

Capítulo II – Codificação de Fonte

A Codificação de Fonte é o processo que visa reduzir o máximo possível a informação redundante da Sequência de Informação em sua saída, seqüência esta obtida a partir do processamento do sinal de entrada $m(t)$ (ver Figura 1.1). O Codificador de Fonte envolve basicamente quatro sub-processos:

1. Amostragem: Processo através do qual o sinal contínuo no tempo $m(t)$ é transformado em um sinal discreto no tempo. Ou seja, valores (amostras) do sinal $m(t)$ são seqüencialmente tomados em instantes distintos, igualmente espaçados no tempo de um intervalo T_s , e são levados à saída do processo de amostragem. Especificamente, o sinal $m(t)$ é transformado no sinal $m(nT_s)$, onde T_s é denominado de intervalo de amostragem e $n = 0, 1, \dots$ é o índice do instante de amostragem. Como para um dado sistema digital o intervalo de amostragem T_s é definido e constante, para efeito de simplificação de representação, é comum o sinal $m(nT_s)$ ser referido como $m(n)$. Nesta representação n é interpretado como o instante $t = nT_s$ no qual o valor do sinal $m(t)$ é levado à saída do processo de amostragem.
2. Quantização: Processo através do qual o sinal $m(n)$ contínuo em amplitude é transformado em um sinal $m_q(n)$ discreto em amplitude (valor). Ou seja, dado $m(n)$ no instante n , $m_q(n)$ assumirá um dos M possíveis valores, denominados níveis de quantização, do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$, sendo $m_0 < m_1 < \dots < m_{M-1}$, com $m_0 > m(n)$ e $m_{M-1} < m(n)$ para todo e qualquer n . Especificamente, $m_q(n) = Q\{m(n)\}$, onde $Q\{\cdot\}$ é o operador que representa a quantização do valor do argumento e é dado por $Q\{\cdot\} = \arg \min_{m_k} |(\cdot) - m_k|$, $m_k \in \Theta$, $k = 0, 1, \dots, M-1$. O operador $Q\{\cdot\}$ pode ser interpretado da seguinte maneira: Dado um valor x a ser quantizado, a operação definida por $Q\{x\} = \arg \min_{m_k} |x - m_k|$, $m_k \in \Theta$, $k = 0, 1, \dots, M-1$, testa todas as M possíveis distâncias $|x - m_k|$ e atribui a $Q\{x\}$ aquele elemento m_q do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ que resultou na menor distância $|x - m_q|$. Quanto menor o número M de níveis de quantização utilizados para representar $m(n)$, menos fiel será a representação e maior será o ruído de quantização, conforme veremos na Seção 2.2.1.
3. Codificação: Processo através do qual cada um dos M possíveis valores de $m_q(n) \in \Theta$, $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$, é mapeado em uma seqüência (ou bloco) de $N = \log_2 M$ dígitos binários (ou bits). Ou seja, cada um dos elementos do conjunto $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ é associado a um número representado por N bits. O tipo de mapeamento a ser utilizado é dependente do código adotado.
4. Compressão: Processo no qual cada uma das M possíveis seqüências de N bits, representativas de cada um dos M possíveis valores de $m_q(n) \in \Theta$, têm o seu número

de bits N reduzido para um valor menor como decorrência da eliminação da informação redundante em $m_q(n) \in \Theta$, através de um Algoritmo de Compressão (Huffman, Lempel-Ziv, etc...). Em muitos sistemas práticos o processo de Compressão ocorre durante o processo de Codificação.

2.1 Amostragem

O princípio básico que rege o processo de amostragem pode ser expresso através do denominado Teorema da Amostragem, cujo enunciado é:

“Seja $m(t)$ um sinal limitado em banda tal que f_M é a frequência mais alta de seu espectro, frequência a partir da qual as componentes espectrais de $m(t)$ podem ser consideradas de magnitude desprezível. Sejam os valores de $m(t)$ determinados a intervalos constantes de T_s segundos tal que $T_s \leq 1/2f_M$, isto é, $m(t)$ é periodicamente amostrado a cada $T_s \leq 1/2f_M$ segundos. Então as amostras $m(nT_s)$ de $m(t)$, $n = 0, 1, \dots$, univocamente determinam $m(t)$. Em decorrência deste fato, o sinal $m(t)$ pode ser reconstruído a partir de $m(nT_s)$ através de um filtro adequado”.

Note que o Teorema da Amostragem exige que a razão (frequência) de amostragem $f_s = 1/T_s \geq 2f_M$ seja rápida o suficiente de modo que pelo menos duas amostras sejam tomadas durante o período $1/f_M$ da componente espectral de $m(t)$ de maior frequência.

O processo de amostragem – reconstrução pode ser melhor compreendido através da Figura 2.1.

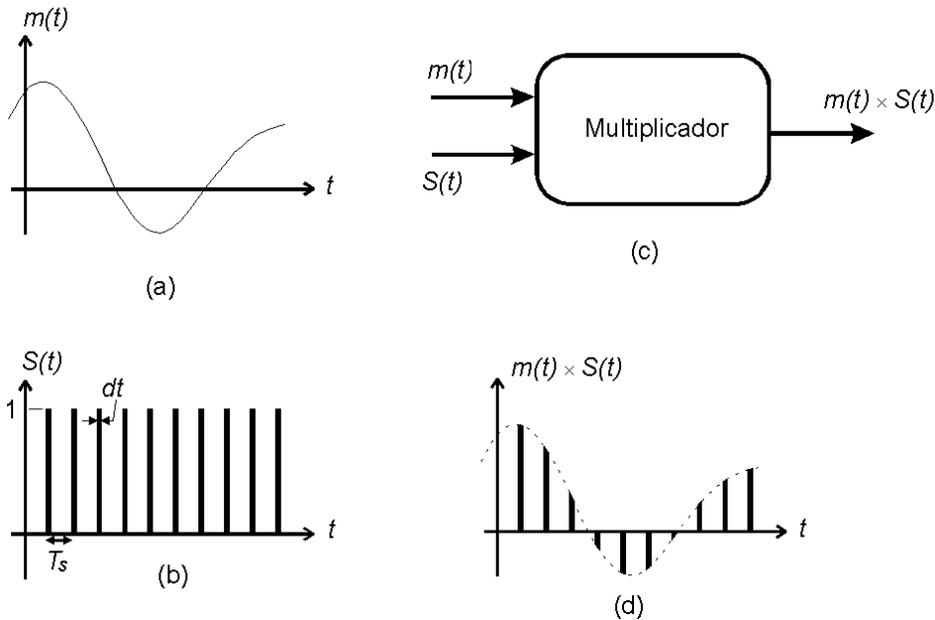


Figura 2.1: Processo de amostragem. (a) Sinal $m(t)$ a ser amostrado. (b) Função de amostragem $S(t)$. (c) Operação de amostragem $S(t)m(t)$. (d) Sinal $m(t)$ amostrado.

O sinal em banda-base $m(t)$ a ser amostrado é mostrado na Figura 2.1a. Um trem de pulsos periódicos $S(t)$, de largura infinitesimal dt , amplitude unitária e período T_s (Figura 2.1b) é aplicado a um multiplicador (Figura 2.1c) conjuntamente com o sinal $m(t)$. A saída $S(t)m(t)$ do multiplicador emula a operação de uma chave que fecha durante dt segundos periodicamente a cada T_s segundos. Uma amostra de $m(t)$ é levada à saída do multiplicador toda vez que a chave fecha, conforme mostra a Figura 2.1d. Isto é, toda vez que ocorre um pulso em $S(t)$ – situação que representa a chave fechada – o valor de $m(t)$ naquele instante é aplicado à saída do multiplicador. Para qualquer outro instante de tempo a saída do multiplicador apresenta o valor zero.

O sinal $S(t)$ é periódico de período T_s e, quando expandido em Série de Fourier, tem a representação mostrada na Equação 2.1.

$$S(t) = \frac{dt}{T_s} + \frac{2dt}{T_s} \left[\cos\left(2\pi \frac{t}{T_s}\right) + \cos\left(4\pi \frac{t}{T_s}\right) + \dots \right] \quad (2.1)$$

Para $T_s = 1/2f_M$ a saída $S(t)m(t)$ do multiplicador é dada por

$$S(t)m(t) = \frac{dt}{T_s} m(t) + \frac{2dt}{T_s} [m(t)\cos(2\pi(2f_M)t) + m(t)\cos(2\pi(4f_M)t) + \dots] \quad (2.2)$$

O primeiro termo da série em (2.2) é o próprio sinal $m(t)$ a menos de um fator multiplicativo constante dt/T_s . O espectro do produto de um sinal qualquer $x(t)$ por um sinal senoidal de frequência ω_c é dado por

$$\mathfrak{F}\{x(t)\cos(\omega_c t + \theta)\} = \frac{1}{2} [\exp(j\theta)X(j(\omega - \omega_c)) + \exp(-j\theta)X(j(\omega + \omega_c))] \quad (2.3)$$

onde $X(j\omega) = \mathfrak{F}\{x(t)\}$ é o espectro de $x(t)$ e o operador $\mathfrak{F}\{\}$ representa o operador Transformada de Fourier [Carlson]. Isto é, ao multiplicarmos $x(t)$ por $\cos(\omega_c t + \theta)$, o espectro de $x(t)$ sofre uma translação de frequência e passa a ter como frequência central a frequência ω_c . Portanto, supondo que o espectro $M(j\omega) = \mathfrak{F}\{m(t)\}$ de $m(t)$ seja limitado em banda tal que f_M é a sua frequência mais alta (Figura 2.2a), então os termos $m(t)\cos(2\pi(kf_M)t)$, $k = 2, 4, \dots$, em (2.2) dão origem ao espectro mostrado na Figura 2.2b. Note que o termo $(dt/T_s)m(t)$ em (2.2) dá origem à porção do espectro que se estende de 0 a f_M na Figura 2.2b. Embora o espectro de magnitude de um sinal real tenha simetria par, é mostrado aqui apenas o eixo positivo do domínio frequência por questões de simplicidade e concisão.

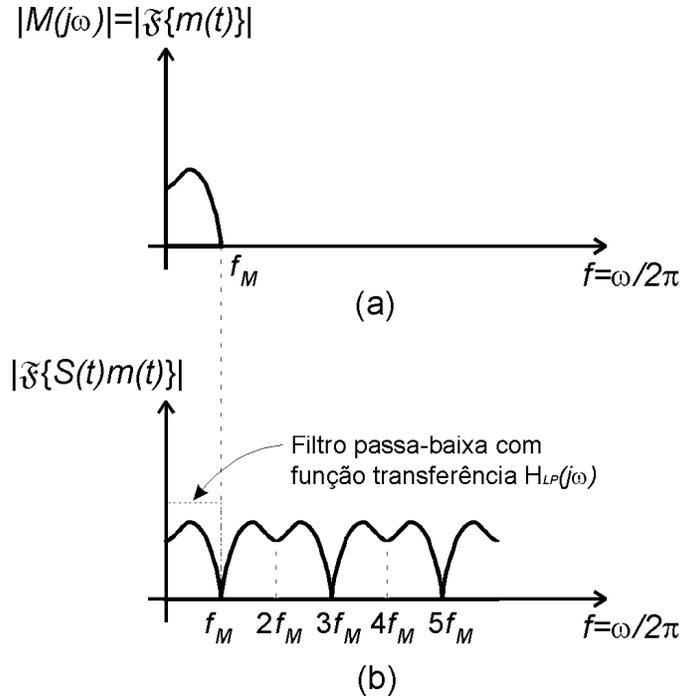


Figura 2.2: Espectro resultante do processo de amostragem. (a) Espectro sinal $m(t)$. (b) Espectro sinal amostrado.

Suponhamos que o sinal amostrado $S(t)m(t)$ passe através de um filtro passa-baixa com frequência de corte f_M cuja função de transferência aproxime-se da função de transferência $H_{LP}(j\omega)$ de um filtro passa-baixa ideal, conforme mostrado na Figura 2.2b. Note que o filtro elimina todas as réplicas do espectro de $m(t)$ centradas em $2f_M, 4f_M, \dots$, mas transfere na íntegra à sua saída o espectro $M(j\omega)$ que se estende de 0 a f_M .

Portanto, após o processo de amostragem, o sinal $m(t)$ original pode ser recuperado sem distorção na saída de um filtro passa-baixa com frequência de corte f_M , próximo do filtro ideal, desde que a frequência de amostragem f_s seja maior ou igual a $2f_M$.

A Figura 2.3a mostra a banda de guarda que é obtida quando $f_s > 2f_M$. A banda de guarda sempre é utilizada na prática porque elimina a necessidade do filtro passa-baixa ser ideal (i.e., o filtro não necessita apresentar declividade infinita na frequência de corte). Tipicamente, para um sinal de voz $f_M = 3.3\text{KHz}$, quando então adota-se $f_s = 8.0\text{KHz}$. A banda de guarda resultante é de $8.0 - 2 \times 3.3 = 1.4\text{KHz}$.

A Figura 2.3b mostra a superposição das réplicas do espectro $m(t)$ original, superposição que ocorre quando $f_s < 2f_M$. Para esta situação, não há forma de filtragem que consiga recuperar o sinal original $m(t)$ sem distorção. Tal distorção é denominada de *aliasing*, (*alias*: pseudônimo – em inglês) porque o espectro original sofre interferência de uma réplica dele mesmo com “outro nome”, isto é, sofre interferência dele mesmo só que transladado em frequência.

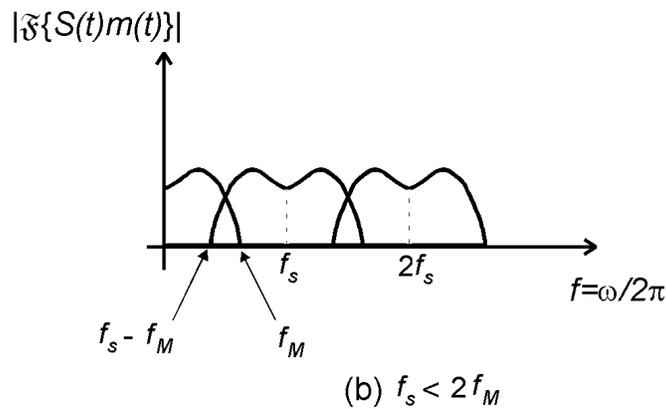
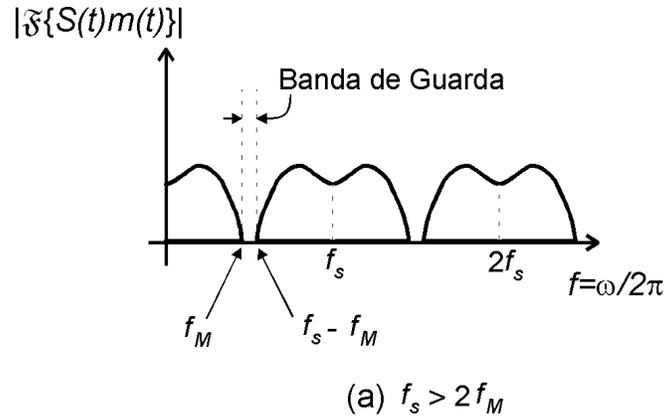


Figura 2.3: (a) Banda de guarda resultante de $f_s > 2f_M$. (b) Superposição de espectros resultante de $f_s < 2f_M$.

A frequência de amostragem mínima $f_s = 2f_M$ para que não haja ocorrência de *aliasing* é também denominada de Frequência de Nyquist. Um aumento da razão de amostragem para além da Frequência de Nyquist aumenta a largura da banda de guarda e facilita o processo de filtragem para recuperação do sinal $m'(t)$ no receptor digital (Ver Figura 1.2). No entanto, um aumento da frequência de amostragem aumenta a banda passante necessária para a transmissão do sinal amostrado através do sistema digital porque será necessário transmitir mais amostras no mesmo intervalo de tempo.

2.1.1 Amostragem Natural

A amostragem instantânea através de um trem de pulsos $S(t)$ de largura infinitesimal dt , vista na Seção 2.1, é uma idealização teórica que, embora instrutiva e didática, não corresponde à implementação prática de sistemas amostradores. Até porque é uma impossibilidade construir circuitos de chaveamento com rapidez suficiente para emular uma chave que feche e abra instantaneamente.

Um forma de amostragem mais próxima da implementação prática é a denominada Amostragem Natural, mostrada na Figura 2.4.

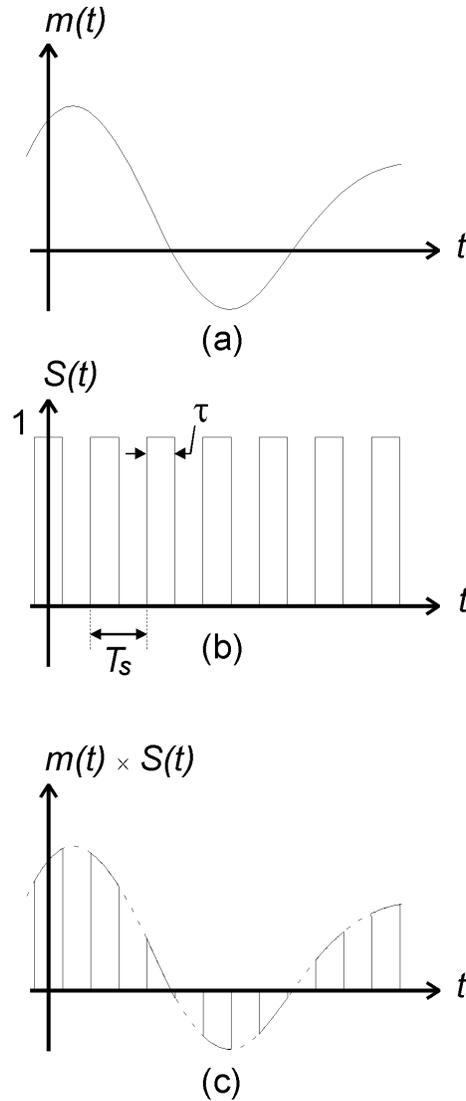


Figura 2.4: Amostragem natural. (a) Forma de onda do sinal em banda-base $m(t)$. (b) Sinal amostrador $S(t)$. (c) Sinal amostrado $S(t)m(t)$.

Na amostragem natural, o sinal amostrador $S(t)$ é um trem de pulsos de largura τ , amplitude unitária e período T_s (Figura 2.4b). Note que o sinal amostrado $S(t)m(t)$ consiste de uma seqüência de pulsos de amplitude variável (Figura 2.4c) e que o topo de cada pulso não é plano (*non-flat-top*: topo-não-plano – em inglês), seguindo a forma de onda do sinal em banda-base $m(t)$ (Figura 2.4a).

Assim como na amostragem instantânea, na amostragem natural o sinal $m'(t)$ no receptor digital (Ver Figura 1.2) pode ser reconstruído exatamente através de um filtro passa-baixa com frequência de corte f_M desde que o sinal $m(t)$ no transmissor digital tenha sido amostrado a uma razão $f_s = 1/T_s$ igual ou maior do que a Frequência de Nyquist, sendo f_M a frequência mais alta do espectro de $m(t)$ e T_s o intervalo de

amostragem. Para verificar a veracidade desta asserção, consideremos que o sinal $S(t)$ (Figura 2.4b) é periódico de período T_s e, quando expandido em Série de Fourier, tem a representação mostrada na Equação 2.4.

$$S(t) = \frac{\tau}{T_s} + \frac{2\tau}{T_s} \left[C_1 \cos\left(1 \times 2\pi \frac{t}{T_s}\right) + C_2 \cos\left(2 \times 2\pi \frac{t}{T_s}\right) + \dots \right] \quad (2.4)$$

onde

$$C_n = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right)}{\left(\frac{n\pi\tau}{T_s}\right)} \quad (2.5)$$

Para $f_s = 1/T_s = 2f_M$ o sinal amostrado $S(t)m(t)$ é dado por

$$S(t)m(t) = \frac{\tau}{T_s} m(t) + \frac{2\tau}{T_s} [m(t)C_1 \cos(2\pi(2f_M)t) + m(t)C_2 \cos(2\pi(4f_M)t) + \dots] \quad (2.6)$$

Portanto, o espectro do sinal $S(t)m(t)$ definido por (2.6), é tal que, assim como na amostragem instantânea, um filtro passa-baixa com frequência de corte f_M entrega em sua saída $S_0(t)$ o sinal

$$S_0(t) = \frac{\tau}{T_s} m(t) \quad (2.7)$$

que é o mesmo sinal resultante da filtragem do sinal definido por (2.2), exceto que dt é substituído por τ .

De (2.7) observa-se que a amplitude de $S_0(t)$ é proporcional à τ/T_s . Portanto para sistemas não-multiplexados no tempo, não é raro maximizar τ/T_s até a unidade para que seja maximizado o nível do sinal $S_0(t)$. No entanto, em sistemas multiplexados TDM [Carlson][Taub] (TDM: *Time Division Multiplex* – em inglês), a diferença $T_s - \tau$ define o intervalo de tempo disponível para a inserção dos demais sinais a serem multiplexados no tempo conjuntamente com $m(t)$. Portanto, em sistemas TDM existe um compromisso entre o número de sinais multiplexados e o nível do sinal recuperado após filtragem passa-baixa no receptor.

2.1.2 Amostragem *Flat-top*

A amostragem natural descrita na Seção 2.1.1 raramente é utilizada na prática. Ao invés, pulsos com topo plano (*flat-top*: topo plano – em inglês) são usualmente utilizados, conforme mostra a Figura 2.5a.

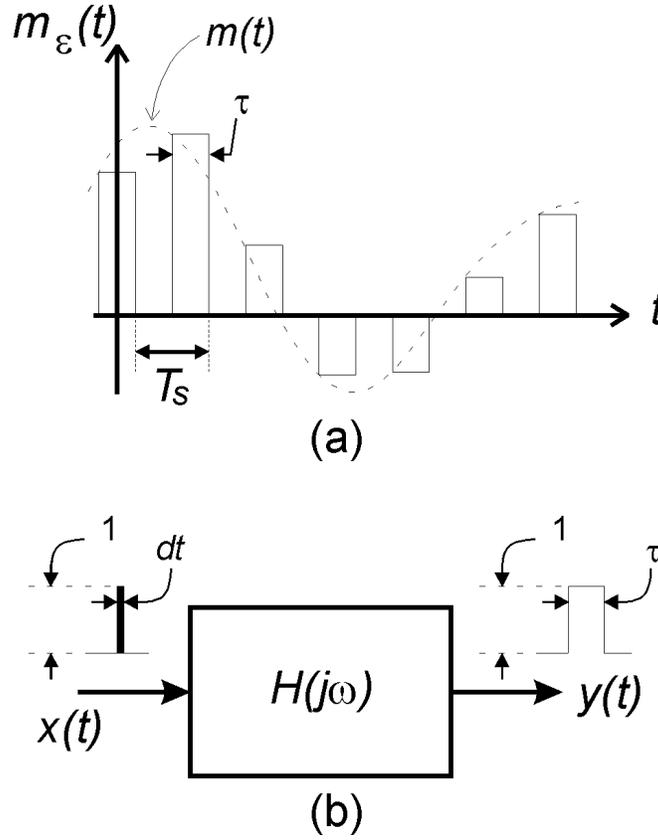


Figura 2.5: Amostragem *flat-top*. (a) Sinal amostrado por amostragem *flat-top*. (b) Rede linear cuja função $H(j\omega)$ é tal que transforma o pulso $x(t)$ de amplitude unitária e largura infinitesimal dt no pulso $y(t)$ de amplitude unitária e largura τ .

Neste tipo de amostragem os pulsos tem amplitude constante e definida pelo valor do sinal $m(t)$ em algum ponto dentro do intervalo do pulso. No entanto, por conveniência, na Figura 2.5a o instante de amostragem coincide com o início dos pulsos.

Na amostragem *flat-top* é impossível recuperar o sinal $m'(t)$ através de um filtro passa-baixa no receptor digital sem que ocorra distorção. No entanto, a amostragem *flat-top* tem o mérito de simplificar a implementação dos circuitos eletrônicos utilizados para executar a operação de amostragem [Taub].

Para compreendermos o mecanismo gerador da distorção inerente à amostragem *flat-top*, seja o espectro do sinal $m(t)$, dado por $M(j\omega) = \mathfrak{F}\{m(t)\}$, limitado em banda à frequência máxima f_M . O espectro do sinal amostrado *flat-top* $M_\epsilon(j\omega) = \mathfrak{F}\{m_\epsilon(t)\}$ é determinado considerando que os pulsos *flat-top* podem ser gerados passando o sinal instantaneamente amostrado da Figura 2.1d através da rede da Figura 2.5b, a qual possui função de transferência $H(j\omega)$. A função $H(j\omega)$ é tal que transforma o pulso $x(t)$ de

amplitude unitária e largura infinitesimal dt no pulso $y(t)$ de amplitude unitária e largura τ . A função $H(j\omega)$ é determinada através de

$$H(j\omega) = \frac{\mathfrak{F}\{y(t)\}}{\mathfrak{F}\{x(t)\}} \quad (2.8)$$

onde $x(t)$ pode ser representado por um impulso de intensidade dt e

$$\mathfrak{F}\{x(t)\} = dt \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = dt \left[e^{-j\omega t} \right]_{t=0} = dt \quad (2.9)$$

$$\mathfrak{F}\{y(t)\} = \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{e^{-j\omega t}}{-j\omega} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} = \frac{e^{-j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{j\omega \frac{\tau}{2}}}{-j\omega} = \frac{\tau}{2} \frac{e^{j\omega \frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega \frac{\tau}{2}}}{j\omega \frac{\tau}{2}} = \frac{\tau \operatorname{sen}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}} \quad (2.10)$$

Assim, de (2.8), (2.9) e (2.10)

$$H(j\omega) = \frac{\tau \operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{dt \omega\tau/2} \quad (2.11)$$

Portanto, o espectro $M_\varepsilon(j\omega) = \mathfrak{F}\{m_\varepsilon(t)\}$ do sinal amostrado *flat-top* é dado por

$$M_\varepsilon(j\omega) = M(j\omega)H(j\omega) = M(j\omega) \frac{\tau \operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{dt \omega\tau/2} \quad (2.12)$$

E na banda de freqüências que se estende de 0 a f_M , considerando o primeiro termo de (2.2) e considerando (2.12), podemos escrever

$$M_\varepsilon(j\omega) = \frac{\tau}{T_s} M(j\omega) \frac{\operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \quad 0 \leq f \leq f_M \quad (2.13)$$

Por simplicidade, vamos assumir que o espectro $M(j\omega) = \mathfrak{F}\{m(t)\}$ do sinal $m(t)$ seja constante e igual a M_0 dentro da faixa 0 a f_M , conforme mostra a Figura 2.6a. A Figura 2.6b mostra o espectro do sinal $m(t)$ amostrado instantaneamente e a Figura 2.6c mostra a magnitude do fator $\operatorname{sen}(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$ em (2.13) com fator de escala τ . A Figura 2.6d mostra a magnitude do espectro do sinal amostrado *flat-top* $M_\varepsilon(j\omega) = \mathfrak{F}\{m_\varepsilon(t)\}$.

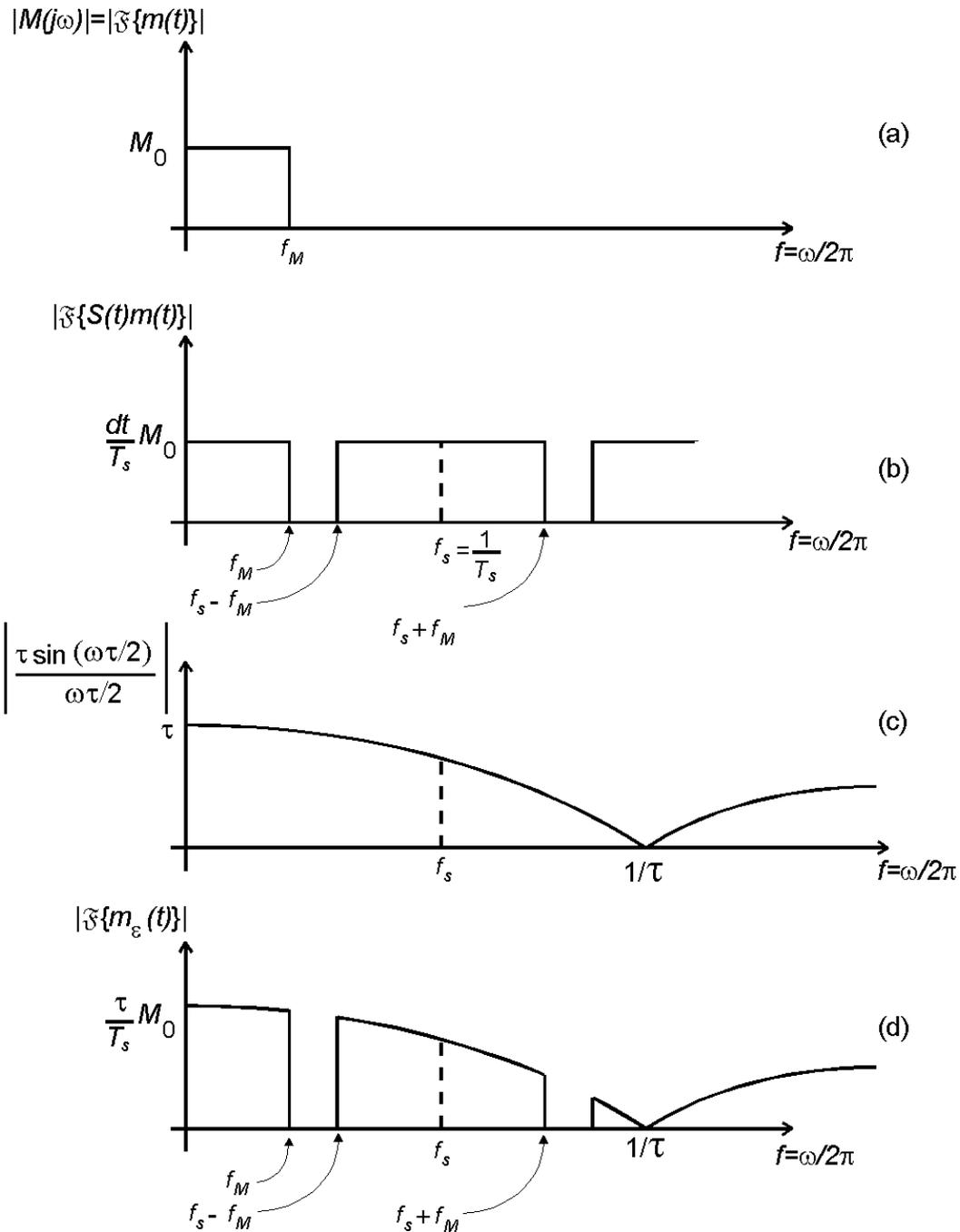


Figura 2.6: Espectro resultante da amostragem *flat-top*. (a) Espectro $M(j\omega) = \mathcal{F}\{m(t)\}$ do sinal $m(t)$ constante e igual a M_0 dentro da faixa 0 a f_M para efeito de simplificação. (b) Espectro do sinal $m(t)$ amostrado instantaneamente. (c) Magnitude do fator $\sin(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$ na Equação (2.13) com fator de escala τ . (d) Magnitude do espectro $M_\epsilon(j\omega) = \mathcal{F}\{m_\epsilon(t)\}$ do sinal amostrado *flat-top*.

Observe que a medida que a largura τ dos pulsos *flat-top* diminui, o gráfico de $|\tau \text{sen}(\omega\tau/2)/\omega\tau/2|$ “achata” devido ao primeiro nulo $1/\tau$ afastar-se de origem. Em consequência, a medida que τ diminui, o espectro $M_\epsilon(j\omega) = \mathfrak{F}\{m_\epsilon(t)\}$ (Equação (2.13) e Figura 2.6d) torna-se cada vez mais semelhante ao espectro $M(j\omega) = \mathfrak{F}\{m(t)\}$ na faixa $0 \leq f \leq f_M$. Portanto, quanto mais estreitos os pulsos *flat-top* menor a distorção do sinal $m'(t)$ recuperado no receptor e, adversamente, menor a sua amplitude τ/T_s . Para compensar a distorção introduzida pelo fator $\text{sen}(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$ sem diminuir demasiadamente a amplitude τ/T_s , não raro são utilizados filtros compensadores que aproximam a função $[\text{sen}(\omega\tau/2)/\omega\tau/2]^{-1}$ no domínio frequência.

2.1.3 Amostragem *Sample-and-Hold*

Quando o nível de amplitude do sinal recuperado $m'(t)$ é de importância maior que a distorção introduzida pelo fator $\text{sen}(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$, como acontece, por exemplo, quando a informação é enviada através de um canal de transmissão com baixa SNR, é comum fazer $\tau/T_s = 1$, conforme mostra a Figura 2.7.

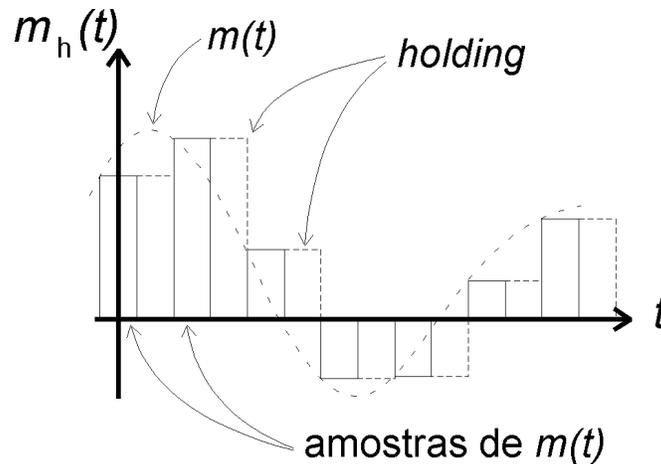


Figura 2.7: Amostragem *Sample-and-Hold*.

Portanto, na banda de frequências que se estende de 0 a f_M , o espectro $M_\epsilon(j\omega) = \mathfrak{F}\{m_\epsilon(t)\}$ do sinal resultante de amostragem *Sample-and-Hold* é dado por

$$M_\epsilon(j\omega) = M(j\omega) \frac{\text{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2}, \quad 0 \leq f \leq f_M \quad (2.14)$$

A Figura 2.8a mostra o espectro do sinal $m(t)$ amostrado instantaneamente e a Figura 2.8b mostra a magnitude do fator $\text{sen}(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$ em (2.14) com fator de escala τ . A Figura 2.8c mostra a magnitude do espectro $M_\epsilon(j\omega) = \mathfrak{F}\{m_\epsilon(t)\}$ do sinal resultante da amostragem *Sample-and-Hold*.

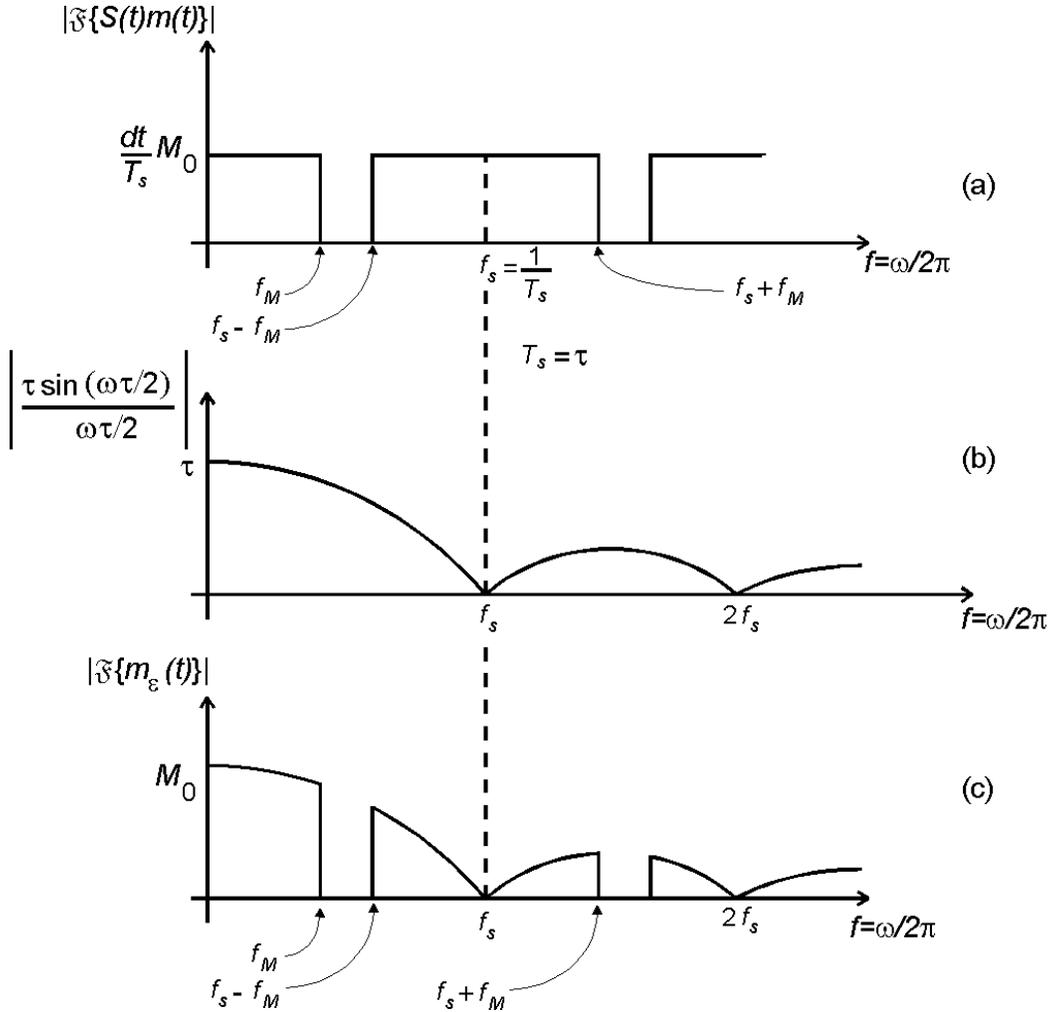


Figura 2.8: Espectro resultante da amostragem *Sample-and-Hold*. (a) espectro do sinal $m(t)$ amostrado instantaneamente. (b) Magnitude do fator $\sin(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$ na Equação (2.14) com fator de escala τ . (c) Magnitude do espectro $M_\epsilon(j\omega) = \mathfrak{S}\{m_\epsilon(t)\}$ do sinal resultante da amostragem *Sample-and-Hold*.

Observe que a distorção introduzida pelo fator $\sin(\omega\tau/2)/\omega\tau/2$ é considerável, problema que é usualmente contornado pelo uso de compensadores $[\sin(\omega\tau/2)/\omega\tau/2]^{-1}$. Uma das possibilidades de implementação de compensadores $[\sin(\omega\tau/2)/\omega\tau/2]^{-1}$ é determinar $c(t) = \mathfrak{S}^{-1}\{[\sin(\omega\tau/2)/\omega\tau/2]^{-1}\}$ e executar a convolução de $c(t)$ com $m'(t)$ no receptor.

2.2 Quantização

A maior limitação de um sistema de transmissão analógico ocorre na situação em que é necessário enviar informação através de longas distâncias. Uma vez ruído tendo sido adicionado ao sinal ao longo do canal de transmissão de um sistema analógico é possível

minimizar seu efeito, mas nunca eliminar. Esta é a grande diferença entre um sistema analógico e um sistema digital. O sinal recebido em um sistema analógico é gradativamente degradado a medida que a SNR do canal cai. No entanto, um sistema digital apresenta um limiar de SNR no canal acima do qual o sinal é recebido sem degradação perceptível. Portanto, repetidores colocados em pontos ao longo do canal nos quais a SNR encontra-se acima do limiar permite a comunicação entre pontos remotos com excelente fidelidade. Este efeito de limiar, característico de sistemas digitais, é devido, em parte, ao efeito da quantização. A operação de quantização tem o grande mérito de, para um valor suficientemente alto de SNR, o ruído aditivo ser totalmente separado do sinal.

A Figura 2.9 mostra graficamente a operação de quantização $m_q(t) = Q\{m(t)\}$, ou $m_q(n) = Q\{m(n)\}$ se considerarmos que, antes de ser quantizado, $m(t)$ é amostrado a intervalos T_s . Portanto, é desnecessária a indexação temporal explícita das variáveis envolvidas. Assume-se que o instante de amostragem ocorre no início de cada intervalo T_s e que $m(t)$ varia entre os limites V_L e V_H .

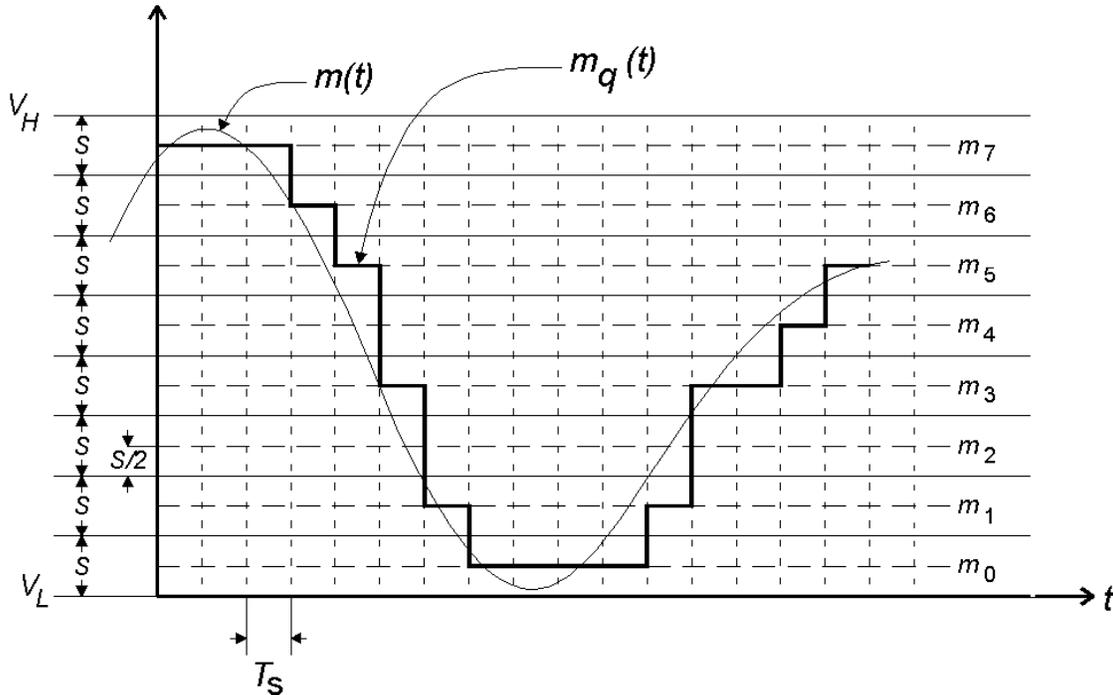


Figura 2.9: Operação de quantização $m_q(t) = Q\{m(t)\}$, ou $m_q(n) = Q\{m(n)\}$ fora do contexto temporal.

Observe na Figura 2.9 que a operação $Q\{\cdot\}$ realizada é $Q\{\cdot\} = \arg \min_{m_k} |(\cdot) - m_k|$, $m_k \in \Theta$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$, $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ com $M = 8$. A quantidade $S = (V_H - V_L) / M$ é denominada de passo de quantização ou passo do quantizador (*quantizer step*). A qualquer instante, o erro de quantização $e_q(t) = m(t) - m_q(t)$ é tal que

$|e_q| \leq S/2$. Obviamente, quanto maior M , mais $m_q(t)$ assemelha-se a $m(t)$ e, portanto, menor será $e_q(t)$.

Vamos considerar agora a situação em que o sinal quantizado $m_q(t)$ é recebido por um repetidor ao longo do percurso da informação até o destino, conforme mostra a Figura 2.10. Vamos supor que o repetidor seja o mais simples possível, isto é, o repetidor é composto de um amplificador e de um quantizador.

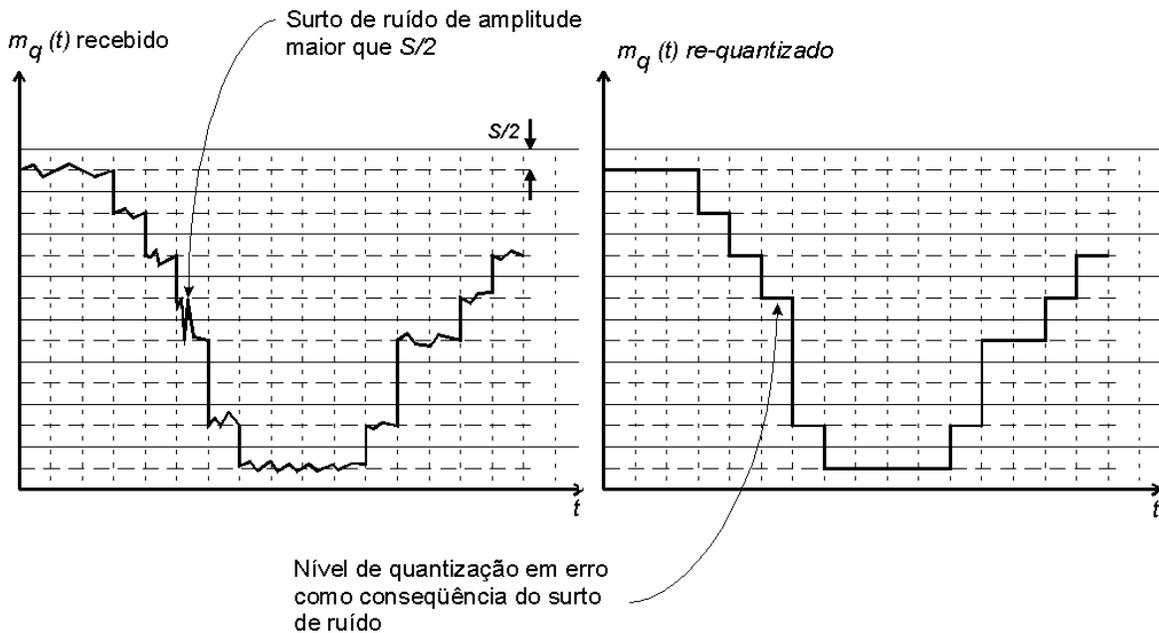


Figura 2.10: Efeito regenerativo em um repetidor simples, por consequência do processo de re-quantização.

Observe que existe ruído superposto ao sinal $m_q(t)$ recebido. Mas, suponhamos que o repetidor esteja em um ponto ao longo do canal no qual a SNR seja tal que o nível de ruído superposto seja quase sempre menor do que $S/2$. Portanto, o quantizador do repetidor, ao re-quantizar o sinal $m_q(t)$ recebido, remove o ruído a ele superposto, regenerando o sinal $m_q(t)$ original. Em raros instantes, quando o nível de ruído ultrapassa o limiar $S/2$, um erro é retransmitido adiante.

Observe também que quanto maior o passo de quantização S maior será a remoção de ruído superposto pelo processo de quantização. No entanto, quanto maior for S maior será o erro de quantização $e_q(t) = m(t) - m_q(t)$. O erro de quantização pode ser considerado como um ruído superposto ao sinal após a quantização e é denominado de ruído de quantização.

A média quadrática do ruído de quantização é uma medida da potência do ruído de quantização, esta última necessária ao cálculo da SNR de quantização.

2.2.1 Ruído de Quantização

A potência do ruído gerado no processo de quantização é dada pela média quadrática do erro de quantização. No domínio tempo, a potência de ruído de quantização é dada por

$$\overline{e_q^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} e_q^2(t) dt. \quad (2.15)$$

Mas (2.15) não é de determinação prática, principalmente porque não conhecemos analiticamente a função $e_q(t) = m(t) - m_q(t)$. Isto é, $m(t)$ é aleatório pois depende da fonte de informação (voz, imagem, dados, etc...), o que sugere que seja utilizada a média estatística ao invés da média no tempo para o cálculo da potência de ruído. Na realidade, o uso da média estatística no lugar da média no tempo baseia-se na suposição de que o sinal $m(t)$ (e, em consequência, $e_q(t)$) seja um processo aleatório Ergódico, i.e, um processo em que a média no tempo é livremente intercambiável pela média estatística [Taub].

Seja $f(m)$ a função densidade de probabilidade do sinal $m(t)$. Seja $f(m)dm$ a probabilidade que $m(t)$ assuma um valor dentro da faixa $m - dm/2$ a $m + dm/2$. Então a média do quadrado (= média quadrática) do erro de quantização é dada por

$$\overline{e_q^2} = \int_{m_0-S/2}^{m_0+S/2} f(m)(m - m_0)^2 dm + \int_{m_1-S/2}^{m_1+S/2} f(m)(m - m_1)^2 dm + \dots + \int_{m_{M-1}-S/2}^{m_{M-1}+S/2} f(m)(m - m_{M-1})^2 dm. \quad (2.16)$$

Obviamente a função densidade de probabilidade $f(m)$ não é constante ao longo do intervalo de valores $V_L \leq m \leq V_H$ possíveis a $m(t)$. No entanto, para uma grande número M de níveis de quantização, o passo de quantização $S = (V_H - V_L)/M$ é pequeno comparado com a faixa de excursão $V_H - V_L$ de $m(t)$. Nesta situação, é razoável supor que $f(m)$ seja aproximadamente constante dentro da faixa $m - S/2$ a $m + S/2$. Então, podemos substituir $f(m)$ no primeiro termo de (2.16) pela constante c_0 , assim como podemos substituir $f(m)$ no segundo termo de (2.16) pela constante c_1 , e assim por diante, de modo que

$$\overline{e_q^2} = c_0 \int_{m_0-S/2}^{m_0+S/2} (m - m_0)^2 dm + c_1 \int_{m_1-S/2}^{m_1+S/2} (m - m_1)^2 dm + \dots + c_{M-1} \int_{m_{M-1}-S/2}^{m_{M-1}+S/2} (m - m_{M-1})^2 dm, \quad (2.17)$$

$$\overline{e_q^2} = c_0 \left[\frac{(m - m_0)^3}{3} \right]_{m_0-S/2}^{m_0+S/2} + c_1 \left[\frac{(m - m_1)^3}{3} \right]_{m_1-S/2}^{m_1+S/2} + \dots + c_{M-1} \left[\frac{(m - m_{M-1})^3}{3} \right]_{m_{M-1}-S/2}^{m_{M-1}+S/2}, \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \overline{e_q^2} = & c_0 \left[\frac{(m_0 + S/2 - m_0)^3}{3} - \frac{(m_0 - S/2 - m_0)^3}{3} \right] + \\ & + c_1 \left[\frac{(m_1 + S/2 - m_1)^3}{3} - \frac{(m_1 - S/2 - m_1)^3}{3} \right] + \\ & \dots + c_{M-1} \left[\frac{(m_{M-1} + S/2 - m_{M-1})^3}{3} - \frac{(m_{M-1} - S/2 - m_{M-1})^3}{3} \right] \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\overline{e_q^2} = c_0 \left[\frac{S^3}{12} \right] + c_1 \left[\frac{S^3}{12} \right] + \dots + c_{M-1} \left[\frac{S^3}{12} \right], \quad (2.20)$$

$$\overline{e_q^2} = (c_0 S + c_1 S + \dots + c_{M-1} S) \left[\frac{S^2}{12} \right] = \left[\frac{S^2}{12} \right] \sum_{k=0}^{M-1} c_k S. \quad (2.21)$$

Mas c_k é o valor da função densidade probabilidade de $m(t)$ dentro da faixa $m_k - S/2$ a $m_k + S/2$, $k = 0, 1, \dots, M - 1$. Portanto $c_k S$ é o valor da probabilidade do valor de $m(t)$ ocorrer dentro da faixa $m_k - S/2$ a $m_k + S/2$. Como a probabilidade de que o valor de $m(t)$ ocorra dentro da faixa $V_L \leq m \leq V_H$ é 1.0, então $\sum_{k=0}^{M-1} c_k S = 1.0$ e (2.21) resulta em

$$\overline{e_q^2} = \left[\frac{S^2}{12} \right]. \quad (2.22)$$

A Equação (2.22) define a potência do ruído aditivo gerado pelo processo de quantização. Para calcularmos a SNR de quantização, consideremos, por simplicidade, que a função densidade de probabilidade $f(m)$ do sinal $m(t)$ seja constante ao longo do intervalo $V_L \leq m \leq V_H$ e que $V_H = -V_L = V$. Logo, $f(m) = 1/2V$. Para qualquer quantizador prático, a potência do sinal quantizado menos a potência do ruído de quantização é aproximadamente igual à do sinal $m(t)$. Portanto, a potência de sinal (sem ruído) após o processo de quantização pode ser dada pela potência $\overline{m^2(t)}$ do sinal $m(t)$ através de

$$\overline{m^2(t)} = \int_{-V}^V \frac{1}{2V} m^2(t) dm = \frac{V^2}{3} \quad (2.23)$$

mas, se o número de níveis de quantização é M , então $MS = 2V$ e cada nível de quantização pode ser representado por número de $N = \log_2 M$ bits. Logo de (2.23) temos

$$\overline{m^2(t)} = \frac{(MS)^2}{12} \quad (2.24)$$

e de (2.22) e (2.24) podemos obter a SNR de quantização dada por

$$\text{SNR}_Q = \frac{\overline{m^2(t)}}{e_q^2} = M^2 = (2^N)^2 = 2^{2N} \quad (2.25)$$

$$\text{SNR}_Q = 10 \log 2^{2N} = 6N \text{ [dB]} \quad (2.26)$$

2.3 Codificação

Nesta etapa do Codificador de Fonte, o sinal $m_q(t)$ (ou $m_q(n)$) resultante do processo de amostragem seguido do processo de quantização é transformado em uma seqüência numérica em base binária. Cada amostra $m_q(n) \in \Theta$ é mapeada em uma seqüência (ou bloco) de $N = \log_2 M$ dígitos binários (ou bits), conforme mostra a Figura 2.11 para $M = 8$, sendo $\Theta = \{m_0, m_1, \dots, m_{M-1}\}$ o conjunto de M possíveis valores de $m_q(n)$ ou níveis de quantização.

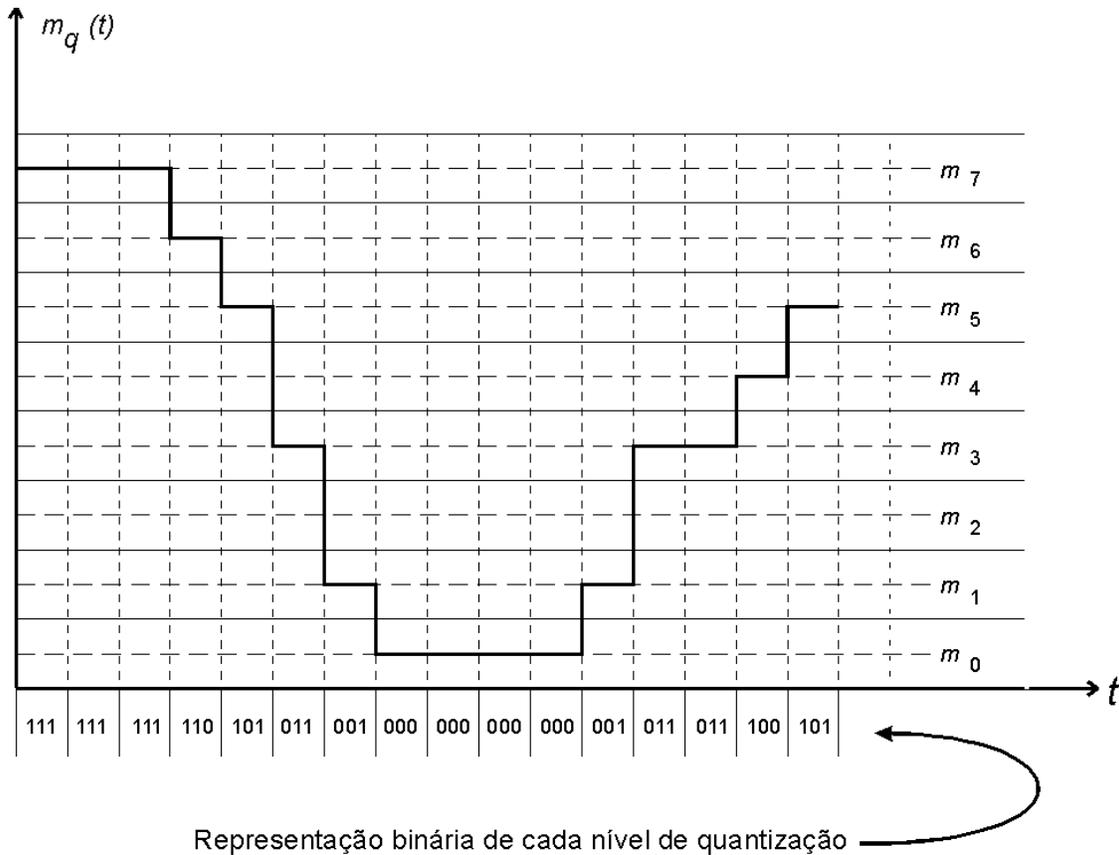


Figura 2.11: Processo de codificação do sinal $m_q(t)$ em uma seqüência numérica em base binária. Tal processo é muitas vezes referido como modulação (ou codificação) PCM (PCM: *pulse code modulation*) [Taub].

Uma possível implementação em *hardware* do mapeamento mostrado na Figura 2.11 é o conversor A/D (A/D: *analog to digital*) mostrado na Figura 2.12. O sinal $m_q(t)$ é aplicado na entrada V_i e a saída resultante do mapeamento são os sinais $b_2 b_1 b_0$. Os sinais

b_4 e b_3 não são utilizados porque são necessários somente $N = \log_2 M = 3$ bits para representar $M = 8$ níveis de quantização. Os amplificadores operacionais U1 e U2 são alimentados por fonte simétrica de $\pm V_{cc}$ volts. A tensão de alimentação do comparador U3, *flip-flops* e porta AND é assimétrica e de $+V_{cc}$ volts. Os *flip-flops* são do tipo T (*toggle*) e trocam o estado lógico da saída Q na borda de descida da entrada T. Cada sinal de saída b_i pode assumir os valores lógicos $\{0,1\}$ de acordo com os níveis de tensão $\{0, +V_{cc}\}$.

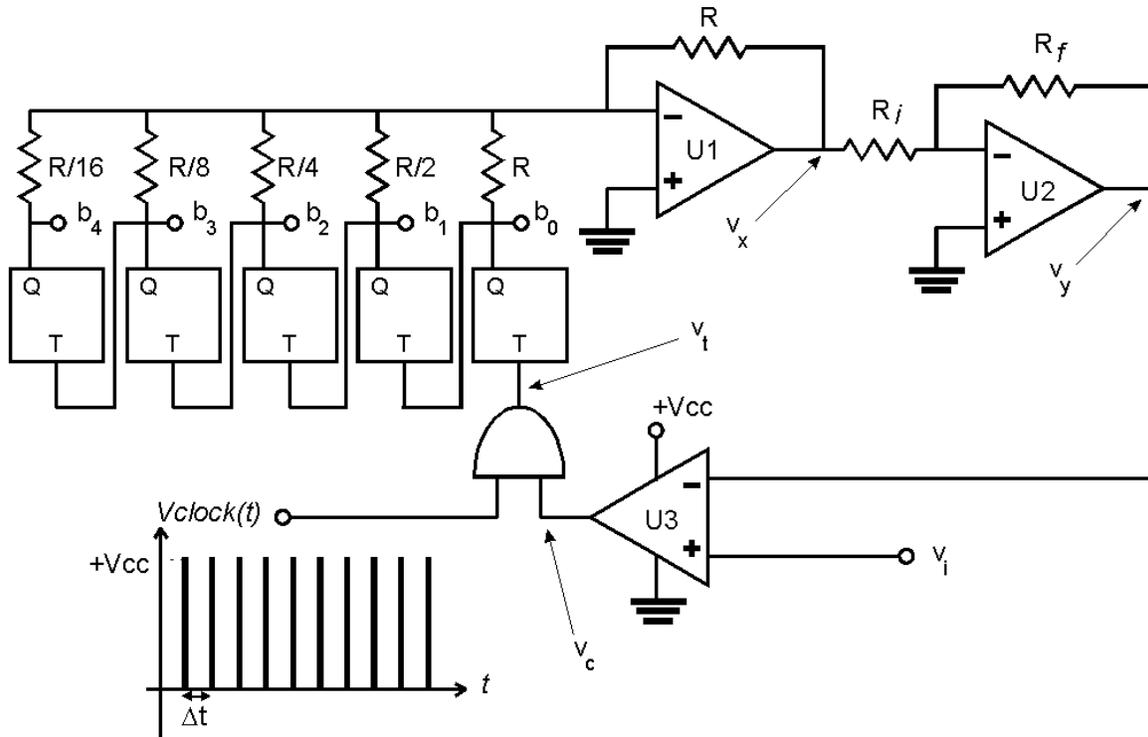


Figura 2.12: Possível implementação do mapeamento mostrado na Figura 2.11 através de um conversor A/D.

Da Figura 2.12 temos que

$$V_x = -V_{cc} \left[b_4 \left(\frac{R}{R/16} \right) + b_3 \left(\frac{R}{R/8} \right) + b_2 \left(\frac{R}{R/4} \right) + b_1 \left(\frac{R}{R/2} \right) + b_0 \left(\frac{R}{R} \right) \right] \quad (2.27)$$

$$V_x = -V_{cc} [16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (2.28)$$

onde b_i pode assumir os valores lógicos $\{0,1\}$ em (2.27) e (2.28). Ainda,

$$V_y = -(R_f/R_i)V_x \quad (2.29)$$

de modo que

$$V_y = V_{cc} (R_f/R_i) [16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (2.30)$$

mas, por simplicidade, se adotarmos R_f e R_i tal que $V_{cc}(R_f/R_i) = 1$, então

$$V_y = 2^4 b_4 + 2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0. \quad (2.31)$$

Portanto, (2.31) dá um valor decimal de tensão correspondente ao valor binário $b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$.

O funcionamento do A/D pode ser descrito através de um exemplo. Suponhamos que $m_q(t) = V_i = 3$ Volts. Inicialmente todos os *flip-flops* estão resetados, e portanto todas as saídas estão no estado lógico 0. Logo, de (2.31), $V_y = 0$. Como $V_i > V_y$ o comparador U3 gera $V_c = +V_{cc}$ e portanto $V_t = V_{clock}(t)$, o que faz os *flip-flops* incrementarem a contagem desde $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 0$ e $b_0 = 0$ até $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 1$ e $b_0 = 1$. Quando esta contagem é atingida, $V_y = 3$ (Equação 2.31) o que faz $V_i = V_y$, $V_c = 0$ e $V_t = 0$, parando o incrementar da contagem dos *flip-flops*. O valor decimal correspondente à saída digital $b_4 = 0, b_3 = 0, b_2 = 0, b_1 = 1$ e $b_0 = 1$ é 3V, que é precisamente a tensão de entrada $m_q(t) = V_i = 3$ Volts.

Obviamente a contagem deve ser suficientemente rápida para o pior caso, isto é, aquele em que os *flip-flops* devam contar dentro do intervalo de amostragem T_s até o número binário representativo do maior nível de quantização. Em outras palavras, $\Delta t < T_s / M$.

Para reconstrução do sinal $m'(t)$ a partir da seqüência binária recebida no receptor, o Decodificador de Fonte implementa o dual do conversor A/D, denominado conversor D/A (D/A: *digital to analog*). Uma possível implementação de um conversor D/A é mostrado na Figura 2.13.

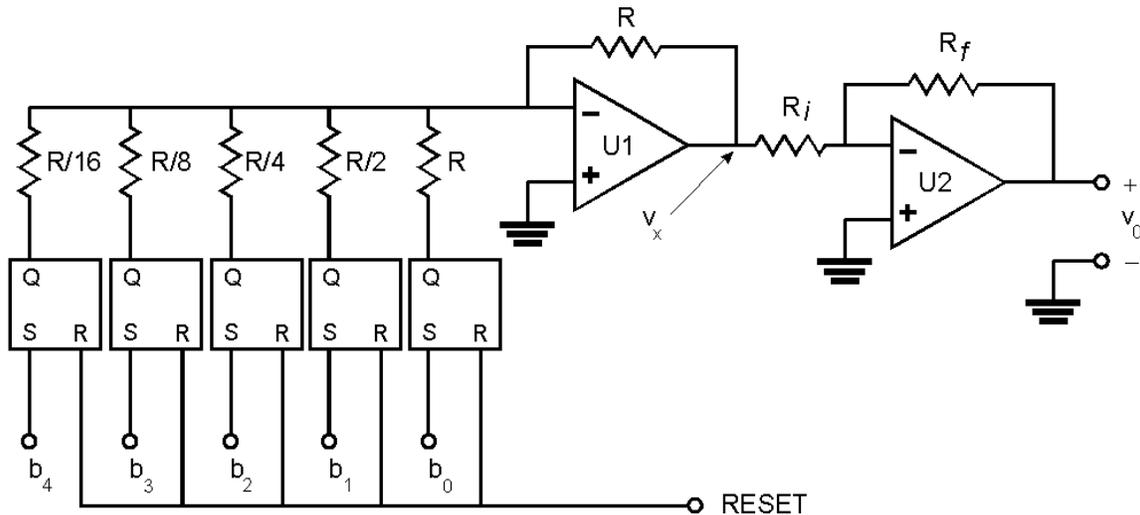


Figura 2.13: Possível implementação do mapeamento inverso da Figura 2.11 através de um conversor D/A.

O conversor D/A da Figura 2.13 utiliza *flip-flops* do tipo S/R. Um *flip-flop* S/R leva a saída Q ao estado lógico 1 quando a entrada S está no estado lógico 1, e leva a saída Q ao estado lógico 0 quando a entrada R está no estado lógico 1. Se ambas as entradas estão no estado lógico 0, a saída Q não é alterada. Através de raciocínio semelhante ao empregado para descrição do A/D, a saída V_0 é dada por

$$V_0 = V_{cc}(R_f/R_i)[16b_4 + 8b_3 + 4b_2 + 2b_1 + b_0] \quad (2.32)$$

ou fazendo $V_{cc}(R_f/R_i) = 1$,

$$V_0 = 2^4 b_4 + 2^3 b_3 + 2^2 b_2 + 2^1 b_1 + 2^0 b_0. \quad (2.33)$$

Portanto, a saída V_0 definida por (2.33) dá um valor decimal de tensão correspondente ao valor binário $b_4 b_3 b_2 b_1 b_0$ de entrada.

Observe, de (2.26), que um conversor A/D de 8 bits apresenta $SNR_Q = 48$ dB enquanto que um conversor A/D de 16 bits apresenta $SNR_Q = 96$ dB.

O processo de codificação do sinal $m_q(t)$ em uma seqüência numérica em base binária muitas vezes é referido como modulação (ou codificação) PCM (PCM: *pulse code modulation*) [Taub].

2.4 Compressão

No processo de compressão, cada uma das M possíveis seqüências de $N = \log_2 M$ bits resultantes da codificação PCM, representativas de cada um dos M possíveis valores de $m_q(n) \in \Theta$, têm o seu número de bits N reduzido para um valor menor como decorrência da eliminação da informação redundante em $m_q(n) \in \Theta$, através de um código para compressão de dados.

O código para compressão de dados considera cada uma das seqüências resultante da codificação PCM como uma mensagem de N bits e associa a cada uma delas uma palavra-código cujo número de bits depende da probabilidade de ocorrência da mensagem. Palavras-código com menos bits são atribuídas a mensagens com maior probabilidade de ocorrência, e palavras-código com mais bits são atribuídas a mensagens com menor probabilidade de ocorrência. Este critério é crucial para a eficiência da compressão. Um código que segue este critério faz com que mensagens que ocorrem freqüentemente necessitem de menos bits para serem transmitidas e, portanto, o efeito global é o de permitir que mais informação possa ser transmitida no mesmo intervalo de tempo. A probabilidade de ocorrência de cada mensagem depende da estatística da fonte do sinal $m(t)$: vídeo, voz, etc.

Na prática, para determinação da probabilidade de ocorrência de cada mensagem, aplica-se na entrada do sistema digital um número suficiente de classes de sinais representativos da fonte do sinal $m(t)$. Simultaneamente, registra-se as mensagens resultantes na saída do quantizador – em geral um número n_m bastante grande de mensagens é necessário. Após o processo de registro, conta-se o número de cada tipo de

mensagem ocorrida, dentre os M tipos possíveis, e divide-se a contagem de cada tipo por n_m . O conjunto de M valores obtidos, cuja soma forçosamente tende para 1.0, é uma boa aproximação das probabilidades de ocorrência de cada uma das M possíveis mensagens.

Códigos para compressão com base no princípio *probabilidade* $\uparrow \Rightarrow$ *bits* \downarrow são denominados de processos para Codificação por Entropia [Proakis], sendo entropia um conceito a ser estudado adiante neste texto. O veterano Código Morse, utilizado para enviar informação por telegrafia desde a I Guerra Mundial, é um exemplo histórico desta classe de códigos. Cada letra do alfabeto A – Z é uma mensagem do Código Morse. O conjunto de caracteres utilizado para compor as palavras-código do Código Morse é o conjunto $\{ " \cdot " , " - " \}$. A cada mensagem é atribuído uma seqüência de “pontos” e/ou “traços” representados em telegrafia por tons audíveis curtos e/ou longos. O mapeamento *mensagem* \rightarrow *palavra – código* do Código Morse é tal que letras mais prováveis na escrita inglesa são associadas a palavras-código curtas e letras menos prováveis são associadas a palavras-código longas. A letra “E”, por exemplo, é a letra mais freqüente na escrita em inglês e é representada por um único “.”.

No contexto de Codificação por Entropia, o denominado Código de Huffman, a ser estudado adiante neste texto, é quase que universalmente utilizado. A compressão por codificação de Huffman é ótima no sentido de que o número médio de bits requerido por palavra-código na saída do compressor para representar os M níveis de quantização codificados em mensagens de $N = \log_2 M$ bits é reduzido ao mínimo possível sem que cause degradação.

Nesta seção discutiremos brevemente os algoritmos de compressão denominados μ -Law e A-Law, basicamente utilizados em sistemas digitais para transmissão de voz humana, como em telefonia celular, por exemplo. Os algoritmos μ -Law e A-Law não são ótimos como o Código de Huffman o é, no entanto, têm o mérito de o custo computacional de sua operação ser menor que o custo computacional de um compressor com base no Código de Huffman, além de atenderem os requisitos psico-acústicos envolvidos na transmissão de sinais de voz.. O algoritmo μ -Law é utilizado na América enquanto que o algoritmo A-Law é utilizado na Europa.

A amplitude do sinal de voz humana tem uma distribuição estatística caracterizada por menores amplitudes terem alta probabilidade de ocorrência, enquanto que maiores amplitudes raramente ocorrem. Portanto, sob o ponto de vista do princípio de compressão *probabilidade* $\uparrow \Rightarrow$ *bits* \downarrow , menos bits devem ser atribuídos a amostras correspondentes a menores amplitudes. Por outro lado, estudos indicam que o processo de audição humano é um processo psico-acústico que apresenta sensibilidade logarítmica, no qual sons de baixa amplitude transportam mais informação ao cérebro do que sons de alta amplitude. Sob este ponto de vista, mais bits devem ser atribuídos a amostras correspondentes a menores amplitudes.

Portanto, a codificação PCM com um número N fixo de bits por amostra (mensagem) é ineficiente tanto sob o ponto de vista psico-acústico como sob o ponto de vista de compressão (*probabilidade* $\uparrow \Rightarrow$ *bits* \downarrow). Equivalentemente, pode ser dito que a causa da ineficiência é a quantização com passo S uniformemente igual ao longo da faixa

de excursão $V_H - V_L$ de $m(t)$, denominada quantização uniforme. Ou seja, a quantização uniforme resulta em uma qualidade excessivamente alta para sinais de amplitude alta, raros de ocorrer, e resulta em pronunciada distorção por truncamento para sinais de baixa amplitude, mais frequentes, e com maior conteúdo de informação sob o ponto de vista psico-acústico. Ou ainda, a quantização uniforme resulta em mensagens com mais bits do que o necessário para sinais de alta amplitude e em mensagens com menos bits do que o necessário para sinais de baixa amplitude.

Uma possível solução para o compromisso entre eficiência de compressão e sensibilidade psico-acústica é utilizar um processo de quantização não-uniforme no qual o passo de quantização S aumenta à medida que aumenta o nível de quantização. O resultado global obtido em comparação com a quantização uniforme é um menor número de bits do que seria necessário para representar sinais de baixa amplitude sem distorção por truncamento e um menor número de bits do que seria necessário para representar largas excursões do sinal $m(t)$ sem saturar o quantizador (maior faixa dinâmica).

Uma das maneiras de se obter quantização não-uniforme é manter o quantizador uniforme mas previamente submeter o sinal $m(t)$ à transformação logarítmica denominada μ -Law, definida por

$$y = \text{sgn}(x) \frac{\ln(1 + \mu|x|)}{\ln(1 + \mu)} \quad (2.34)$$

onde x é o sinal $m(t)$ normalizado para o intervalo $[-1,1]$, y representa o sinal $m(t)$ transformado e $\mu = 255$. No Decodificador de Fonte do receptor o sinal $m'(t)$ é submetido à transformação inversa

$$x = \text{sgn}(y) \frac{[1 + \mu]^{|y|} - 1}{\mu}. \quad (2.35)$$

Outra forma de quantização não-uniforme é através da denominada A -Law, definida por

$$y = \begin{cases} \text{sgn}(x) \frac{A|x|}{1 + \ln A}, & 0 \leq |x| \leq 1/A \\ \text{sgn}(x) \frac{1 + \ln(A|x|)}{1 + \ln A}, & 1/A \leq |x| \leq 1 \end{cases} \quad (2.36)$$

com $A = 87.6$, cuja operação inversa é

$$x = \begin{cases} \text{sgn}(y) y \left(\frac{1 + \ln A}{A} \right), & 0 \leq |y| \leq \frac{1 + \ln A}{A} \\ \text{sgn}(y) \frac{\exp(|y|(1 + \ln A)) - 1}{A(1 + \ln A)}, & \frac{1 + \ln A}{A} \leq |y| \leq 1 \end{cases} \quad (2.37)$$

A Figura 2.14 compara as curvas de compressão para os algoritmos μ -Law e A -Law.

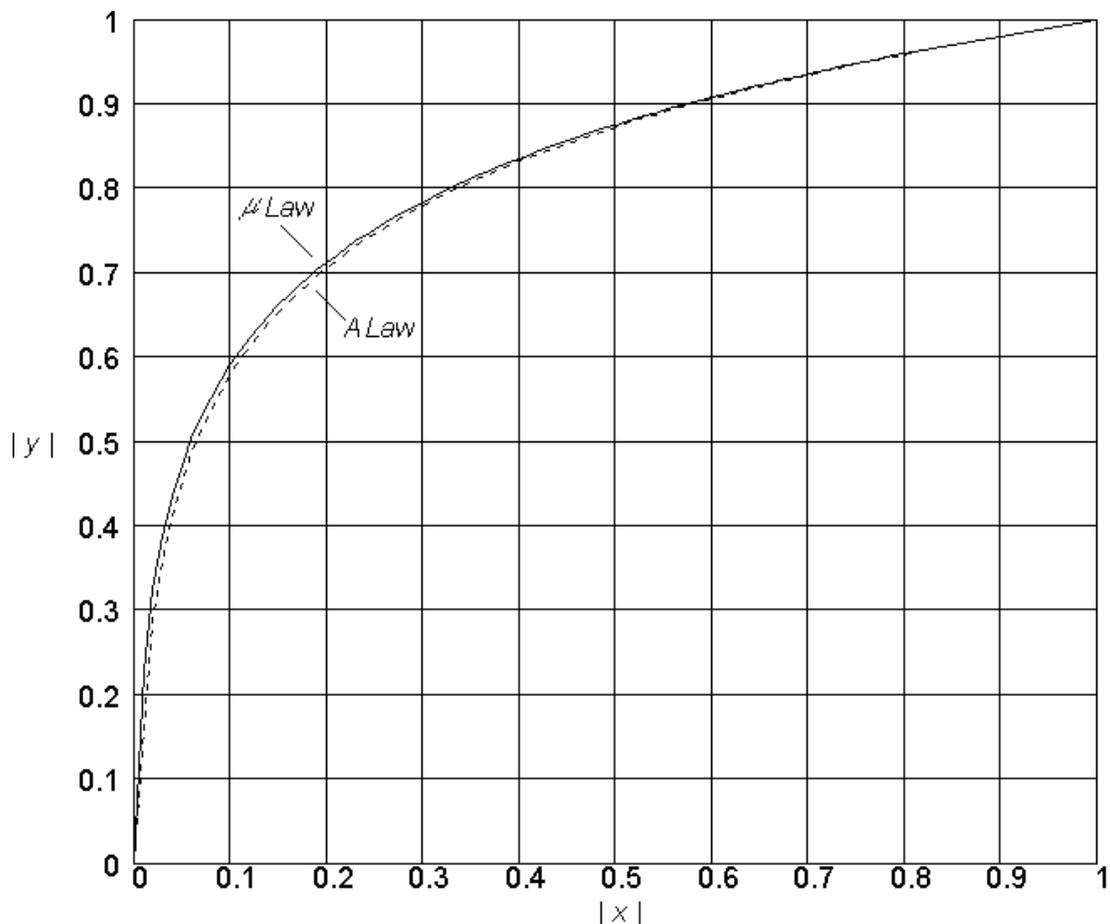


Figura 2.14: Curvas de compressão resultantes dos algoritmos μ -Law e A-Law.

O processo de compressão pelos algoritmos μ -Law e A-Law raramente é aplicado ao sinal $m(t)$ ou ao sinal $m_q(t)$. Ao invés disto, a compressão é feita digitalmente em cada uma das seqüências de N bits resultantes da codificação PCM. Por exemplo, no caso do algoritmo μ -Law, usualmente $N=13$. O algoritmo μ -Law considera cada uma das seqüências resultante da codificação PCM como uma mensagem de 13 bits e associa a cada uma delas uma palavra-código de 8 bits de acordo com uma tabela de mapeamento de bits. Os detalhes de implementação dos algoritmos μ -Law e A-Law e respectivas tabelas de mapeamento de bits podem ser encontrados nos artigos

- A-Law and μ -Law Companding Implementations Using the TMS320C54x, Application Note SPRA163A, Texas Instruments, December 1997.
- TMS320C6000 μ -Law and A-Law Companding with Software or the McBSP, Application Report SPRA634, Texas Instruments, April 2000.

disponíveis para *download* em <http://www.ee.pucrs.br/~decastro/download.html>

2.5 PCM Diferencial (DPCM)

Quando um sinal de áudio ou vídeo é amostrado a uma razão ligeiramente maior que a Freqüência de Nyquist, o sinal amostrado resultante passa a exibir uma alta correlação entre amostras adjacentes.

O significado desta alta correlação é que, na média, o sinal não varia rapidamente de uma amostra para a outra.

Quando estas amostras altamente correlacionadas são codificadas em um codificador PCM padrão, conforme o visto na Seção 2.3, as mensagens ou seqüências de bits resultantes apresentarão informação redundante. Isto significa que mensagens que não são absolutamente essenciais à transmissão de informação são geradas como resultado do processo de codificação. Removendo esta redundância antes da codificação pelo conversor A/D resulta um aumento da eficiência do sinal codificado em transportar informação.

Se nós conhecemos uma parcela suficiente de um sinal redundante nós podemos inferir o resto do sinal, ou pelo menos tentar fazer a estimativa mais provável. Em particular, se nós conhecemos o comportamento passado de um sinal até um determinado ponto no tempo então é possível fazer alguma inferência sobre seus valores futuros. Tal processo de inferência é conhecido como predição. Embora existam inúmeros métodos de predição, no contexto de codificação DPCM nos limitaremos à denominada Predição Linear. Na Predição Linear uma amostra futura é obtida como uma combinação linear de um conjunto de amostras passadas.

Suponhamos, então, que um sinal em banda-base $m(t)$ é amostrado a uma razão $f_s = 1/T_s > f_{Nyquist}$ produzindo uma seqüência de amostras correlacionadas $m(nT_s)$ espaçadas no tempo de um intervalo T_s . Como o intervalo de amostragem T_s é definido e constante, para efeito de simplificação, a seqüência $m(nT_s)$ será representada por $m(n)$. Nesta representação n é interpretado como o instante $t = nT_s$ no qual o valor do sinal $m(t)$ é levado à saída do processo de amostragem.

O fato de que é possível prever valores futuros de $m(n)$ provê motivação para a implementação do esquema de quantização diferencial mostrado na Figura 2.15.

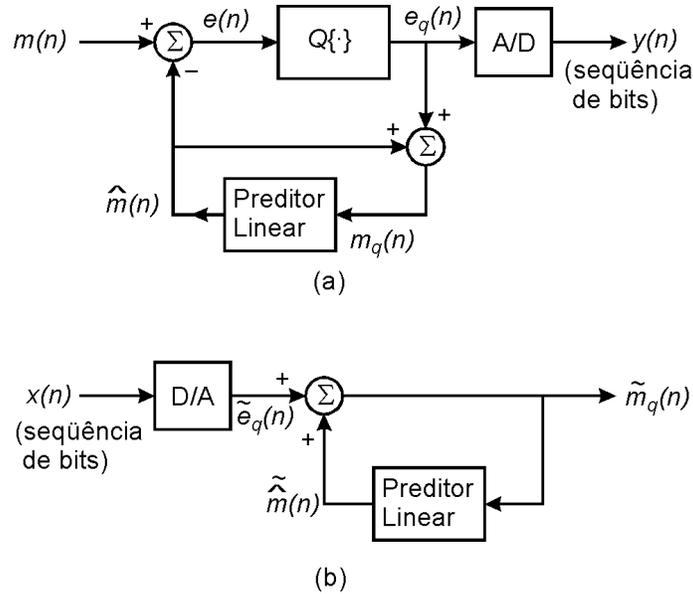


Figura 2.15: Sistema DPCM. (a) Codificador (no transmissor digital) (b) Decodificador (no receptor digital).

No sistema DPCM a entrada do quantizador $Q\{\cdot\}$ é o sinal de erro

$$e(n) = m(n) - \hat{m}(n) \quad (2.38)$$

o qual é a diferença entre o sinal de amostragem entrada $m(n)$ e a previsão $\hat{m}(n)$ do mesmo.

O sinal $\hat{m}(n)$ é o resultado do processo de previsão linear aplicado sobre um conjunto de amostras passadas do sinal $m_q(n)$, este último sendo uma versão quantizada do sinal $m(n)$.

O sinal de erro $e(n)$ é denominado de erro de previsão visto que seu valor representa a incapacidade do Preditor Linear em prever $m(n)$ com exatidão.

Ao aplicarmos a saída do quantizador $e_q(n) = Q\{e(n)\}$ ao conversor A/D obtemos a sequência $y(n)$ de bits DPCM ou mensagens codificadas em DPCM .

A saída do quantizador pode ser decomposta em

$$e_q(n) = Q\{e(n)\} = e(n) + q_e(n) \quad (2.39)$$

onde $q_e(n)$ representa o ruído ou erro de quantização visto na Seção 2.2.1.

Observe na Figura 2.15a que a saída do quantizador $e_q(n) = Q\{e(n)\}$, isto é, o erro de previsão quantizado, é adicionado ao valor previsto $\hat{m}(n)$ para formar o sinal de amostragem $m_q(n)$ do Preditor Linear:

$$m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n) \quad (2.40)$$

A interpretação de $m_q(n)$ em (2.40) é a seguinte: De (2.38) temos que $m(n) = \hat{m}(n) + e(n)$. Logo, se, ao invés de $e(n)$, acrescentarmos à predição $\hat{m}(n)$ a versão quantizada de $e(n)$, i.e., $e_q(n) = Q\{e(n)\}$, então o resultado será a versão quantizada $m_q(n)$ do sinal original $m(n)$.

Substituindo (2.39) em (2.40), temos

$$m_q(n) = \hat{m}(n) + e(n) + q_e(n) \quad (2.41)$$

mas de (2.38) temos que $\hat{m}(n) = m(n) - e(n)$. Daí, de (2.41) temos

$$m_q(n) = m(n) + q_e(n) \quad (2.42)$$

que representa a versão quantizada $m_q(n)$ do sinal original $m(n)$ através da decomposição do sinal quantizado $m_q(n)$ em sinal original $m(n)$ e ruído de quantização $q_e(n)$.

A Equação (2.42) pode ser interpretada da seguinte maneira: Não importando a capacidade de predição do Preditor Linear, o sinal quantizado $m_q(n)$, na entrada do Preditor Linear, difere do sinal original $m(n)$ apenas do valor do ruído ou erro de quantização $q_e(n)$.

A vantagem do sistema DPCM sobre o sistema PCM fica evidenciada através do seguinte raciocínio: Seja $Q\{\}$ um quantizador com M níveis de quantização e passo de quantização $S = (V_H - V_L)/M$, sendo $V_H - V_L$ a faixa dinâmica do sinal em sua entrada. No caso do sistema DPCM, se o Preditor Linear prevê $m(n)$ com exatidão, então a faixa dinâmica $V_H - V_L$ do sinal $e(n)$ na entrada de $Q\{\}$ será muito menor do que a faixa dinâmica do sinal $m(n)$ na entrada de $Q\{\}$ para o caso do sistema PCM. Portanto, para um mesmo M , $S = (V_H - V_L)/M$ será menor para o sistema DPCM do que para o sistema PCM, o que implica que a potência do erro de quantização $\overline{q_e^2} = S^2/12$, dada por (2.22), é menor no sistema DPCM do que no sistema PCM.

A Figura 2.15b mostra o decodificador DPCM, localizado no decodificador de fonte no receptor digital. Note na Figura 2.15a que, no transmissor digital, a soma da predição $\hat{m}(n)$ com a versão quantizada $e_q(n) = Q\{e(n)\}$ do erro de predição $e(n)$ resulta no sinal quantizado $m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n)$. O D/A na Figura 2.15b gera em sua saída o sinal $\tilde{e}_q(n)$, que é uma aproximação do sinal $e_q(n)$ no transmissor, aproximação resultante da eventual degradação de $e_q(n)$ pela transmissão através do canal. Mas, quanto ao processo de predição, o fluxo de sinal no receptor (Figura 2.15b) é o mesmo do transmissor (Figura 2.15a), de modo que $\tilde{m}_q(n) = \tilde{\hat{m}}(n) + \tilde{e}_q(n)$. De fato, se o canal de transmissão não introduzir nenhuma degradação no sinal transmitido, então $\tilde{m}_q(n) \rightarrow m_q(n)$.

2.5.1 Predição Linear

A Predição Linear considera o problema de predição da amostra $u(i+1)$, subsequente a um conjunto conhecido de amostras consecutivas prévias $\{u(i), u(i-1), \dots\}$ pertencentes a uma série temporal discreta $U(i)$, problema este conhecido como predição a um passo.

No contexto de codificação DPCM, $\hat{u}(i+1)$ representa a estimativa $\hat{m}(n)$ da predição do sinal amostrado original $m(n)$ no instante n , e $\{u(i), u(i-1), \dots\}$ representa o conjunto de amostras passadas de $m_q(n)$ na entrada Preditor Linear, isto é, $\{u(i), u(i-1), \dots\} = \{m_q(n-1), m_q(n-2), \dots\}$. Tendo sido feita a associação entre codificação DPCM e Predição Linear, para manter a nomenclatura e elementos descritivos próprios da área de predição, doravante nesta seção passaremos a tratar do problema de predição linear de maneira desvinculada do contexto de codificação DPCM. Apenas quando necessário, estabeleceremos um paralelo entre as duas áreas.

Em predição linear, a estimativa da amostra predita, $\hat{u}(n+1)$, é expressa como uma combinação linear de M (não confundir com o número de níveis de quantização!) amostras prévias $\{u(n), u(n-1), \dots, u(n-M+1)\}$. Os coeficientes $W_k, k=0, 1, \dots, M-1$ que ponderam tal combinação linear definem um filtro FIR [Strum] transversal. A Figura 2.16 detalha um preditor FIR de ordem M , o qual é mostrado no instante n naquela figura [Haykin]. Portanto, como o instante é definido, visando tornar compactas as equações no desenvolvimento que segue, não será explicitado o indexador n para as variáveis envolvidas, a menos que n não seja inequivocamente definido pelo contexto. Um preditor linear de ordem M utiliza M amostras prévias conhecidas da série temporal para estimar $u(n+1)$, no entanto, necessita do conhecimento de todas as amostras que compõem a série para emular a matriz de correlação associada.

A função de custo J mede o erro médio quadrático entre a estimativa da predição $y(n) = \hat{u}(n+1)$ e o valor efetivamente obtido para a amostra em questão, $u(n+1)$. O vetor \underline{W} que define o filtro FIR tem seus coeficientes determinados de forma a minimizar a função de custo J .

Conforme pode ser observado na Figura 2.16, a amostra predita $\hat{u}(n+1)$ é dada por

$$\hat{u}(n+1) = y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} W_k u(n-k) = \underline{W}^T \underline{u} \quad (2.43)$$

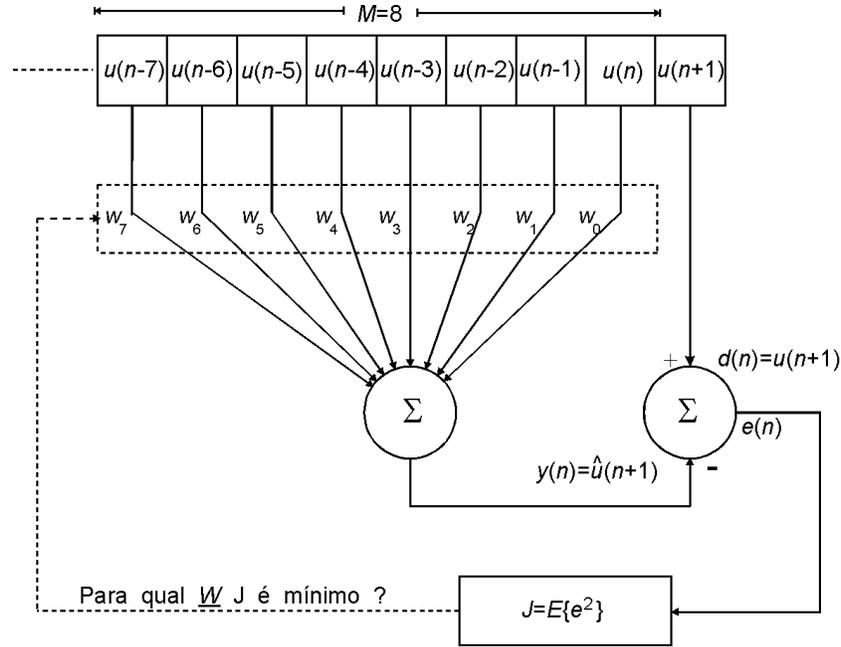


Figura 2.16: Filtro Linear Transversal utilizado como preditor de $u(n+1)$ com ordem de predição $M = 8$. $E\{\cdot\}$ é o operador que resulta no valor esperado do argumento [Taub].

Da Figura 2.16, o erro de predição $e(n)$ pode ser expresso por

$$e(n) = d(n) - y(n) \quad (2.44)$$

O operador gradiente é aplicado com o intuito de obter os valores para os pesos W_i do filtro transversal que minimizem a função de custo J , resolvendo-se a equação $\nabla J = 0$. Assim, tomando a derivada parcial da função de custo J com relação a cada peso W_i ,

$$\nabla_i J = \frac{\partial J}{\partial W_i} = \frac{\partial}{\partial W_i} E\{e^2\} = E\left\{2e \frac{\partial e}{\partial W_i}\right\} = E\left\{2e \frac{\partial}{\partial W_i} (d - y)\right\} = E\left\{-2e \frac{\partial y}{\partial W_i}\right\}; \quad (2.45)$$

$$i = 0, 1, \dots, M - 1$$

E, considerando o gradiente a partir do instante n , teremos

$$\nabla_i J(n) = E\left\{-2e(n) \frac{\partial y(n)}{\partial W_i}\right\} = E\left\{-2e(n) \frac{\partial}{\partial W_i} \sum_{k=0}^{M-1} W_k u(n-k)\right\} = -2E\{e(n)u(n-i)\} \quad (2.46)$$

Como a função de custo J é uma função quadrática, J será globalmente mínimo para $\nabla J = 0$. Assim, a partir da Equação (2.46) podemos escrever que

$$\nabla_i J(n) = -2E\{e(n)u(n-i)\} = 0 \quad (2.47)$$

Substituindo as Equações (2.43) e (2.44) na Equação (2.47), obteremos

$$E\left\{\left[d(n) - \sum_{k=0}^{M-1} W_k u(n-k)\right] u(n-i)\right\} = 0 \quad (2.48)$$

Distribuindo os produtos e rearranjando a Equação (2.48),

$$\sum_{k=0}^{M-1} W_k E\{u(n-k)u(n-i)\} = E\{d(n)u(n-i)\} \quad (2.49)$$

Observa-se no lado esquerdo da igualdade expressa na Equação (2.49), que

$$E\{u(n-k)u(n-i)\} = R_{uu}(k-i) \quad (2.50)$$

onde R_{uu} é a função de auto-correlação do processo aleatório u (=processo estocástico) para um atraso $k-i$ entre as amostras, com $k, i = 0, 1, \dots, M-1$ [Taub]. Da mesma forma, observando o lado direito da igualdade expressa na Equação (2.49),

$$E\{d(n)u(n-i)\} = R_{du}(-i) \quad (2.51)$$

onde R_{du} é a função de correlação cruzada entre o processo aleatório que descreve a saída desejada $d = u(n+1)$ e o processo u .

Considerando as Equações (2.50) e (2.51), a Equação (2.49) pode ser reescrita como

$$\sum_{k=0}^{M-1} W_k R_{uu}(k-i) = R_{du}(-i); \quad i = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2.52)$$

Para escrever a Equação (2.52) sob a forma matricial, consideremos que seja $\underline{u}(n) = [u(n) \ u(n-1) \ \dots \ u(n-M+1)]^T$, tal que

$$\mathbf{R} = E\{\underline{u}(n) \underline{u}^T(n)\} \quad (2.53)$$

isto é

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} E\{u(n)u(n)\} & E\{u(n)u(n-1)\} & \dots & E\{u(n)u(n-M+1)\} \\ E\{u(n-1)u(n)\} & E\{u(n-1)u(n-1)\} & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E\{u(n-M+1)u(n)\} & E\{u(n-M+1)u(n-1)\} & \dots & E\{u(n-M+1)u(n-M+1)\} \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

ou

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & \dots & R_{uu}(M-1) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{uu}(M-1) & R_{uu}(M-2) & \dots & R_{uu}(0) \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

Para melhor ilustrar as Equações (2.53), (2.54) e (2.55), consideremos um exemplo. Para o caso em que $M=3$, teremos $\underline{u}(n) = [u(n) \ u(n-1) \ u(n-2)]^T$ e \mathbf{R} será dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= E[\underline{u}(n)\underline{u}^T(n)] = & (2.56) \\ &= E\left\{ \begin{bmatrix} u(n) \\ u(n-1) \\ u(n-2) \end{bmatrix} [u(n) \ u(n-1) \ u(n-2)] \right\} = \\ &= \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(-1) & R_{uu}(-2) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & R_{uu}(-1) \\ R_{uu}(2) & R_{uu}(1) & R_{uu}(0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Mas, como $R_{uu}(x) = R_{uu}(-x)$, \mathbf{R} poderá, por fim, ser expresso como

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0) & R_{uu}(1) & R_{uu}(2) \\ R_{uu}(1) & R_{uu}(0) & R_{uu}(1) \\ R_{uu}(2) & R_{uu}(1) & R_{uu}(0) \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Seja, agora, o vetor \underline{P} definido por

$$\begin{aligned} \underline{P} &= E\{d(n)\underline{u}(n)\} = & (2.58) \\ &= [E\{d(n)u(n)\} \ E\{d(n)u(n-1)\} \ \cdots \ E\{d(n)u(n-M+1)\}]^T = \\ &= [P(0) \ P(-1) \ \cdots \ P(1-M)]^T \end{aligned}$$

e seja também o vetor de pesos dado por

$$\underline{W} = [W_0 \ W_1 \ \cdots \ W_{M-1}]^T \quad (2.59)$$

Assim, partindo das Equações (2.52), (2.53), (2.55), (2.58) e (2.59), teremos

$$\mathbf{R} \underline{W} = \underline{P} \quad (2.60)$$

A Equação (2.60) é denominada Equação de Wiener-Hopf [Haykin]. A solução de (2.60) para \underline{W} define os coeficientes do filtro linear transversal mostrado na Figura 2.16. O filtro prediz com o mínimo erro quadrático médio a amostra $u(n+1)$ de uma série temporal que apresenta correlação entre as M prévias amostras. Se a matriz de correlação \mathbf{R} da série temporal é não-singular para M definido, então \underline{W} pode ser obtido por

$$\underline{W} = \mathbf{R}^{-1} \underline{P} \quad (2.61)$$

sendo \underline{P} o vetor que define a correlação cruzada entre o vetor $\underline{u}(n)$ de entrada e a saída desejada $d(n)=u(n+1)$.

É importante observar que, para uma dada série temporal com N_t amostras totais, apresentando correlação entre M amostras consecutivas prévias ao instante a ser predito, a precisão com que \mathbf{R} e \underline{P} representam as correlações envolvidas será tanto maior quanto maior for N_t com relação a M .

Isto ocorre porque, na prática, não se conhece o processo aleatório subjacente que determina a série temporal em questão. Portanto, não são conhecidas as funções correlações que são realmente envolvidas no processo. Assim, o operador $E\{\}$ nas Equações (2.53) e (2.58) é substituído pela média dos vetores de M componentes envolvidos no cômputo de \mathbf{R} e \underline{P} , média esta realizada sobre o intervalo de N_t amostras totais conhecidas da série temporal.

Desta maneira, a predição linear só tem sentido quando o processo aleatório subjacente é estacionário [Taub], pois, em caso contrário, \mathbf{R} e \underline{P} não são univocamente definidas, mesmo para N_t suficientemente grande. Ou seja, se a série temporal resulta de um processo aleatório não-estacionário, \mathbf{R} e \underline{P} variam ao longo da série, invalidando a Equação (2.61) para a obtenção do vetor de pesos \underline{W} . A solução algumas vezes adotada é assumir que a série temporal é estacionária em intervalos e adaptar \mathbf{R} e \underline{P} para cada intervalo. No entanto, o número de amostras em cada intervalo nem sempre é suficiente para expressar com fidelidade a operação $E\{\}$.

Esta é a razão do uso cada vez mais disseminado de técnicas de predição não-linear, as quais, embora apresentem custo computacional maior, contornam a necessidade de um número grande de amostras conhecidas, suficientes para que o operador $E\{\}$ seja aproximado com fidelidade pela média temporal.

Objetivando reduzir a complexidade computacional envolvida no cômputo da Equação (2.61), como \mathbf{R} resulta em uma matriz Tôeplitz [Gantmacher], a sua inversão é, em geral, realizada pelo método de Durbin-Levinson [Haykin], muito embora a pseudo-inversão de Moore-Penrose via Decomposição em Valores Singulares [Haykin][Press] seja freqüentemente utilizada para contornar os problemas resultantes de uma matriz \mathbf{R} quase singular.

No contexto de codificação DPCM, utiliza-se para construir \mathbf{R} e \underline{P} um conjunto suficientemente grande formado pela amostras passadas mais recentes de $m_q(n)$ de forma que \mathbf{R} e \underline{P} são reavaliados a cada nova predição ou a cada N_p predições. A cada nova reavaliação de \mathbf{R} e \underline{P} os coeficientes do filtro \underline{W} são obtidos por $\underline{W} = \mathbf{R}^{-1}\underline{P}$ e são enviados ao filtro do receptor através do canal de transmissão [Proakis]. Uma alternativa para evitar a ocupação de parte da banda-passante do canal com a transmissão dos coeficientes do filtro é o preditor do receptor calcular \underline{W} a partir do sinal recebido. No entanto, como ocorre degradação de sinal no canal, nem sempre o sinal recebido será uma réplica fiel do sinal transmitido e o preditor do receptor poderá acabar predizendo ruído e interferência.

Isto deteriorará a performance do decodificador DPCM, a menos que os códigos corretores de erro do Decodificador de Canal compensem a degradação.

Note ainda que, a partir da inicialização de um sistema DPCM, devido à saída do preditor ser realimentada para sua entrada, tanto o preditor do transmissor como o do receptor necessitam de um razoável número de amostras até que consigam reduzir o erro de predição a níveis aceitáveis.

2.5.2 Critério de Avaliação do Erro de Predição

Adotaremos como critério para avaliação da qualidade de um preditor linear o critério sugerido por Gershenfeld e Weigend em [Weigend]. Este critério de avaliação é considerado referência pela comunidade de pesquisadores da área de predição.

A qualidade da predição será expressa em termos da razão entre as somas de erros quadráticos mostrada em (2.62).

$$\frac{\sum_t (\text{observação}_t - \text{predição}_t)^2}{\sum_t (\text{observação}_t - \text{observação}_{t-1})^2} \quad (2.62)$$

Em (2.62) o denominador expressa o erro médio quadrático (MSE) de predição obtido para a chamada predição pela última amostra, que, como veremos, é o preditor utilizado na Modulação Delta. Tal método de predição considera que a melhor predição possível para a próxima amostra consiste simplesmente em repetir o valor efetivamente observado para a amostra atual. O valor obtido por tal critério para o MSE é tomado como normalizador para o MSE resultante das diferenças entre os valores efetivamente obtidos, após a observação da amostra em questão, e os respectivos valores obtidos pelo preditor que está sendo avaliado. Uma razão inferior a 1.0 corresponde a uma predição melhor do que aquela obtida pela simples repetição do valor efetivamente observado para a amostra anterior àquela a ser predita – limiar que qualifica um preditor que pretenda ser útil.

O erro obtido através do procedimento expresso em (2.62) é chamado Erro Médio Quadrático Normalizado (*Normalized Mean Squared Error*) e é referido na literatura por NMSE.

Expressando (2.62) em forma de equação, teremos

$$\text{NMSE}(n) = \frac{\sum_{i=1}^n (o(i) - p(i))^2}{\sum_{i=1}^n (o(i) - o(i-1))^2} = \frac{\sum_{i=0}^n (u(i+1) - \hat{u}(i+1))^2}{\sum_{i=0}^n (u(i+1) - u(i))^2} \quad (2.63)$$

onde $o(i)$ e $p(i)$ são respectivamente a observação (o valor efetivamente observado) e a predição no instante i . Para uma dada série temporal U com N_t amostras totais o erro ao final do processo de predição de U é dado por $\text{NMSE}(N_t - 1)$, onde $N_t - 1$ é o índice do último elemento da série.

2.5.3 Exemplo – Predição de Manchas Solares

Nesta seção apresenta-se os resultados obtidos para a predição linear da série *Sunspots*, com $N_t = 280$ amostras totais. Cada um dos 280 pontos que constituem esta série corresponde ao número normalizado da ocorrência anual de manchas solares, no período de 1700 a 1979. Esta série, mostrada na Tabela 2.1, é clássica no contexto de predição, tendo sido historicamente uma das primeiras séries temporais estudadas. Ela serve ao nosso estudo visto que apresenta um nível de correlação semelhante ao obtido por amostragem com $f_s > f_{Nyquist}$, usada em codificação DPCM.

Tabela 2.1: Série temporal *Sunspots*. Ano × Número Normalizado da Ocorrência Anual de Manchas Solares. *Downloaded* de <ftp://ftp.santafe.edu/pub/Time-Series/data/sunspots>.

1700	1701	1702	1703	1704	1705	1706	1707	1708	1709	1710	1711
0.0262	0.0575	0.0837	0.1203	0.1883	0.3033	0.1517	0.1046	0.0523	0.0418	0.0157	0.0000
1712	1713	1714	1715	1716	1717	1718	1719	1720	1721	1722	1723
0.0000	0.0105	0.0575	0.1412	0.2458	0.3295	0.3138	0.2040	0.1464	0.1360	0.1151	0.0575
1724	1725	1726	1727	1728	1729	1730	1731	1732	1733	1734	1735
0.1098	0.2092	0.4079	0.6381	0.5387	0.3818	0.2458	0.1831	0.0575	0.0262	0.0837	0.1778
1736	1737	1738	1739	1740	1741	1742	1743	1744	1745	1746	1747
0.3661	0.4236	0.5805	0.5282	0.3818	0.2092	0.1046	0.0837	0.0262	0.0575	0.1151	0.2092
1748	1749	1750	1751	1752	1753	1754	1755	1756	1757	1758	1759
0.3138	0.4231	0.4362	0.2495	0.2500	0.1606	0.0638	0.0502	0.0534	0.1700	0.2489	0.2824
1760	1761	1762	1763	1764	1765	1766	1767	1768	1769	1770	1771
0.3290	0.4493	0.3201	0.2359	0.1904	0.1093	0.0596	0.1977	0.3651	0.5549	0.5272	0.4268
1772	1773	1774	1775	1776	1777	1778	1779	1780	1781	1782	1783
0.3478	0.1820	0.1600	0.0366	0.1036	0.4838	0.8075	0.6585	0.4435	0.3562	0.2014	0.1192
1784	1785	1786	1787	1788	1789	1790	1791	1792	1793	1794	1795
0.0534	0.1260	0.4336	0.6904	0.6846	0.6177	0.4702	0.3483	0.3138	0.2453	0.2144	0.1114
1796	1797	1798	1799	1800	1801	1802	1803	1804	1805	1806	1807
0.0837	0.0335	0.0214	0.0356	0.0758	0.1778	0.2354	0.2254	0.2484	0.2207	0.1470	0.0528
1808	1809	1810	1811	1812	1813	1814	1815	1816	1817	1818	1819
0.0424	0.0131	0.0000	0.0073	0.0262	0.0638	0.0727	0.1851	0.2395	0.2150	0.1574	0.1250
1820	1821	1822	1823	1824	1825	1826	1827	1828	1829	1830	1831
0.0816	0.0345	0.0209	0.0094	0.0445	0.0868	0.1898	0.2594	0.3358	0.3504	0.3708	0.2500
1832	1833	1834	1835	1836	1837	1838	1839	1840	1841	1842	1843
0.1438	0.0445	0.0690	0.2976	0.6354	0.7233	0.5397	0.4482	0.3379	0.1919	0.1266	0.0560
1844	1845	1846	1847	1848	1849	1850	1851	1852	1853	1854	1855
0.0785	0.2097	0.3216	0.5152	0.6522	0.5036	0.3483	0.3373	0.2829	0.2040	0.1077	0.0350
1856	1857	1858	1859	1860	1861	1862	1863	1864	1865	1866	1867
0.0225	0.1187	0.2866	0.4906	0.5010	0.4038	0.3091	0.2301	0.2458	0.1595	0.0853	0.0382
1868	1869	1870	1871	1872	1873	1874	1875	1876	1877	1878	1879
0.1966	0.3870	0.7270	0.5816	0.5314	0.3462	0.2338	0.0889	0.0591	0.0649	0.0178	0.0314
1880	1881	1882	1883	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1891
0.1689	0.2840	0.3122	0.3332	0.3321	0.2730	0.1328	0.0685	0.0356	0.0330	0.0371	0.1862
1892	1893	1894	1895	1896	1897	1898	1899	1900	1901	1902	1903
0.3818	0.4451	0.4079	0.3347	0.2186	0.1370	0.1396	0.0633	0.0497	0.0141	0.0262	0.1276
1904	1905	1906	1907	1908	1909	1910	1911	1912	1913	1914	1915
0.2197	0.3321	0.2814	0.3243	0.2537	0.2296	0.0973	0.0298	0.0188	0.0073	0.0502	0.2479
1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923	1924	1925	1926	1927
0.2986	0.5434	0.4215	0.3326	0.1966	0.1365	0.0743	0.0303	0.0873	0.2317	0.3342	0.3609
1928	1929	1930	1931	1932	1933	1934	1935	1936	1937	1938	1939
0.4069	0.3394	0.1867	0.1109	0.0581	0.0298	0.0455	0.1888	0.4168	0.5983	0.5732	0.4644
1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951
0.3546	0.2484	0.1600	0.0853	0.0502	0.1736	0.4843	0.7929	0.7128	0.7045	0.4388	0.3630
1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958	1959	1960	1961	1962	1963
0.1647	0.0727	0.0230	0.1987	0.7411	0.9947	0.9665	0.8316	0.5873	0.2819	0.1961	0.1459
1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
0.0534	0.0790	0.2458	0.4906	0.5539	0.5518	0.5465	0.3483	0.3603	0.1987	0.1804	0.0811
1976	1977	1978	1979								
0.0659	0.1428	0.4838	0.8127								

A predição estimada $\hat{u}(n+1)$ é, neste caso, expressa como uma combinação linear de 4 amostras prévias, equivalendo a dizer que a ordem da predição linear adotada é $M = 4$. Os valores para os coeficientes que ponderam tal combinação linear foram obtidos através de (2.61) e são $W_0 = 1.35782$, $W_1 = -0.442764$, $W_2 = -0.186194$ e $W_3 = 0.175639$, de tal forma que a Equação (2.43) resulta em:

$$\hat{u}(n+1) = 1.35782 u(n) - 0.442764 u(n-1) - 0.186194 u(n-2) + 0.175639 u(n-3)$$

O valor obtido para o Erro Médio Quadrático Normalizado final é $NMSE(N_t - 1) = 0.608$, conforme Equação (2.63).

É importante salientar que, apesar de a ordem de predição ser $M = 4$, a predição linear aqui efetuada necessita do conhecimento prévio de todos os $N_t = 280$ elementos da série temporal para montar a matriz de correlação \mathbf{R} , expressa por (2.55), na tentativa de aproximar o operador $E\{\}$ pela média temporal obtida a partir dos elementos conhecidos.

A Figura 2.17 apresenta as representações gráficas da série *Sunspots*, observada e predita.

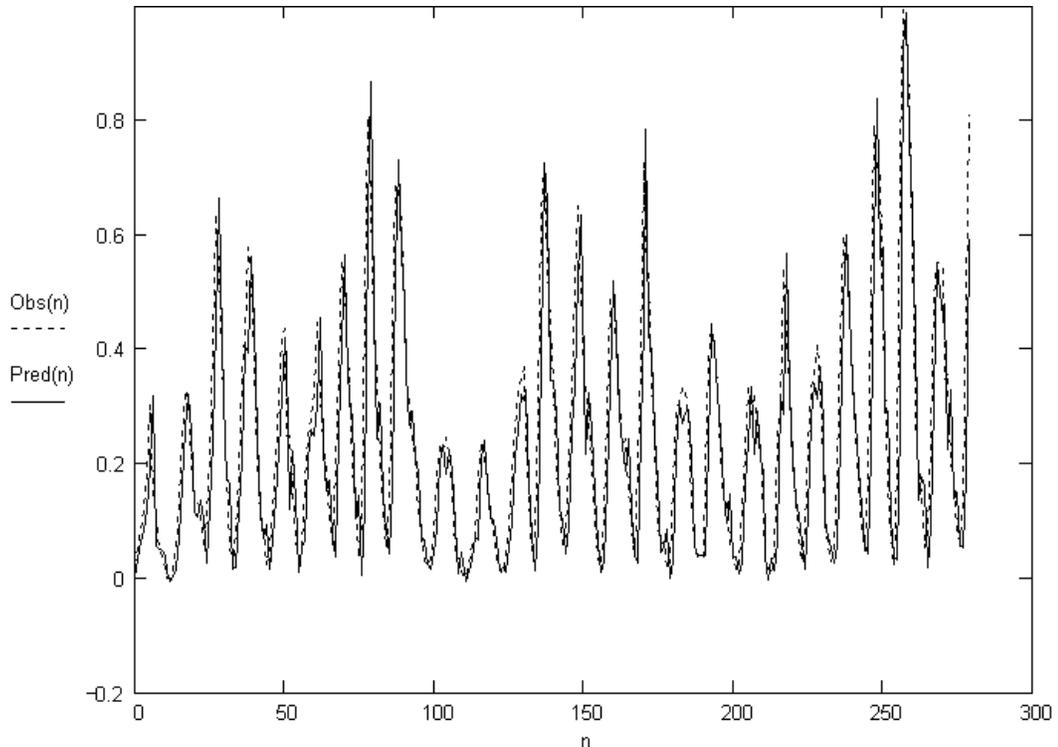


Figura 2.17: Série *Sunspots* – Predição Linear – $M = 4$, $NMSE(N_t - 1) = 0.608$.

A Tabela 2.2 lista o *script* LinPred.m , para Matlab 5.0, utilizado neste exemplo.

Tabela 2.2: *Script* LinPred.m , para Matlab 5.0, o qual implementa um preditor linear de ordem M . Os argumentos de linha de comando são:

TimeSeriesInFile – Arquivo de entrada numérico-ascii contendo os valores da série temporal a ser predita
Pred&ObsOutFile – Arquivo de saída numérico-ascii contendo na coluna da esquerda os valores preditos e na coluna da direita os valores observados.
ARCoefsOutFile – Arquivo de saída numérico-ascii contendo os coeficientes do vetor \underline{W} .
ARModelOrder – Ordem de predição M (ordem do modelo auto-regressivo).

```
% One step ahead linear predictor for scalar time series
% Uses Durbin-Levinson algorithm to solve Wiener-Hopf (=Yule-Walker)
% equations
%
% USE: LinPred TimeSeriesInFile Pred&ObsOutFile ARCoefsOutFile ARModelOrder
%
% By Cristina & Fernando De Castro November 2000

function LinPred(TimeSeriesInFile, PredObsOutFile, ARCoefsOutFile,
ARModelOrder)
if nargin != 4
    disp('LinPred: TimeSeriesInFile Pred&ObsOutFile ARCoefsOutFile
ARModelOrder');
    return
end
n=eval(ARModelOrder);

% read time series into S
InFp=fopen(TimeSeriesInFile,'rt');
S=fscanf(InFp,'%f');
fclose(InFp);

% predict S into P
[a,g]=lpc(S,n);
th=poly2th(a,[],[1]);
P=predict(S,th,1);

LenS=length(S);
LenP=length(P);
NSmpls=min(LenS,LenP);

% plot
k=1:NSmpls; plot(k,S,'b',k,P,'r');

% output Pred & Obs
OutFp=fopen(PredObsOutFile,'wt');
fprintf(OutFp,'%8.6g\t%8.6g\n',[P';S]);
fclose(OutFp);

ErrEn=0;
PredEn=0;

% NMSE calculation
for k=2:NSmpls
    ErrEn=ErrEn+(S(k)-P(k))^2;
    PredEn=PredEn+(S(k)-S(k-1))^2;
```

```
end

NMSE=ErrEn/PredEn;

str=sprintf('\nNMSE=%5.3g\n',NMSE); disp(str);

%disp('AR Coefficients:');disp(a);

% output AR Coefficients
OutFp=fopen(ARCoefsOutFile,'wt');
fprintf(OutFp,'%8.6g\n',a);
fclose(OutFp);
```

2.6 Modulação Delta (DM)

Vimos que a correlação resultante da amostragem a uma razão ligeiramente maior que a Frequência de Nyquist permite a predição do sinal a ser codificado. Na codificação DPCM, esta característica é explorada no sentido de reduzir a faixa dinâmica $V_H - V_L$ do erro de predição $e(n)$ na entrada do quantizador $Q\{\}$, reduzindo assim a potência $\overline{q_e^2} = S^2/12$ do erro de quantização.

Nesta linha de pensamento, o seguinte raciocínio surge naturalmente: Uma amostragem a uma razão ligeiramente maior que a Frequência de Nyquist gera amostras correlacionadas o que permite a predição do sinal a ser codificado e, portanto, reduz a faixa dinâmica $V_H - V_L$ do sinal $e(n)$ na entrada de $Q\{\}$. Então, se utilizarmos uma amostragem bem acima da Frequência de Nyquist poderemos obter uma predição tão boa (devido a alta correlação resultante da super-amostragem) que a faixa dinâmica $V_H - V_L$ do sinal $e(n)$ na entrada de $Q\{\}$ tenderá para zero e com isto poderemos reduzir o número M de níveis de quantização necessários para $M = 2$. Esta é a idéia básica que rege o funcionamento da Modulação Delta (DM). Na realidade, a DM nada mais é do que um sistema DPCM com um A/D de 1 bit ($M = 2$).

Na sua forma mais simples, um sistema DM provê uma aproximação em forma de escada para uma versão super-amostrada do sinal em banda-base $m(t)$ (super-amostragem: $f_s = 1/T_s \gg f_{Nyquist}$), conforme mostra a Figura 2.18.

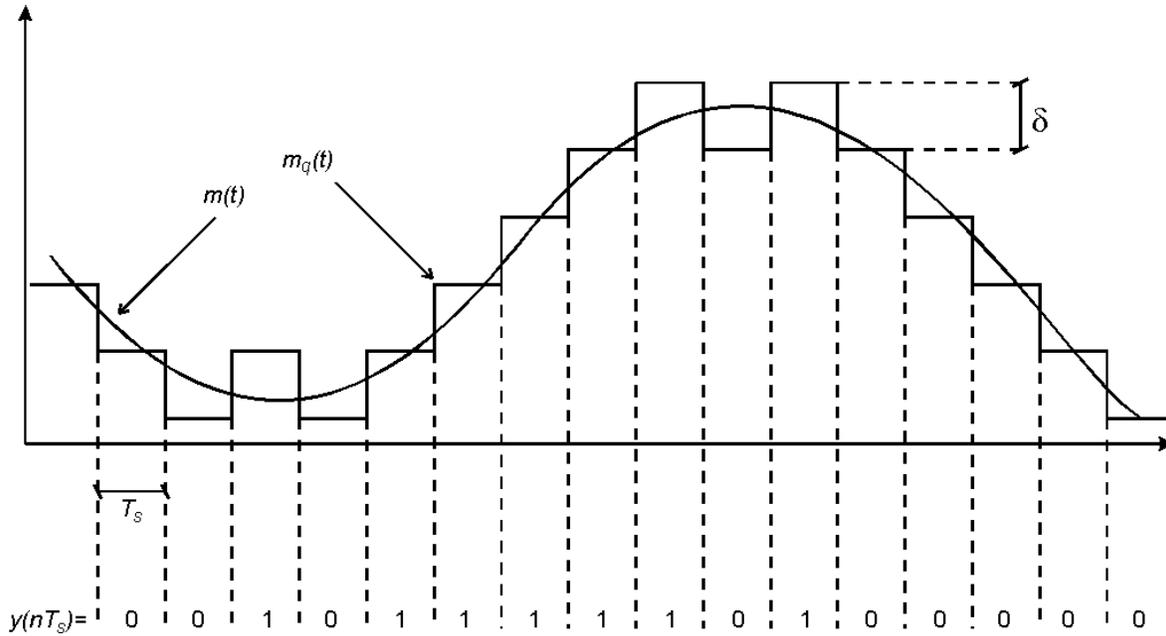


Figura 2.18: Sinais envolvidos na Modulação Delta.

Em um sistema DM o erro de predição $e(n)$ é quantizado através do quantizador $Q\{\cdot\}$ em apenas dois níveis de quantização $+\delta$ ou $-\delta$ (i.e., $M = 2$), conforme mostra a Figura 2.19c, correspondendo respectivamente a um erro positivo e a um erro negativo. Assim, se no início de um intervalo de amostragem T_s o sinal $m_q(t)$ encontra-se abaixo de $m(t)$, então $m_q(t)$ é incrementado de $+\delta$, conforme observa-se na Figura 2.18. Por outro lado, se no início de um intervalo de amostragem o sinal $m_q(t)$ encontra-se acima de $m(t)$, então $m_q(t)$ é decrementado de $-\delta$. Desde que $m(t)$ não varie demasiadamente rápido, o sinal em escada $m_q(t)$ aproxima $m(t)$ com uma precisão tal que $|m(t) - m_q(t)| < \delta$. Assim, $m_q(t)$ é uma aproximação de $m(t)$.

A Figura 2.19a mostra o codificador de um sistema DM. Note que o Preditor Linear é substituído por um preditor do tipo z^{-1} (preditor pela última amostra). O bloco z^{-1} repete em sua saída no instante n o valor em sua entrada no instante $n-1$, de modo que $\hat{m}(n) = m_q(n-1)$ (z^{-1} significa, no contexto da Transformada Z [Strum], um atraso T_s no tempo, ou a amostra anterior). Esta modificação é possível porque um sistema DM amostra o sinal banda-base $m(t)$ a uma razão $f_s = 1/T_s \gg f_{Nyquist}$, o que resulta em alta correlação entre as amostras de $m(n)$, e, portanto, permite que um simples preditor pela última amostra seja suficiente para prever o sinal.

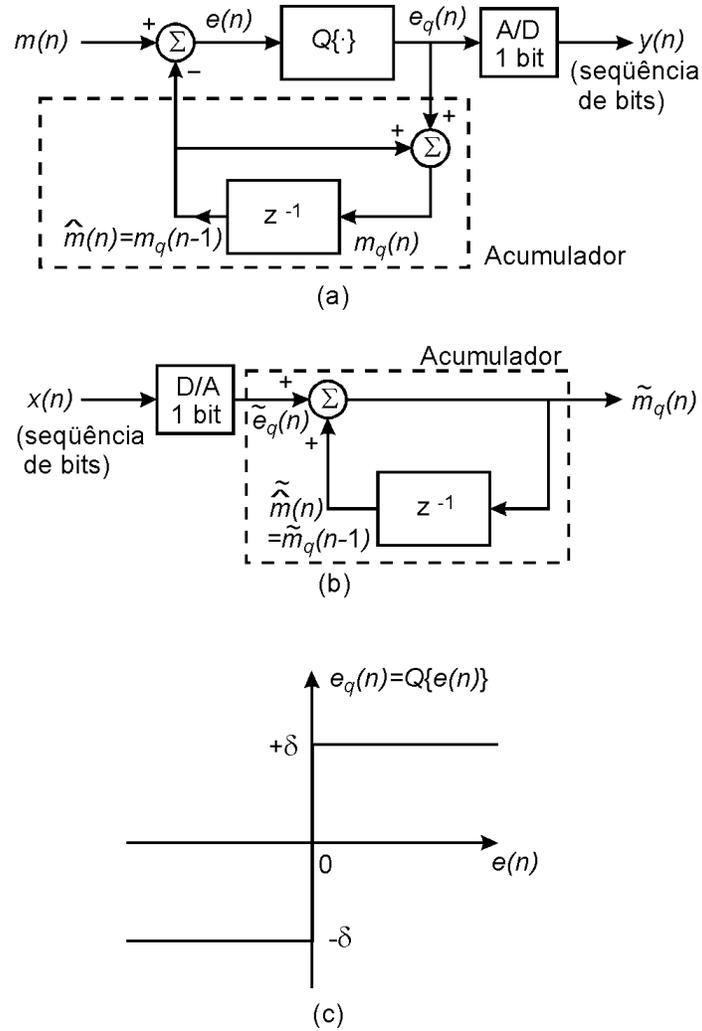


Figura 2.19: Sistema DM. (a) Codificador (no transmissor digital) (b) Decodificador (no receptor digital). (c) Curva de transferência do quantizador $Q\{\cdot\}$.

O erro de predição $e(n)$ na entrada do quantizador $Q\{\cdot\}$ é dado por

$$e(n) = m(n) - \hat{m}(n) = m(n) - m_q(n-1) \quad (2.64)$$

a saída de $Q\{\cdot\}$ é dada por

$$e_q(n) = Q\{e(n)\} = \delta \operatorname{sgn}(e(n)) \quad (2.65)$$

onde

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} +1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \quad (2.66)$$

e a entrada do preditor z^{-1} é

$$m_q(n) = \hat{m}(n) + e_q(n) = m_q(n-1) + e_q(n) \quad (2.67)$$

A realimentação da saída do preditor z^{-1} à sua entrada através de um somador forma um bloco Acumulador. Por exemplo, consideremos o instante $n=0$. A saída do preditor z^{-1} é $\hat{m}(0)=0$ porque $m_q(n-1)$ não existe. Daí, de (2.67), $m_q(0)=e_q(0)$. Seja agora o instante $n=1$. A saída do preditor z^{-1} é $\hat{m}(1)=m_q(0)=e_q(0)$. De (2.67), $m_q(1)=\hat{m}(1)+e_q(1)=e_q(0)+e_q(1)$. Seja agora o instante $n=2$. A saída do preditor z^{-1} é $\hat{m}(2)=m_q(1)=e_q(0)+e_q(1)$. De (2.67), $m_q(2)=\hat{m}(2)+e_q(2)=e_q(0)+e_q(1)+e_q(2)$. E assim prosseguiríamos recursivamente de modo que o Acumulador executa a operação

$$m_q(n) = \sum_{i=0}^n e_q(i) = \sum_{i=0}^n \delta \operatorname{sgn}(e(i)) = \delta \sum_{i=0}^n \operatorname{sgn}(e(i)) \quad (2.68)$$

A Equação (2.68) é interpretada da seguinte maneira: No instante de amostragem nT_s o acumulador incrementa a aproximação $m_q(nT_s)$ (sinal $m_q(t)$ na Figura 2.18) de δ na direção positiva ou negativa dependendo do sinal algébrico do erro de predição $e(nT_s)$.

Em outras palavras, se o sinal de entrada $m(n)$ é maior que a predição mais recente $\hat{m}(n)$ um incremento positivo $+\delta$ é aplicado à aproximação $m_q(n)$. Por outro lado, se o sinal de entrada $m(n)$ é menor que a predição mais recente $\hat{m}(n)$ um incremento negativo $-\delta$ é aplicado à aproximação $m_q(n)$. Desta maneira, o Acumulador procura acompanhar as amostras de entrada variando o valor da aproximação em degraus de valor $\pm\delta$.

A Figura 2.19b mostra o decodificador de um sistema DM. O D/A gera em sua saída o sinal $\tilde{e}_q(n)$, que é uma aproximação do sinal $e_q(n)$ no transmissor, aproximação resultante da eventual degradação de $e_q(n)$ pela transmissão através do canal. Como o fluxo de sinal no receptor (Figura 2.19b) é o mesmo do transmissor (Figura 2.19a), então $\tilde{m}_q(n) = \tilde{m}(n) + \tilde{e}_q(n)$. Assim como no sistema DPCM, se o canal de transmissão não introduzir nenhuma degradação no sinal transmitido, então $\tilde{m}_q(n) \rightarrow m_q(n)$.

O sinal $\tilde{m}_q(n)$ possui um espectro amplo devido às transições rápidas da forma de onda em escada. Este ruído de alta frequência gerado no receptor de um sistema DM é eliminado pelo filtro passa-baixa para recuperação do sinal $m(t)$, com frequência de corte f_M , sendo f_M a maior frequência do espectro de $m(t)$, conforme visto na Seção 2.1.

2.6.1 Ruído de Quantização de um Sistema DM

Sistemas DM são sujeitos a dois tipos de erro de quantização:

- 1- Distorção por declividade excessiva em $m(t)$ (*slope-overload distortion*).
- 2- Ruído granular.

A distorção *slope-overload* é similar à limitação *slew-rate* dos Amplificadores Operacionais [Wait], isto é, ela resulta da incapacidade do codificador DM acompanhar variações demasiadamente rápidas no sinal $m(t)$.

O sinal quantizado $m_q(n)$ pode ser decomposto em

$$m_q(n) = m(n) + q_e(n) \quad (2.69)$$

onde $q_e(n)$ representa o ruído ou erro de quantização visto na Seção 2.2.1.

Substituindo (2.69) em (2.64)

$$e(n) = m(n) - m_q(n-1) = m(n) - m(n-1) - q_e(n-1) \quad (2.70)$$

Portanto, exceto pelo erro de quantização $q_e(n-1)$, o erro de predição $e(n)$ na entrada do quantizador $Q\{\}$ é a diferença entre duas amostras consecutivas de $m(t)$, e pode ser interpretado como a versão discreta e ruidosa da derivada do sinal $m(t)$.

Se nós considerarmos a região de máxima declividade do sinal $m(t)$, i.e. $\max \left| \frac{dm(t)}{dt} \right|$, então a seqüência de amostras da aproximação $m_q(nT_s)$, para ser capaz de acompanhar $m(t)$ nesta região de máxima declividade, terá que ser incrementada com uma rapidez tal que satisfaça a condição

$$\frac{\delta}{T_s} \geq \max \left| \frac{dm(t)}{dt} \right| \quad (2.71)$$

caso contrário ocorrerá distorção *slope-overload*, conforme mostrado na Figura 2.20.

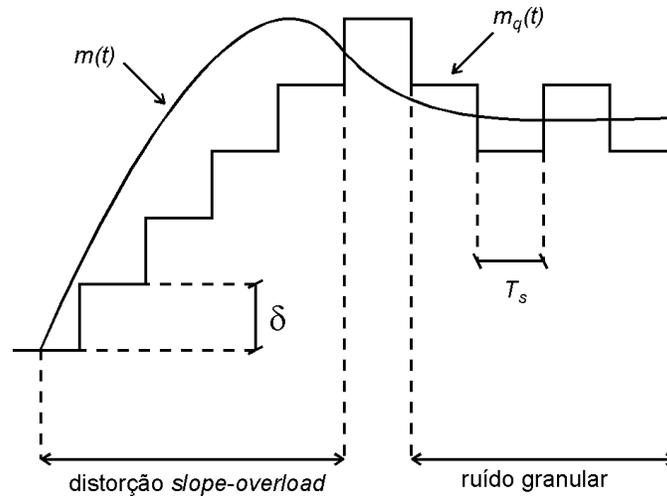


Figura 2.20: Erro de quantização em um sistema DM.

Por outro lado, quando $m(t)$ tende a uma reta horizontal, o acumulador tentará acompanhar $m(t)$ variando o valor da aproximação $m_q(n)$ em degraus de valor $\pm \delta$, o que forçosamente resultará em uma alternância de degraus para cima e para baixo em torno da reta horizontal. Esta alternância é denominada de Ruído Granular, conforme mostrado na Figura 2.20.

Portanto, percebe-se que existe a necessidade de um valor grande para δ objetivando acomodar sinais de grande faixa dinâmica enquanto que um δ pequeno é necessário para representar com precisão sinais aproximadamente constantes. A escolha do δ adequado resulta, como conseqüência, em um compromisso entre distorção *slope-overload* e ruído granular.

2.7 Comentários Comparativos entre PCM, DPCM e DM

A grande vantagem da DM é a sua simplicidade de implementação. O custo computacional do preditor z^{-1} utilizado em DM (o qual é um simples registrador do último valor ocorrido de $m_q(n)$) é irrisório se comparado com o custo computacional do Preditor Linear utilizado em um codificador DPCM. No entanto, a DM exige uma taxa de amostragem muito maior de que DPCM ou PCM.

Para sinais de voz, a relação sinal-ruído de quantização SNR_Q obtida para um sistema DPCM com um preditor linear de ordem 5 é cerca de 12 dB mais alta do que a obtida para um sistema PCM padrão com mesmo número M de níveis de quantização. O aumento da ordem do preditor linear para além da ordem 5 resulta em pouco aumento adicional da SNR_Q .

De (2.26), cada 6dB de redução no ruído de quantização equivale ao aumento de 1 bit no A/D. Assim, podemos expressar os 12 dB de melhora da SNR_Q obtida com DPCM em relação à PCM em termos da taxa de transmissão em R [bits/s]. Ou seja, para a mesma SNR_Q e mesma taxa de amostragem $f_s = 8\text{KHz}$ (típica para sinal de voz) um sistema DPCM com um preditor de ordem 5 necessita 2 bits (12dB \rightarrow 2bits) a menos por amostra do que um sistema PCM. Portanto, sob $f_s = 8\text{KHz}$, um sistema DPCM transmite o mesmo número de amostras por segundo que um sistema PCM mas economiza $8\text{KHz} \times 2\text{bits} = 16\text{Kbps}$ na taxa de transmissão (menor banda-passante necessária).

2.8 DPCM e DM Adaptativos (ADPCM e ADM)

Objetivando acomodar sinais de faixa dinâmica e estatística variáveis surgiram os sistemas ADPCM e ADM.

Tipicamente, a cada instante n um sistema ADPCM ajusta o passo de quantização S_n do quantizador $Q\{\cdot\}$ de acordo com a variância $\text{var}\{\mathbf{E}\}$ de um conjunto $\mathbf{E} = \{e(n-1), e(n-2), \dots, e(n-L)\}$ de L amostras passadas do sinal $e(n)$ na entrada de $Q\{\cdot\}$.

Em geral,

$$S_{n+1} = S_n \times f(\text{var}\{\mathbf{E}\}) \quad (2.72)$$

onde $f(\cdot)$ é uma função analítica tal que $f(\text{var}\{\mathbf{E}\}) < 1.0$ para $\text{var}\{\mathbf{E}\}$ experimentalmente considerado um valor baixo e $f(\text{var}\{\mathbf{E}\}) > 1.0$ para $\text{var}\{\mathbf{E}\}$ experimentalmente considerado um valor alto. O critério experimental da classificação de $\text{var}\{\mathbf{E}\}$ como alto/baixo em geral é a redução do ruído de quantização resultante.

Em conseqüência, o Preditor Linear deve reavaliar periodicamente \mathbf{R} e \underline{P} e calcular os coeficientes do filtro \underline{W} por $\underline{W} = \mathbf{R}^{-1} \underline{P}$ não só devido à eventual não-estacionariedade do sinal (ver Seção 2.5.1) como também devido à variação adaptativa em S_n .

Um sistema ADM tipicamente utiliza a seguinte regra de adaptação para δ :

$$\delta_n = \delta_{n-1} \times \gamma^{\rho(b_n) \rho(b_{n-1})} \quad (2.73)$$

onde $\gamma \geq 1$ é uma constante determinada experimentalmente objetivando a redução do erro de quantização (por exemplo, $\gamma = 1.5$ é adequado para sinais de voz), $\rho(b) = 2b - 1$ e b_n e b_{n-1} são respectivamente o último e o penúltimo bit gerados na saída $y(n)$ do codificador de um sistema DM (Figuras 2.19a e 2.18).

Assim, se em um determinado instante n começa a ocorrer distorção *slope-overload*, então forçosamente $b_n = b_{n-1}$, $\rho(b_n) \rho(b_{n-1}) = 1$ e a conseqüência é δ_n ser multiplicado por γ , aumentando δ e reduzindo a distorção. Por outro lado, se em um determinado instante n começa a ocorrer ruído granular, então forçosamente $b_n \neq b_{n-1}$, $\rho(b_n) \rho(b_{n-1}) = -1$ e a conseqüência é δ_n ser dividido por γ , diminuindo δ e reduzindo o ruído.

A Figura 2.21 mostra o erro de quantização em um sistema ADM para voz adaptado por (2.73). A comparação com a Figura 2.20 mostra uma considerável redução da distorção *slope-overload* e do ruído granular.

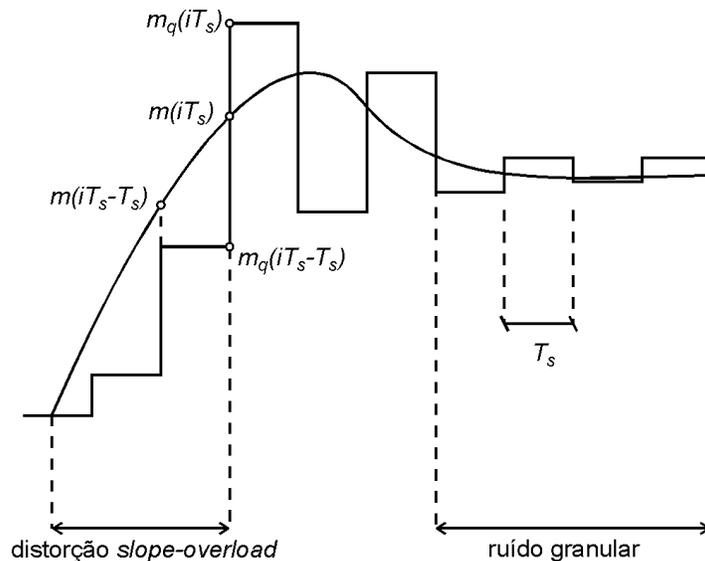


Figura 2.21: Erro de quantização em um sistema ADM.

2.9 Referências Bibliográficas

- [Carlson] A. B. Carlson, *Communication Systems*, McGraw-Hill, 1965.
- [Proakis] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995.
- [Taub] H. Taub and D.L. Schilling, *Principles of Communications Systems*, McGraw-Hill, 1986.
- [Wait] J.V. Wait, L.P. Huelsman and G.A. Korn, *Introduction to Operational Amplifier Theory and Applications*, McGraw-Hill, 1975.
- [Strum] R. D. Strum and D. E. Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1989.
- [Haykin] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [Gantmacher] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vol.1, Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1977.
- [Press] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery. *Numerical Recipes in C*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1992.
- [Weigend] A. S. Weigend and N. A. Gershenfeld. *Time Series Prediction: Forecasting the Future and Understanding the Past*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.