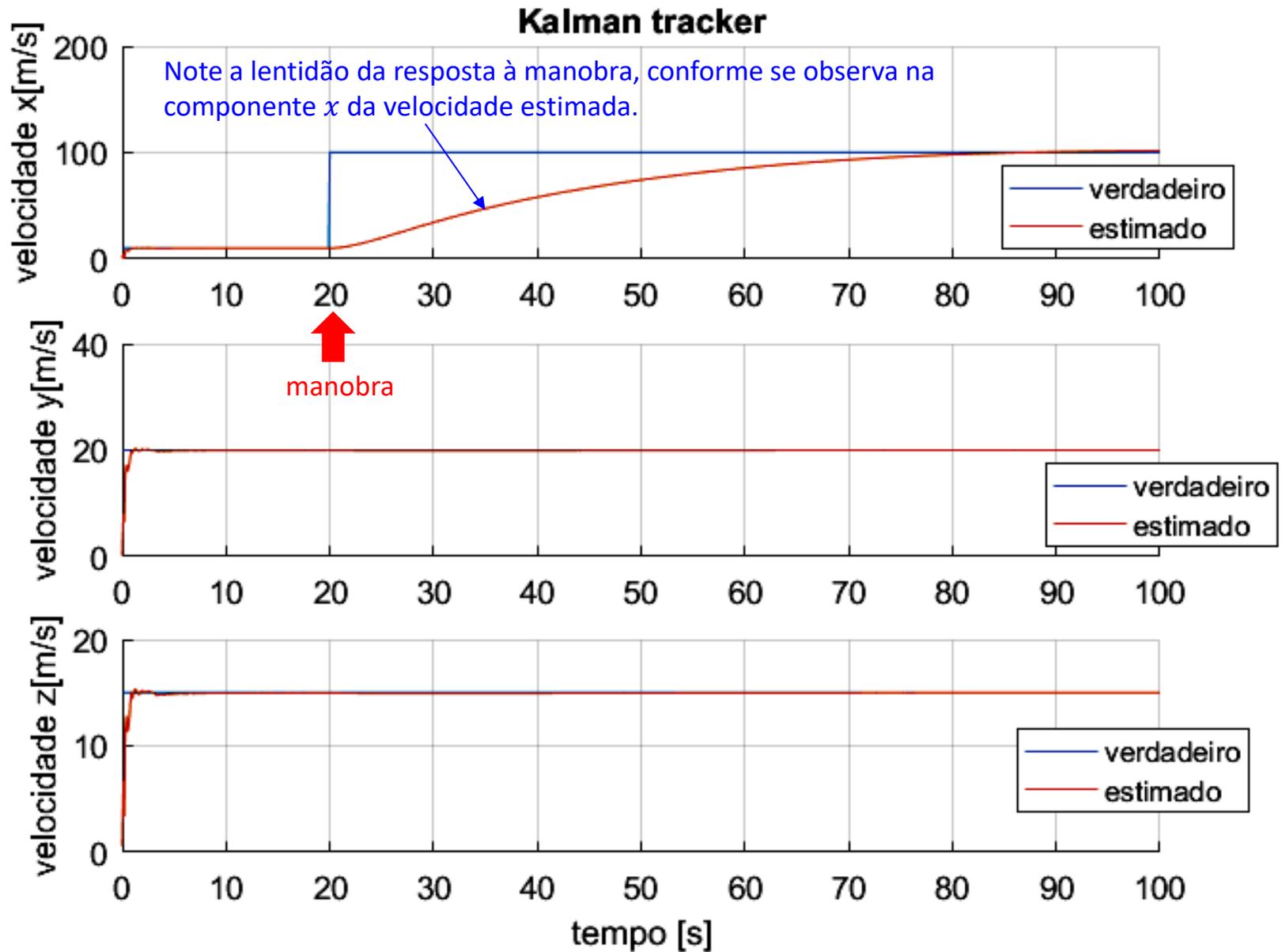
O filtro de Kalman adaptativo

(a)

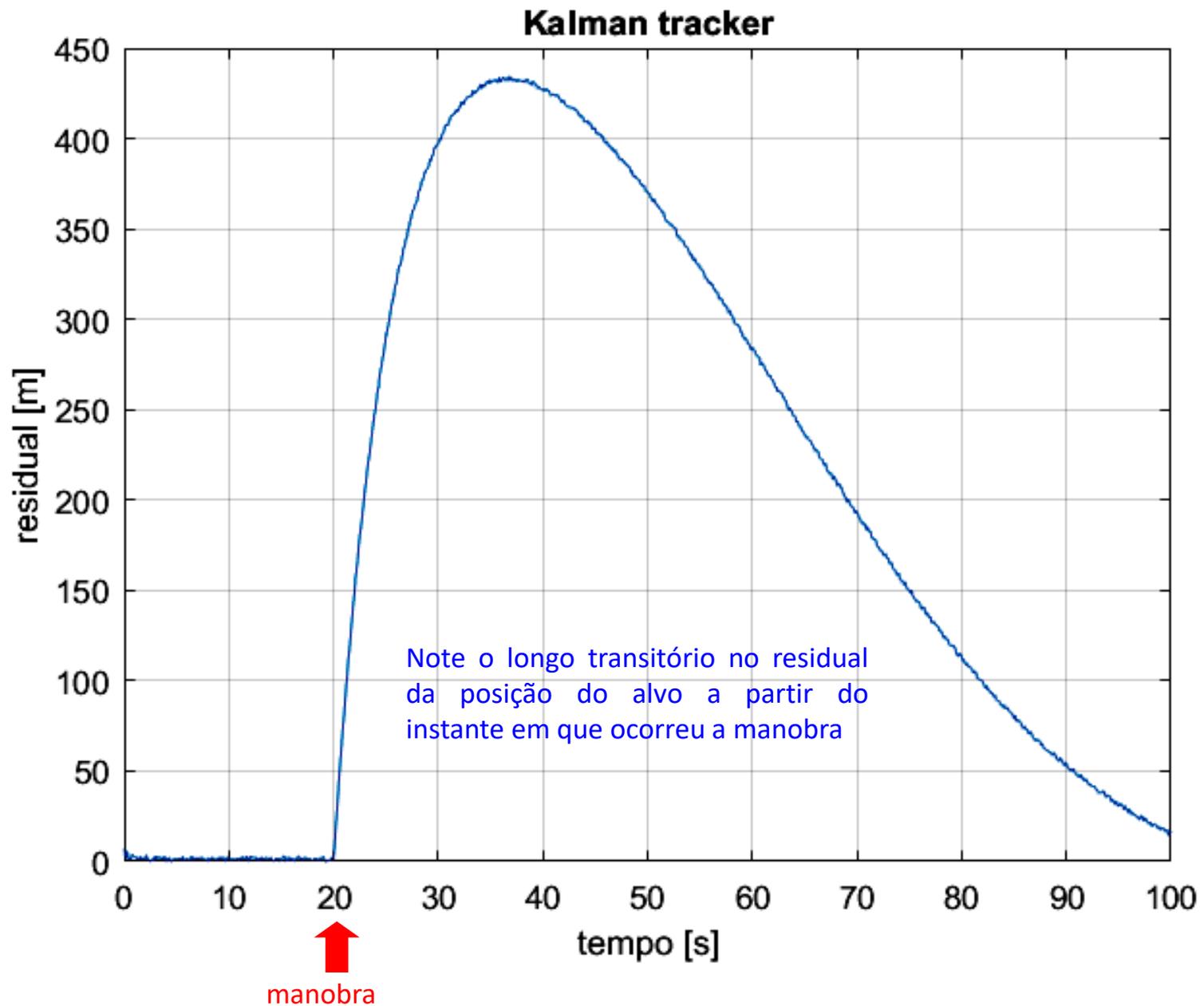


O filtro de Kalman adaptativo

(b)



(c)



O filtro de Kalman adaptativo

Uma tentativa de minimizar o problema de lentidão da resposta observada no Exemplo 17 seria implementar um modelo cinemático de aceleração constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas, ao invés do modelo de velocidade constante do Exemplo 17, o que resultaria em uma resposta mais rápida do filtro de Kalman a uma manobra súbita. No entanto, o modelo de aceleração constante intensifica o problema do aumento da influência do ruído de medição na estimativa do estado, causado pelo aumento do ruído do processo \mathbf{Q}_k , conforme já discutido no slide 207. Em geral, este problema de intensificação do ruído é maior durante os intervalos de tempo da trajetória do alvo em que a velocidade é aproximadamente constante.

Neste contexto, consideremos dois métodos em que o modelo cinemático considera a velocidade do alvo constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas, mas a variância \mathbf{Q}_k do ruído do processo é aumentada adaptativamente para contemplar a manobra súbita. O processo adaptativo é balizado através do valor do residual, que determina se o alvo está manobrando ou, mais geralmente, se desviando do modelo de processo.

No primeiro método adaptativo, denominado **Método Épsilon**, o balizador ϵ_k do processo resulta da potência de erro dada pelo quadrado do módulo do residual $\underline{r}_k = \underline{z}_k - \mathbf{H}_k \underline{x}_{k,k-1}$ normalizada pela potência da incerteza total \mathbf{S}_k , conforme segue:

$$\epsilon_k = \underline{r}_k^T \mathbf{S}_k^{-1} \underline{r}_k \quad (148)$$

sendo a potência da incerteza total \mathbf{S}_k dada pela soma da predição $\mathbf{P}_{k,k-1}$ da variância (=incerteza) no valor do estado do alvo (no caso, posição do alvo, conforme estabelecido pela matriz \mathbf{H}_k) e da variância \mathbf{R}_k do ruído (=incerteza) superposto à medição \underline{z}_k da posição:

$$\mathbf{S}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \quad (149)$$

Para cada iteração k é efetuado o seguinte procedimento condicional:

$$\left| \begin{array}{l} \text{se } (\epsilon_k > \text{Limiar}) \text{ então } \mathbf{Q}_k \leftarrow \text{Escala} \cdot \mathbf{Q}_{k-1} \\ \text{caso contrário } \mathbf{Q}_k \leftarrow \mathbf{Q}_{k-1} / \text{Escala} \end{array} \right. \quad (150)$$

sendo $\text{Limiar} > 0.0$ e $\text{Escala} > 1.0$ parâmetros determinados experimentalmente. Note que (150) aumenta a variância do ruído do processo \mathbf{Q}_k de um fator dado pelo multiplicador *Escala* toda vez que o balizador ϵ_k do processo for maior que o parâmetro *Limiar*. Caso contrário a variância do ruído do processo \mathbf{Q}_k é diminuída de um fator dado pelo divisor *Escala*. Quanto maior for *Escala*, mais incisiva será a ação do processo adaptativo.

O filtro de Kalman adaptativo

No segundo método, denominado **Método Sigma**, o balizador do processo é o módulo $|\underline{r}_k|$ do vetor residual. $|\underline{r}_k|$ é comparado com o valor RMS σ_k da incerteza total obtido da raiz quadrada da potência da incerteza total \mathbf{S}_k dada por (149) no slide anterior:

$$\sigma_k = \sqrt{\mathbf{S}_k} = \sqrt{\mathbf{H}_k \mathbf{P}_{k,k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k} \quad (151)$$

Para cada iteração k é efetuado o seguinte procedimento condicional:

$$\left| \begin{array}{l} \text{se } (|\underline{r}_k| > \text{Limiar} \cdot \sigma_k) \text{ então } \mathbf{Q}_k \leftarrow \text{Escala} \cdot \mathbf{Q}_{k-1} \\ \text{caso contrário } \mathbf{Q}_k \leftarrow \mathbf{Q}_{k-1} / \text{Escala} \end{array} \right. \quad (152)$$

sendo $\text{Limiar} > 0.0$ e $\text{Escala} > 1.0$ parâmetros determinados experimentalmente. Note que (152) aumenta a variância do ruído do processo \mathbf{Q}_k de um fator dado pelo multiplicador Escala toda vez que o balizador $|\underline{r}_k|$ do processo, dado pelo módulo do vetor residual, for maior que a multiplicação do Limiar pelo valor RMS σ_k da incerteza total. Caso contrário a variância é diminuída de um fator dado pelo divisor Escala . Quanto maior for Escala , mais incisiva será a ação do processo adaptativo.

O filtro de Kalman adaptativo

Exemplo 18: Um radar adota um filtro de Kalman adaptativo (**método Épsilon**) como *track filter* de seu sistema de *target tracking* (TT). Os parâmetros adaptativos são Limiar = 0.19 e Escala = 1.0×10^3 . Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição e velocidade medidas são respectivamente:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{Inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 100.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 0.8 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. A variância do ruído do processo é 1.0×10^{-6} . A predição $\mathbf{P}_{k,k}$ da incerteza (variância) do estado é inicializada em 1000 para todas as variáveis de estado. A velocidade do alvo pode ser considerada constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas durante o rastreamento que ocorre no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{final}$. A velocidade \underline{v}_0 do alvo é mantida constante no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{manobra}$, onde $t_{manobra} = 20$ [s] é o instante em que o alvo efetua uma manobra súbita alterando sua velocidade para

$$\underline{v}_{manobra} = \begin{bmatrix} 100.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

A partir da manobra o alvo mantém velocidade constante no intervalo $t_{manobra} < t < t_{final}$.

Pede-se:

(a) Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da posição do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, as 3 curvas da posição medida do alvo e as 3 curvas da posição estimada do alvo.

(b) Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da velocidade do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e as 3 curvas da velocidade estimada do alvo.

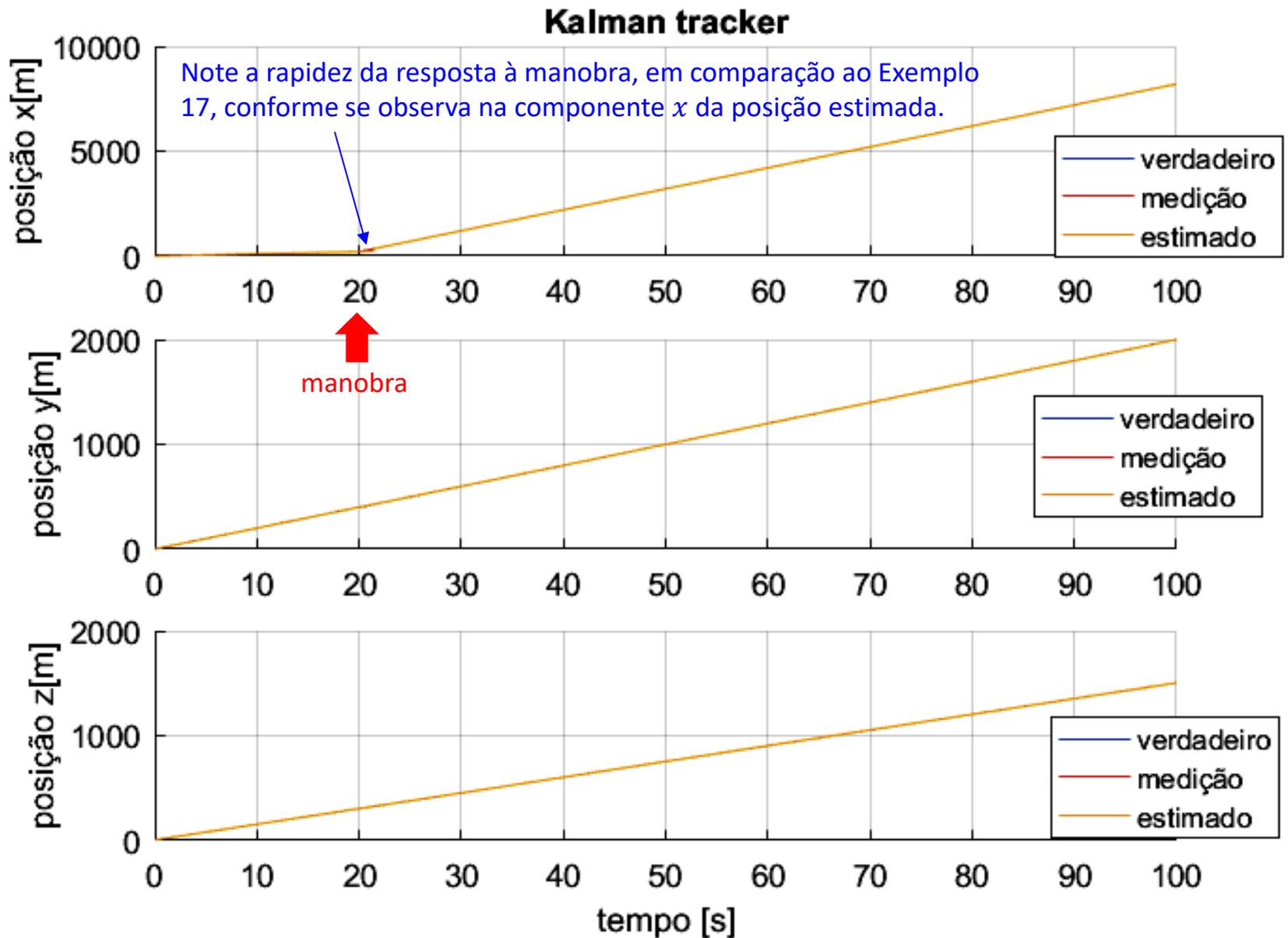
(c) Plote a curva ao longo do tempo do residual $|r_k|$ da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo filtro de Kalman.

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo18.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E18S214.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo18.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

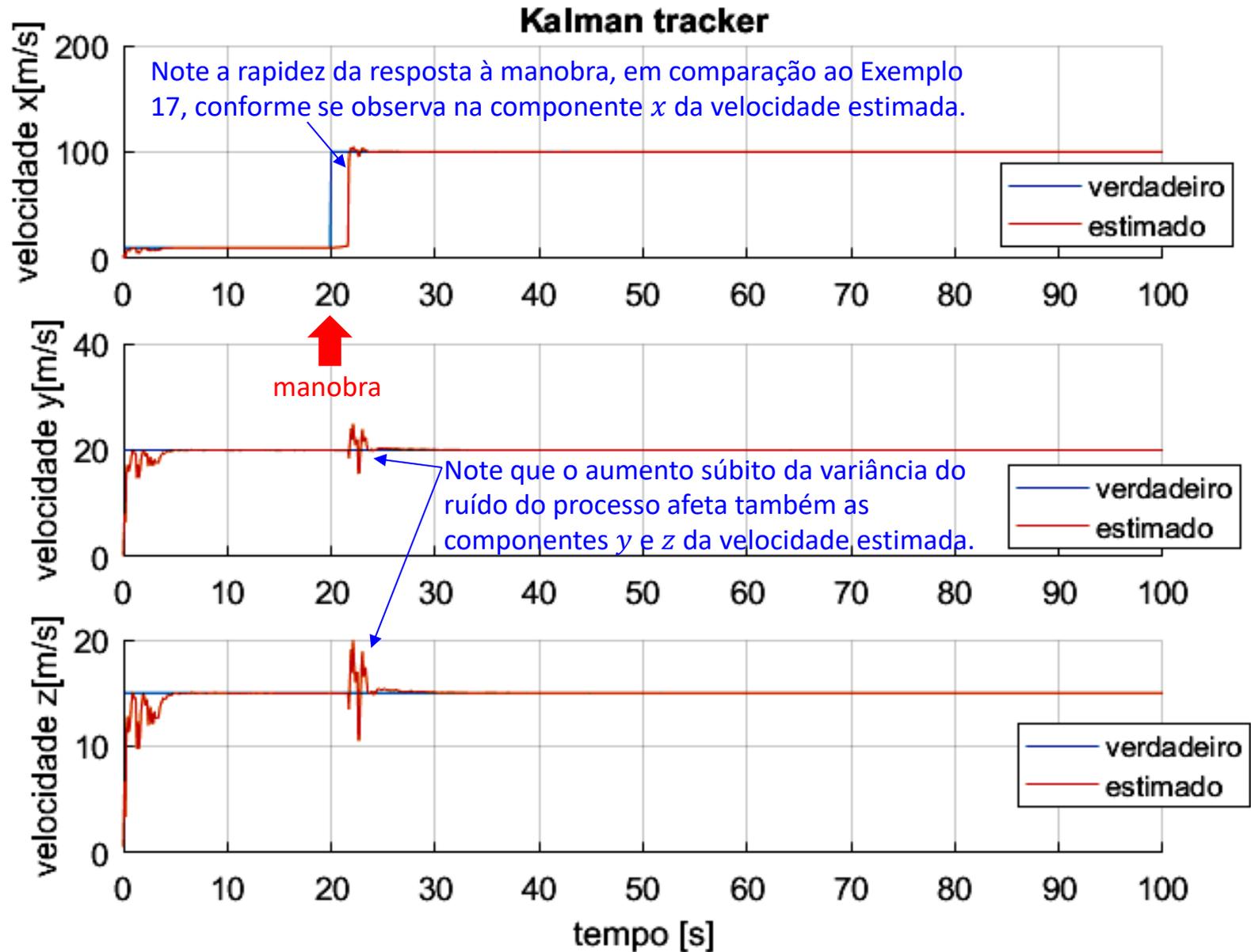
O filtro de Kalman adaptativo

(a)

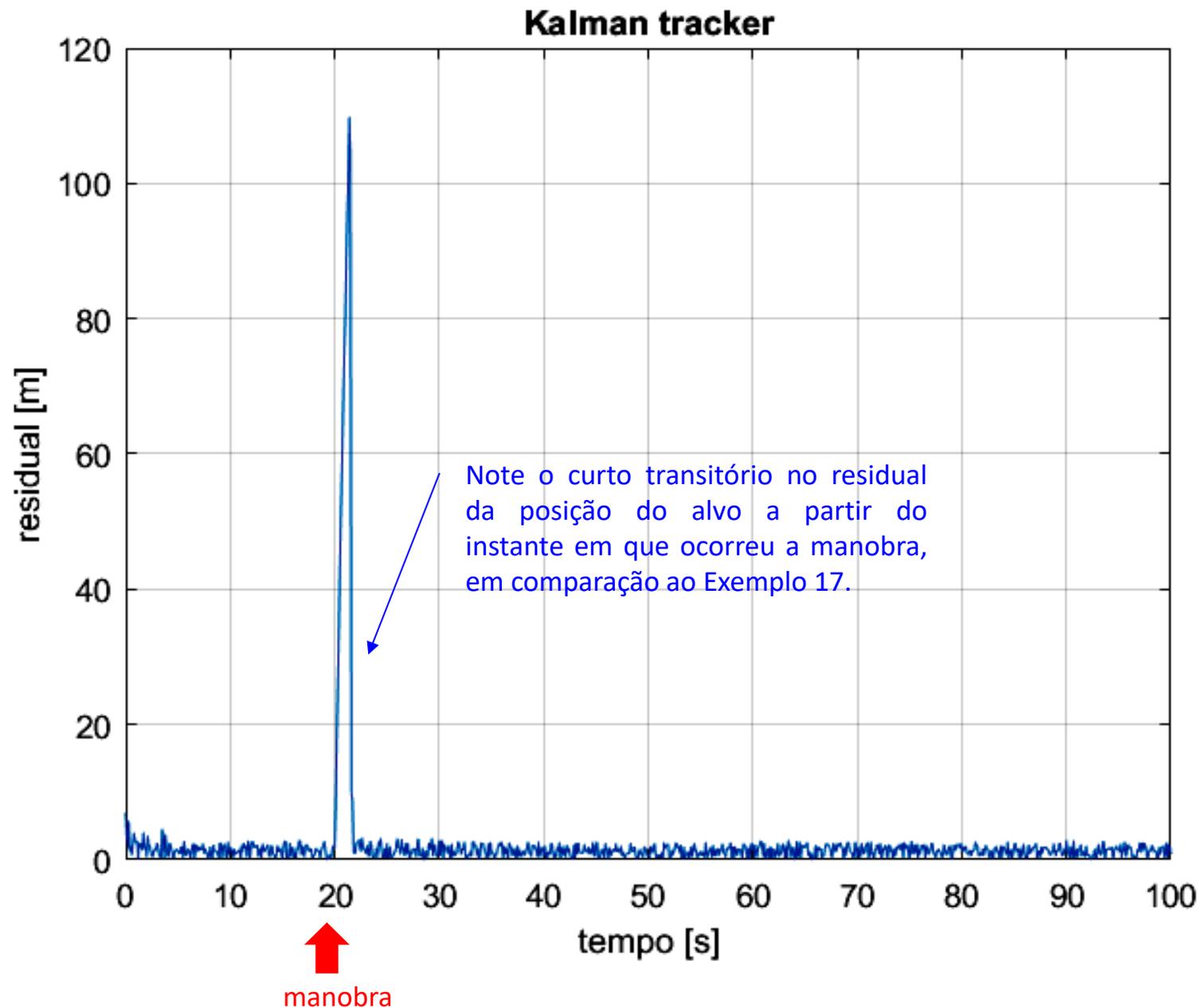


O filtro de Kalman adaptativo

(b)



(c)



O filtro de Kalman adaptativo

Exemplo 19: Um radar adota um filtro de Kalman adaptativo (**método Sigma**) como *track filter* de seu sistema de *target tracking* (TT). Os parâmetros adaptativos são Limiar = 0.08 e Escala = 1.0×10^3 . Um alvo é detectado pelo CFAR e sua posição e velocidade medidas são respectivamente:

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 1.0 \\ 5.0 \end{bmatrix} \text{ [m]} \quad \underline{v}_0 = \begin{bmatrix} 10.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

O sistema TT rastreia o alvo medindo sua distância desde o instante $t_{Inicial} = 0.0$ [s] até o instante $t_{final} = 100.0$ [s]. O intervalo de tempo entre duas medidas consecutivas é $\Delta t = 0.1$ [s]. A incerteza das medições é representada através de um ruído de medição de variância 0.8 e média zero obtido de um gerador de números randômicos com distribuição estatística uniforme para o conjunto de amostras geradas. A variância do ruído do processo é 1.0×10^{-6} . A predição $\mathbf{P}_{k,k}$ da incerteza (variância) do estado é inicializada em 1000 para todas as variáveis de estado. A velocidade do alvo pode ser considerada constante no intervalo de tempo Δt entre duas medidas consecutivas durante o rastreamento que ocorre no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{final}$. A velocidade \underline{v}_0 do alvo é mantida constante no intervalo $t_{Inicial} < t < t_{manobra}$, onde $t_{manobra} = 20$ [s] é o instante em que o alvo efetua uma manobra súbita alterando sua velocidade para

$$\underline{v}_{manobra} = \begin{bmatrix} 100.0 \\ 20.0 \\ 15.0 \end{bmatrix} \text{ [m/s]}$$

A partir da manobra o alvo mantém velocidade constante no intervalo $t_{manobra} < t < t_{final}$.

Pede-se:

(a) Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da posição do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da posição verdadeira do alvo, as 3 curvas da posição medida do alvo e as 3 curvas da posição estimada do alvo.

(b) Considerando as 3 componentes cartesianas $[x \ y \ z]$ da velocidade do alvo, determine e plote em um mesmo gráfico as 3 curvas ao longo do tempo da velocidade verdadeira do alvo e as 3 curvas da velocidade estimada do alvo.

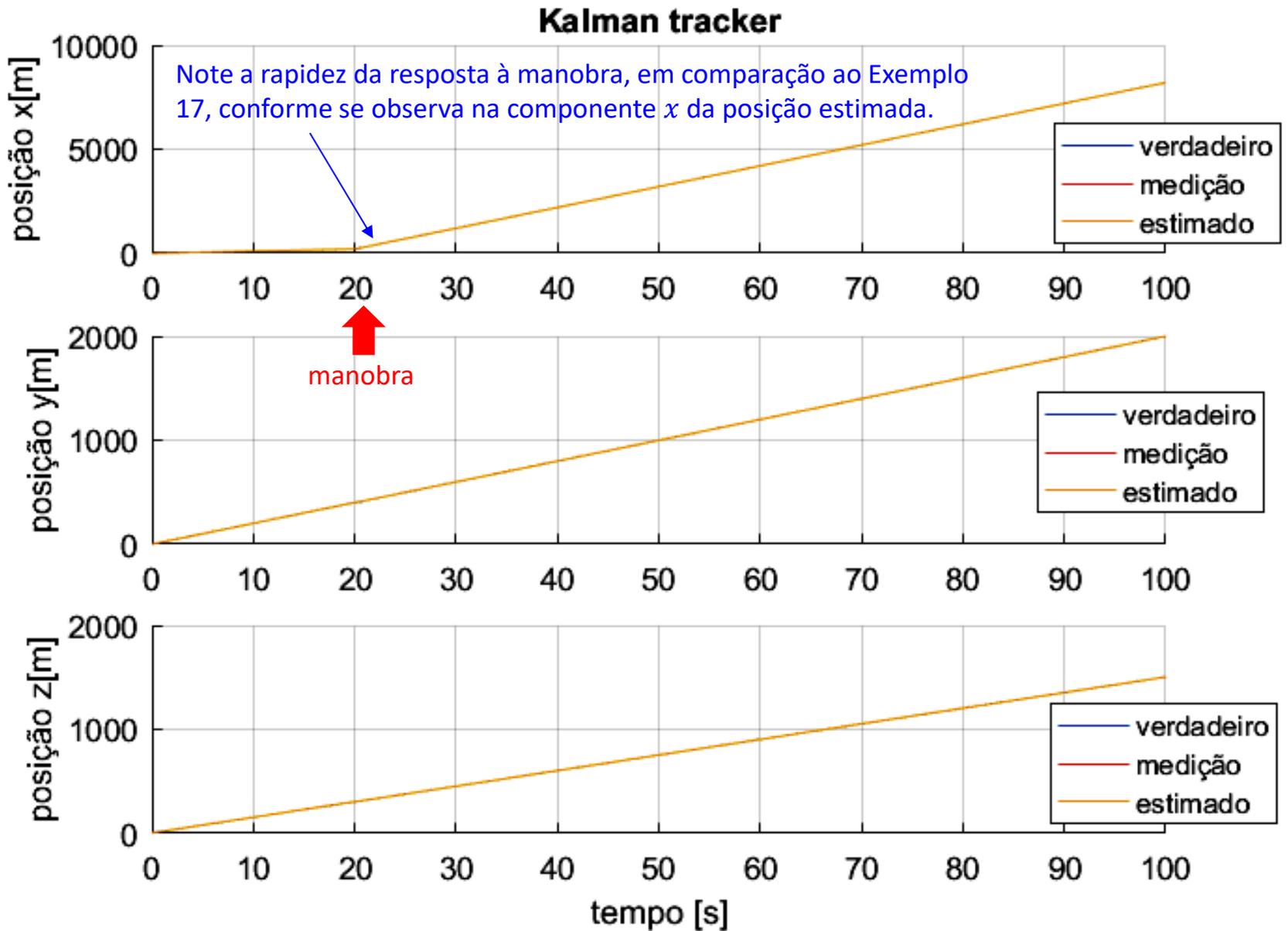
(c) Plote a curva ao longo do tempo do residual $|r_k|$ da posição do alvo determinado pelo processo de filtragem efetuado pelo filtro de Kalman.

Solução:

Para a solução deste exemplo vamos usar o *script* Matlab Exemplo19.m e funções associadas disponíveis em https://www.fccdecastro.com.br/ZIP/TR_C1_E19S218.zip (ler com atenção os comentários no *script* Matlab Exemplo19.m bem como nos *scripts* .m das funções associadas).

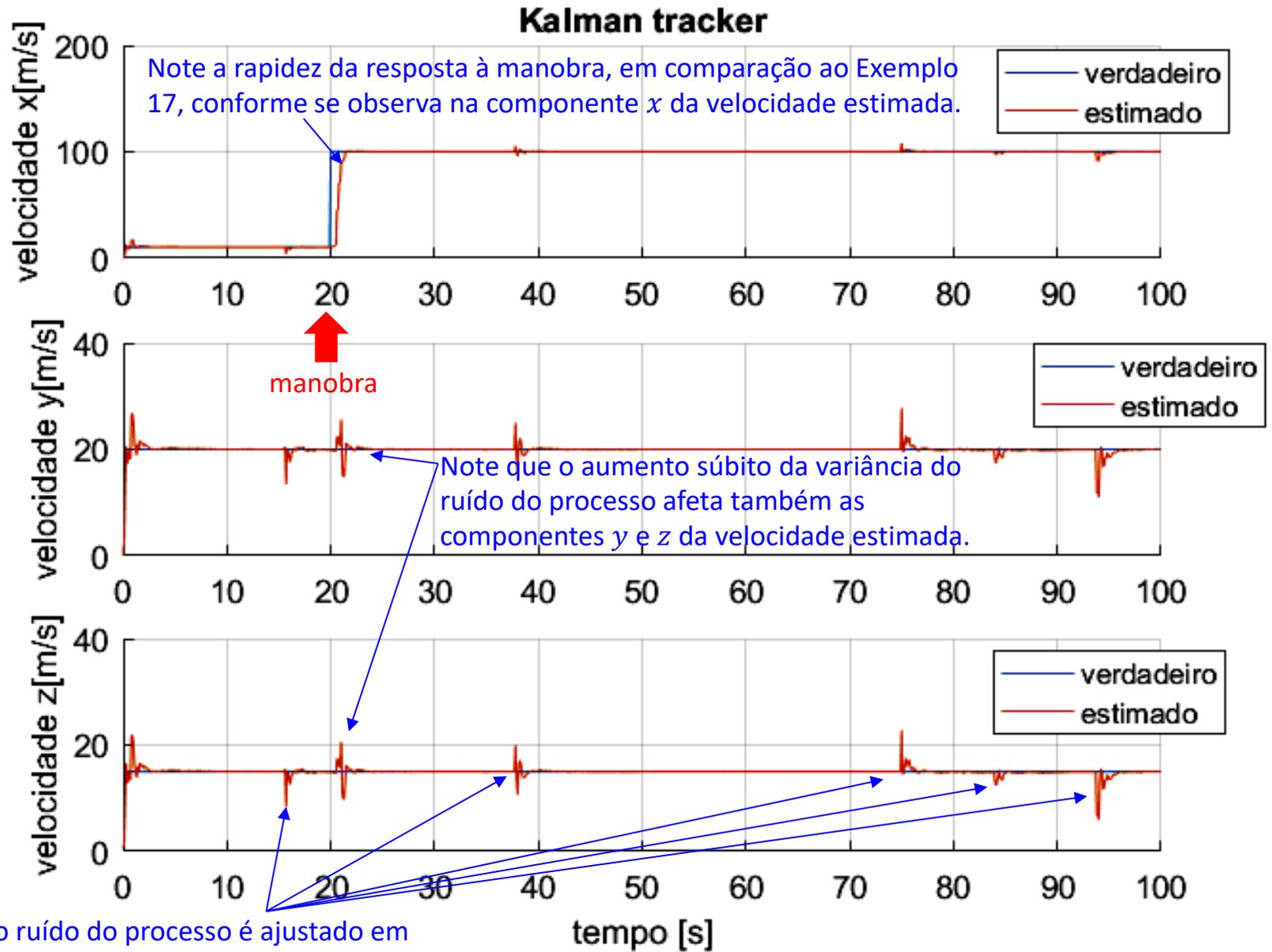
O filtro de Kalman adaptativo

(a)



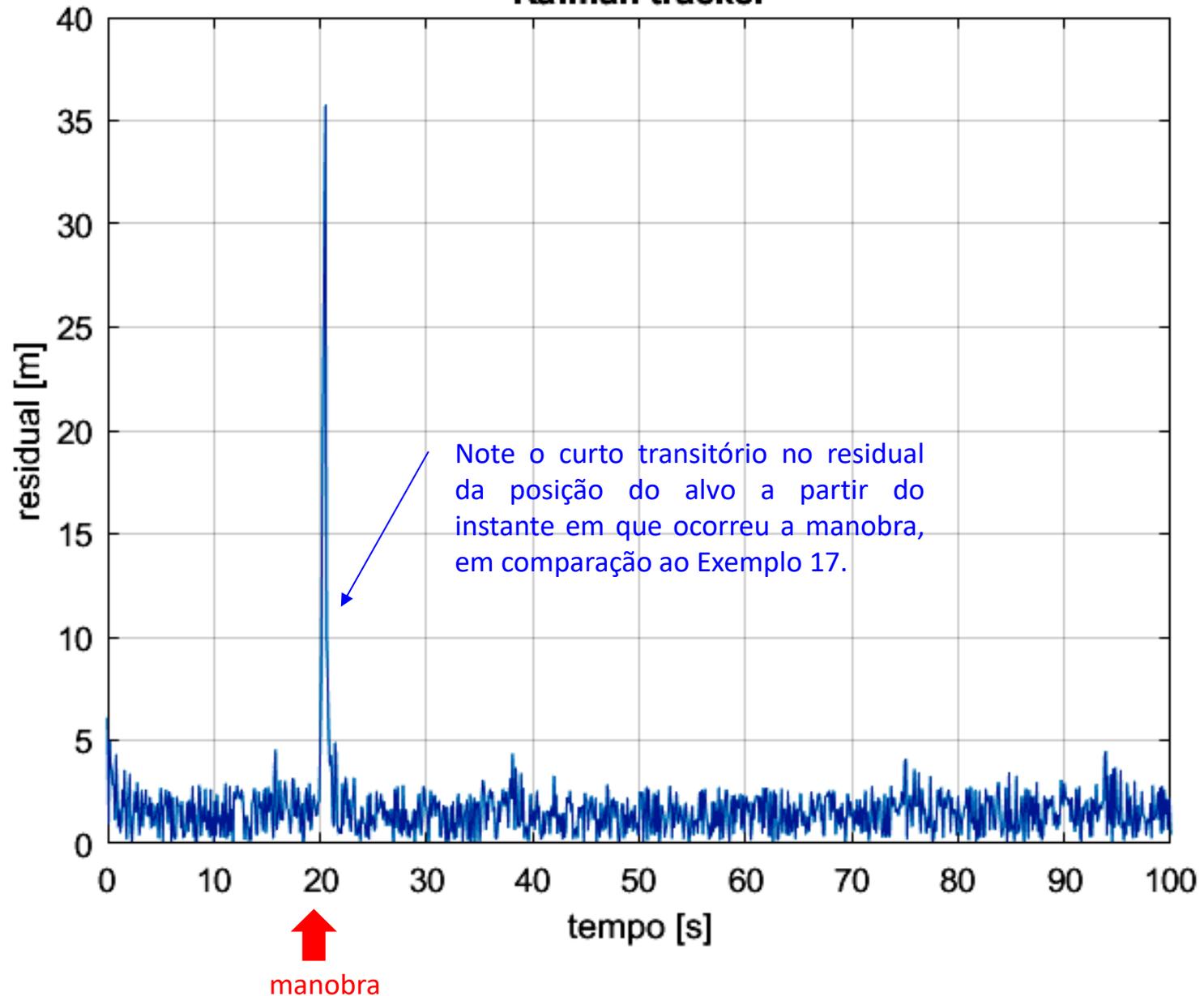
O filtro de Kalman adaptativo

(b)



Note que o ruído do processo é ajustado em outros instantes, distintos do instante da manobra.

Kalman tracker



Apêndice A – Referências Bibliográficas

- [1] Basic Radar Analysis – M.C. Budge Jr., S.R. German – Artech House – 2015
- [2] Introduction to Radar Systems 3rd – M.I. Skolnik – McGraw-Hill – 2001
- [3] Principles of Modern Radar Vol. I: Basic Principles – M.A. Richards, J.A. Scheer, W.A. Holm – SciTech – 2010
- [4] Bistatic Radar 2nd – N. J. Willis – SciTech – 2005
- [5] Radar Techniques Using Array Antennas 2nd – Wulf-Dieter Wirth – IET – 2013
- [6] Advances in Bistatic Radar – N. J. Willis & H.D. Griffiths – SciTech – 2007
- [7] Introduction to Radar Using Python and MATLAB – A. Harrison – Artech House – 2020
- [8] Fundamental Principles of Radar – H. Rahman – CRC Press – 2019
- [9] Pulse Doppler Radar - Principles, Technology, Applications – C. Alabaster – Scitech – 2012
- [10] Radar Essentials - A Concise Handbook for Radar Design and Performance Analysis – G. R. Curry – Scitech – 2012
- [11] Fundamentals of Radar Signal Processing 2nd – M. A. Richards – McGrawHill – 2014
- [12] Introduction to Airborne Radar 3rd – G.W. Stimson, H.D. Griffiths, C.J. Baker and D. Adamy – Scitech – 2014
- [13] Optimal Estimation of Dynamic Systems 2nd, Crassidis & Junkins – CRC Press – 2012
- [14] Radar Systems Analysis And Design Using Matlab 3rd – B. R. Mahafza – CRC Press – 2013

Apêndice B – Especificação da matriz de transição de estado A do Exemplo 15 do slide 196

$$\hat{\underline{j}} \left\{ \begin{array}{l} \hat{\underline{i}} \\ \hat{\underline{k}} \end{array} \right. \underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0.1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{k,k-1} = \underline{x}_{k-1,k-1} + \underline{v}_{k-1,k-1} \Delta t + \underline{a}_{k-1,k-1} \frac{\Delta t^2}{2} \text{ [m]} \quad (123)$$

$$\underline{v}_{k,k-1} = \underline{v}_{k-1,k-1} + \underline{a}_{k-1,k-1} \Delta t \text{ [m/s]} \quad (124)$$

Formato do vetor de estado em conformidade com a matriz A:

$$\underline{x}_k = \begin{bmatrix} \text{Posicao}_{\hat{\underline{i}}_k} \\ \text{Velocidade}_{\hat{\underline{i}}_k} \\ \text{Posicao}_{\hat{\underline{j}}_k} \\ \text{Velocidade}_{\hat{\underline{j}}_k} \\ \text{Posicao}_{\hat{\underline{k}}_k} \\ \text{Velocidade}_{\hat{\underline{k}}_k} \end{bmatrix}$$

Especificação das matrizes P, Q, R, H e B:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \times 10^{-6} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1.4 & 0 & 0 \\ 0 & 1.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ver eq. (142) slide 194} \quad \mathbf{B} = [\mathbf{0}]$$

