

Capítulo V

Modulação e Demodulação

Muitos são os meios físicos utilizados como canais de transmissão, tais como pares de fios, cabos coaxiais, fibras óticas, canais de microondas, etc. Todos estes meios são de natureza inerentemente contínua no tempo. Conforme vimos, os blocos de bits provenientes do processo de codificação de canal são, obviamente, discretos no tempo. Como um sinal que transporta informação necessita se adaptar às limitações dos canais de transmissão, torna-se necessário representar os blocos de bits provenientes da etapa de codificação sob a forma de sinal contínuo no tempo, para que se efetue a transmissão. A modulação é o processo utilizado para esta representação.

Em comunicação digital basicamente o tipo de modulação empregado é a modulação PAM (*Pulse Amplitude Modulation*). No contexto de modulação PAM, esta subdivide-se em modulação PAM em banda-base e modulação PAM em banda passante.

Na modulação PAM em banda-base uma seqüência de translações no tempo de um pulso básico é modulada em amplitude por uma seqüência de símbolos. Este tipo de modulação é utilizada basicamente em meios metálicos, tais como pares de fios, onde é permitido que o espectro do sinal se estenda até a freqüência zero.

A modulação PAM em banda passante é uma extensão da modulação PAM em banda-base, em que é introduzido o conceito de uma portadora senoidal. Este tipo de modulação é utilizado em meios com banda altamente restrita, tais como transmissão por rádio. A modulação PAM em banda passante utiliza duas portadoras senoidais de mesma freqüência, defasadas de noventa graus, as quais são moduladas pelas partes real e imaginária de um sinal complexo em banda-base. Portanto, em um sistema de comunicações em banda-passante, o conjunto de símbolos (= **alfabeto** = **constelação**) e o ruído do canal apresentam valor complexo. Alguns casos de interesse no que concerne à modulação PAM em banda passante são: modulação PSK (*Phase-Shift Keying*), modulação AM-PM (*Amplitude Modulation and Phase Modulation*) e modulação QAM (*Quadrature Amplitude Modulation*).

Por exemplo, um sinal em banda-base tem um alfabeto que é simplesmente uma lista de números reais, por exemplo $A = \{-3, -1, +1, +3\}$. Um sinal PAM em banda passante tem um alfabeto que é uma lista de números complexos, por exemplo, $A = \{-1, -j, +1, +j\}$. Ambos os alfabetos têm tamanho $M = 4$ e cada símbolo que a eles pertence pode representar $\log_2 M = 2$ bits.

Neste sentido, um sistema de comunicações em banda-base nada mais é do que um caso especial do sistema em banda-passante no qual os símbolos e o ruído apresentam valor real. Já que o sistema PAM em banda-base é um caso especial do sistema PAM em banda passante, iremos nos concentrar no sistema PAM em banda passante. Basicamente

estudaremos neste capítulo a dependência da probabilidade de erro na demodulação como função do tipo de alfabeto adotado e do nível de ruído no canal.

A Figura 5.1 mostra um modulador PAM que pode representar qualquer modulação passa-banda, como as usuais modulações M -PSK e M -QAM, sendo M o número de símbolos passíveis de serem construídos a partir de blocos de n bits provenientes do codificador de canal.

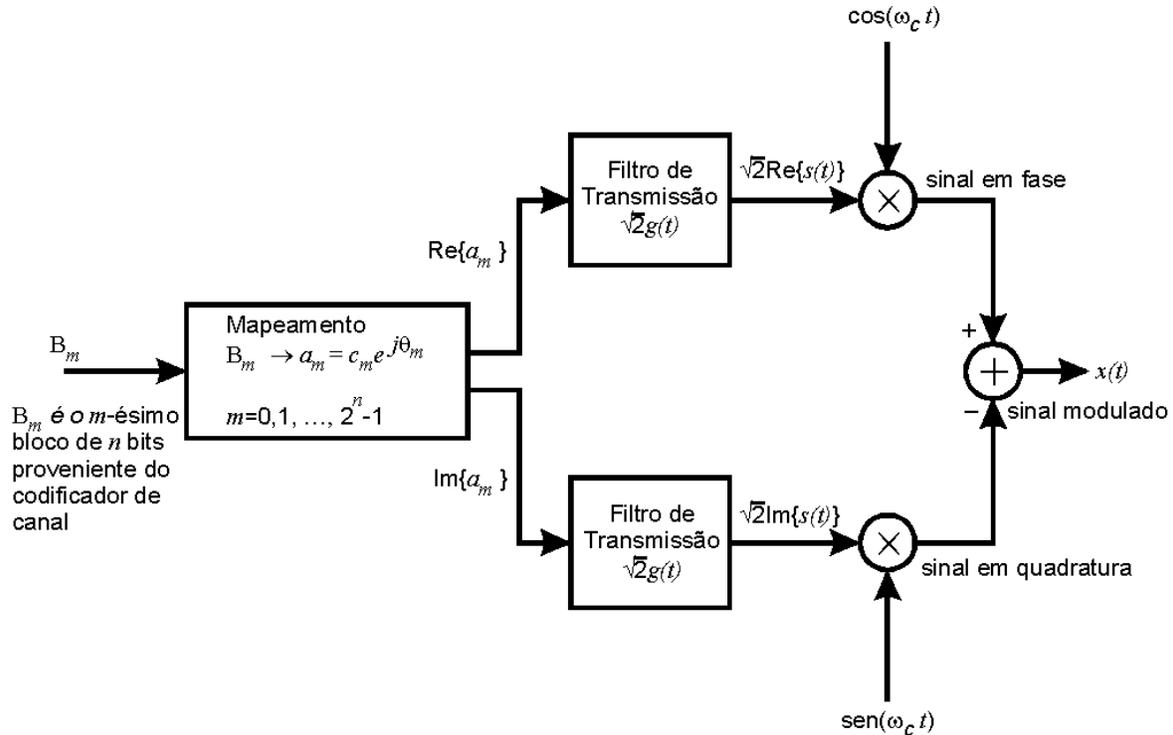


Figura 5.1: Modulador PAM em banda passante. O espectro do sinal modulado $x(t)$ apresenta frequência da portadora localizada em ω_c . O Filtro de Transmissão apresenta uma função de transferência $G(j\omega) = \mathfrak{F}^{-1}\{g(t)\}$ que aproxima um filtro passa baixa ideal. Os sinais $\text{Re}\{a_m\}$ e $\text{Im}\{a_m\}$ são sinais elétricos variantes no tempo, i.e., $\text{Re}\{a_m\} = \text{Re}\{a_m(t)\}$ e $\text{Im}\{a_m\} = \text{Im}\{a_m(t)\}$, e ambos têm a forma de um pulso retangular estreito (portanto, podem ser aproximados por impulsos). O Filtro de Transmissão $G(j\omega)$ apresenta uma frequência de corte tal que as componentes espectrais de alta frequência resultantes das transições abruptas dos pulsos retangulares $\text{Re}\{a_m(t)\}$ e $\text{Im}\{a_m(t)\}$ são eliminadas, mas o espectro da informação a ser transmitida é preservado (para evitar irradiação de ruído e gerar, assim, interferência em outros serviços de comunicações). A constante $\sqrt{2}$ é introduzida apenas para aproximadamente igualar as potências de sinal na entrada e saída do filtro $G(j\omega)$.

O conjunto de $M = 2^n$ símbolos $a_m = c_m e^{j\theta_m}$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$, forma o alfabeto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$, sendo n o número de bits por bloco proveniente do codificador de

canal. Para evitar um nível DC residual, o que implicaria em perda de potência útil à transmissão de informação (DC não carrega informação alguma), o alfabeto A deve possuir média zero, i.e., $\sum_m a_m = 0$.

Sejam dois símbolos a_i e a_j do alfabeto A, $i \neq j$, caracterizados por estarem distanciados entre si da distância $d_{\min} = |a_i - a_j|$, sendo d_{\min} a menor distância entre os símbolos de A. A probabilidade de o demodulador no receptor tomar a_i por a_j , como consequência do ruído/interferência no canal, é muito maior para os símbolos a_i e a_j do que para qualquer outro par de símbolos de A, visto que a_i e a_j encontram-se distanciados de apenas d_{\min} . Portanto, para minimizar a probabilidade de erro nos n bits dos blocos B_i e B_j demodulados no receptor a partir de a_i e a_j , os mapeamentos $B_i \rightarrow a_i = c_i e^{j\theta_i}$ e $B_j \rightarrow a_j = c_j e^{j\theta_j}$ no modulador da Figura 5.1 são usualmente projetados de tal forma que o bloco B_i difere do bloco B_j em apenas 1 bit (código gray).

O sinal $x(t)$ na saída do modulador da Figura 5.1 pode ser expresso analiticamente pela parte real da convolução da resposta ao impulso $g(t)$ do Filtro de Transmissão com a seqüência discreta de símbolos $a_m(kT)$ originada do mapeamento $B_m \rightarrow a_m$, multiplicada pela portadora complexa $e^{j\omega_c t}$:

$$x(t) = \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ e^{j\omega_c t} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} a_m(kT) g(t - kT) \right\} \quad (5.1)$$

onde T é o intervalo de amostragem do sistema. Visto que $a_m = c_m e^{j\theta_m}$, a Equação (5.1) pode ser re-escrita como

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_m(kT) e^{j(\omega_c t + \theta_m(kT))} g(t - kT) \right\} = \\ &= \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_m(kT) \cos(\omega_c t + \theta_m(kT)) g(t - kT) \end{aligned} \quad (5.2)$$

Nota: A Equação (5.2), uma vez que $\cos(A+B) = \cos A \cos B - \text{sen } A \text{sen } B$, pode ser escrita na forma:

$$x(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_m(kT) \cos(\theta_m(kT)) \cos(\omega_c t) g(t-kT) + \\ - \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_m(kT) \text{sen}(\theta_m(kT)) \text{sen}(\omega_c t) g(t-kT)$$

com $A = \omega_c t$ e $B = \theta_m(kT)$. Mas, $\text{Re}\{a_m(kT)\} = c_m(kT) \cos(\theta_m(kT))$ e $\text{Im}\{a_m(kT)\} = c_m(kT) \text{sen}(\theta_m(kT))$, de modo que

$$x(t) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Re}\{a_m(kT)\} \sqrt{2} g(t-kT) \right] \cos(\omega_c t) + \\ - \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{Im}\{a_m(kT)\} \sqrt{2} g(t-kT) \right] \text{sen}(\omega_c t)$$

A equação acima representa exatamente o diagrama do modulador mostrado na Figura 5.1. Observe que os termos entre colchetes expressam a convolução da resposta ao impulso dos Filtros de Transmissão respectivamente com os trens de pulsos $\text{Re}\{a_m\}$ e $\text{Im}\{a_m\}$ na saída do bloco "Mapeamento" na Figura 5.1.

Observe em (5.2) que cada pulso $g(t-kT)$ é multiplicado pela portadora de frequência ω_c cuja amplitude c_m e fase θ_m são determinados pelo símbolo $a_m = c_m e^{j\theta_m}$ a ser transmitido no instante kT . Isto sugere que a modulação M -PSK, na qual a informação é transmitida através de somente uma variação na fase θ_m (c_m é constante), é um caso especial de modulação PAM em banda passante.

Quando um pulso retangular é submetido a um filtro passa baixa, obtemos um sinal distorcido na saída do filtro que dificilmente lembra o pulso original. Tanto maior será esta distorção quanto menor for a frequência de corte do filtro passa baixa. Isto decorre do fato de o filtro passa baixa inevitavelmente transformar as bordas de subida e descida do pulso retangular de entrada em lentas variações com componentes oscilatórias superpostas (*ringing*). Portanto o *ringing* será inevitável na saída do Filtro de Transmissão $G(j\omega)$, e, à primeira vista, o filtro $G(j\omega)$ deterioraria o desempenho do sistema visto que resultaria na superposição de todos os símbolos $s(t)$ na saída do Filtro de Transmissão da Figura 5.1. No entanto, existe um tipo especial de filtro passa-baixa, denominado de Filtro *Raised Cosine* [Proakis] (nome recebido devido à definição analítica de sua função de transferência $G_{rc}(j\omega)$) cuja resposta ao impulso $g_{rc}(t)$ é oscilatória mas apresenta como característica peculiar o fato de que $g_{rc}(t-kT) - g_{rc}(t-(k\pm 1)T) = g_{rc}(t-kT)$ para $t = iT$, i inteiro. Ou seja, apesar da ocorrência de *ringing*, no instante de amostragem $t = iT$ todos os demais pulsos $g_{rc}(t \pm lT)$, $l \neq k$ apresentam valor zero, exceto o pulso $g_{rc}(t-kT)$ que apresenta o

valor máximo, conforme mostra a Figura 5.2. Portanto, não ocorre a superposição de símbolos na saída do modulador.

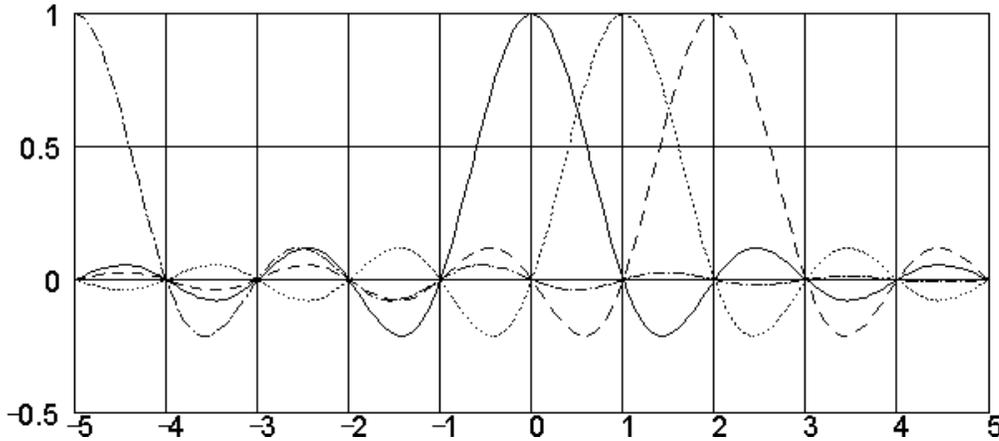


Figura 5.2: Filtro $g_{rc}(t)$ – resposta aos impulsos $\delta(t+5T)$, $\delta(t)$, $\delta(t-T)$ e $\delta(t-2T)$.

Nota: A função de transferência $G_{rc}(jf)$, $f = \omega/2\pi$, de um filtro *Raised Cosine* é analiticamente definida como [Proakis] :

$$G_{rc}(jf) = \begin{cases} T & \text{para } \left(0 \leq |f| \leq \frac{1-\alpha}{2T}\right) \\ \frac{T}{2} \left\{ 1 + \cos \left[\frac{\pi T}{\alpha} \left(|f| - \frac{1-\alpha}{2T} \right) \right] \right\} & \text{para } \left(\frac{1-\alpha}{2T} \leq |f| \leq \frac{1+\alpha}{2T} \right) \\ 0 & \text{para } |f| > \frac{1+\alpha}{2T} \end{cases}$$

onde $0 < \alpha \leq 1$ é denominado de fator de *rolloff* do filtro. Para $\alpha \rightarrow 0$ a curva de resposta em frequência do filtro *Raised Cosine* tende para a curva de resposta de um filtro passa-baixa retangular com frequência de corte $f_c = 1/2T$.

5.1 Constelações e Detecção ML

O alfabeto $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$ é o conjunto de símbolos que estão disponíveis para transmissão. Quanto maior for a demanda por volume de informação de um sistema, maior precisa ser o número de símbolos presentes no alfabeto de forma que uma maior complexidade de informação possa ser compensada por um "vocabulário" mais elaborado, capaz de representar um maior volume de informação dentro do mesmo intervalo de tempo. Ou seja, uma constelação mais densa permite que a velocidade de transmissão não seja reduzida pela maior entropia da informação, visto que o maior número de símbolos disponíveis compensa a necessidade de emitir muitos símbolos em seqüência (situação que ocorreria para uma constelação menos densa).

No entanto, uma constelação com maior número de símbolos forçosamente apresenta maior número de símbolos semelhantes entre si do que uma constelação mais simples, o que se torna um sério problema para o desempenho do sistema quando o canal é dispersivo, pois a mínima interferência entre os símbolos os tornará ininteligíveis sob o ponto de vista digital.

A interferência entre os símbolos, denominada ISI (*Inter Symbol Interference*), é a grandeza que mede o quanto os símbolos de um sistema de comunicações digitais se superpõem a outros símbolos, como decorrência da dispersão do canal. A superposição de símbolos ocorre como consequência da natureza dispersiva do canal de transmissão de qualquer sistema digital prático, dispersão esta que implica em a resposta impulsiva do canal assumir valores não nulos ao longo de vários intervalos amostrais. Se o canal for dispersivo, cada amostra recebida pelo receptor será uma soma ponderada das amostras passadas. Desta maneira, a dispersão de canal pode ser associada ao conceito de reverberação, já que o valor de cada amostra é interferido por “ecos” de amostras já ocorridas.

Como reverberação é um fenômeno natural e inevitável a todo e qualquer canal de comunicações prático, o problema precisa ser contornado através de sistemas compensadores de reverberação denominados Equalizadores. Os Equalizadores são usualmente colocados no receptor digital entre o demodulador e o decodificador de canal, de tal forma que a resposta impulsiva combinada do Equalizador em série com o canal anule a dispersão do canal. O próximo capítulo desta apostila versará sobre a equalização de canais de comunicações.

Na saída do demodulador no receptor digital, um quantizador é utilizado para estimar o símbolo originalmente transmitido. A entrada do quantizador é um sinal discreto no tempo, com intervalo T entre amostras (símbolos). Quando não há ISI, cada amostra de entrada do quantizador é igual ao símbolo transmitido mas corrompido por ruído aditivo estatisticamente independente da seqüência de símbolos.

Um alfabeto complexo é melhor descrito se plotado como um conjunto de pontos em um plano complexo, quando, então, justifica-se a denominação de constelação do sinal. Duas constelações populares na transmissão em banda passante PAM são ilustradas nos exemplos 5.1 e 5.2 apresentados a seguir.

Exemplo 5.1

A constelação 4-PSK consiste de quatro símbolos de magnitude b , cada um deles com fase diferente, conforme mostrado na Figura 5.3.

Os símbolos podem ser escritos como

$$A_m = be^{j\phi_m} \quad (5.3)$$

e o sinal transmitido pode ser escrito como

$$X(t) = b\sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \cos(\omega_c t + \phi_m(kT))g(t - kT) \quad (5.4)$$

onde $\phi_m(kT)$ pode assumir valores do conjunto $(0, \pi/2, \pi, 3\pi/2)$. A informação é transportada na fase da portadora e a amplitude da portadora é constante, daí o nome *Phase-Shift Keying* (PSK). A constelação 4-PSK é também chamada *Quadrature Phase-Shift Keying* (QPSK).

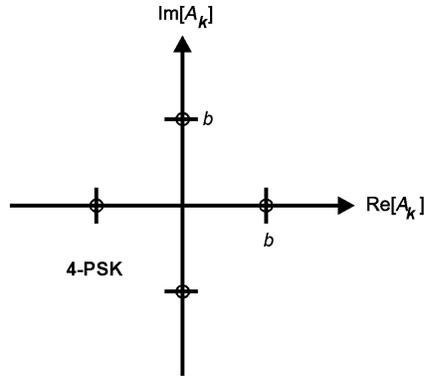


Figura 5.3 - Constelação 4-PSK. A constante b determina a potência do sinal transmitido. Cada símbolo 4-PSK transmitido envia 2 bits através do canal.

Exemplo 5.2

A constelação 16-QAM mostrada na Figura 5.4 apresenta 12 possíveis fases e 3 possíveis amplitudes. Devido à natureza retangular da constelação, o sistema de coordenadas retangulares é preferível ao sistema de coordenadas polares que são naturais no PSK de quatro fases.

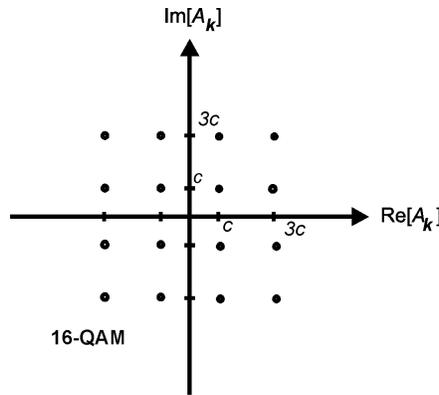


Figura 5.4 - Constelação 16-QAM. A constante c determina a potência do sinal transmitido. Cada símbolo 16-QAM transmitido envia 4 bits através do canal.

Devido ao ruído aditivo, as amostras recebidas na entrada do quantizador em geral não correspondem exatamente aos pontos na constelação de sinal. No entanto, se a potência do ruído é pequena comparada à potência do sinal, se observa uma alta probabilidade de as amostras estarem próximas aos pontos da constelação. Assim, as amostras recebidas formam uma nuvem Gaussiana ao redor dos pontos da constelação, conforme mostra a Figura 5.5. Esta figura é similar ao que veríamos no osciloscópio se olhássemos o sinal na entrada do quantizador, com o eixo horizontal sendo a parte real e o eixo vertical sendo a parte imaginária.

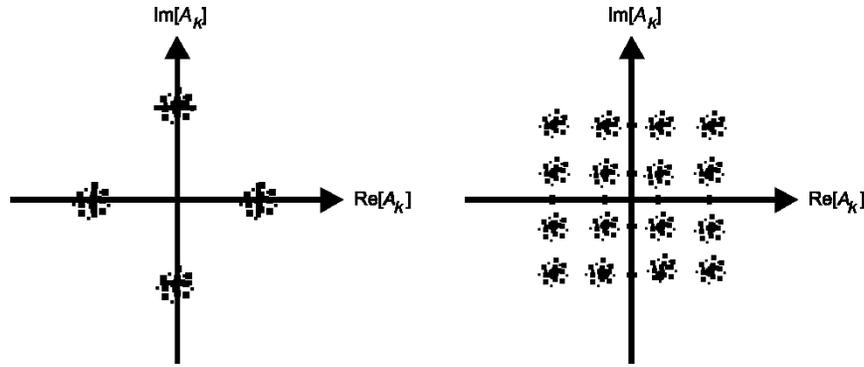


Figura 5.5 - As amostras recebidas são corrompidas por ruído Gaussiano aditivo e formam uma nuvem Gaussiana ao redor dos pontos na constelação de símbolos.

A função do quantizador é simplesmente selecionar o símbolo a_m na constelação $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{M-1}\}$ que esteja mais próximo à amostra recebida Q_k . Tanto para símbolos complexos quanto para símbolos reais, o quantizador – também chamado detector de máxima verossimilhança (detector ML: *Maximum Likelihood*) – seleciona o símbolo a_m no alfabeto A que minimiza a distância Euclidiana $|Q_k - a_m|$ entre Q_k e a_m . Quando o alfabeto é complexo é conveniente utilizar o quadrado da distância Euclidiana $|Q_k - a_m|^2$ por simplificar as operações envolvidas.

O plano complexo pode, portanto, ser dividido em regiões de decisão onde cada região de decisão é o conjunto de pontos que está mais próximo a algum símbolo. As regiões de decisão para as constelações nas Figuras 5.3 e 5.4 são mostradas na Figura 5.6.

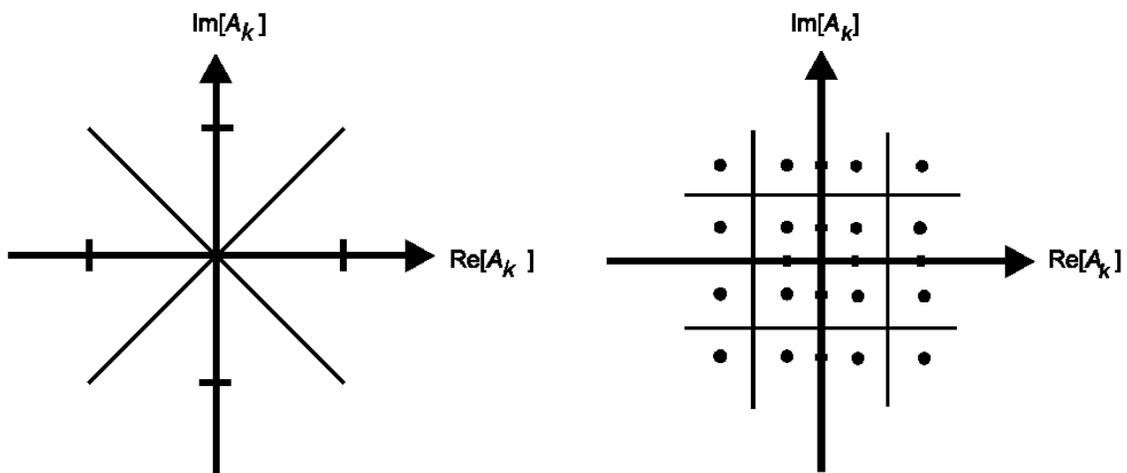


Figura 5.6- Regiões de decisão sob a ótica do detector ML para as constelações mostradas nas Figuras 5.3 e 5.4.

5.2 Probabilidade de Erro

A probabilidade de erro é uma medida razoável de desempenho para um sistema de comunicações digital. A probabilidade de erro de símbolo é uma medida fácil de determinar a partir das propriedades do sistema e, para o detector ML, é simplesmente a probabilidade de que a amostra recebida esteja próxima a um símbolo que não seja o símbolo que foi efetivamente transmitido.

Considere dois símbolos complexos do alfabeto, a_j e a_i . Seja a_j o símbolo transmitido no instante k e seja a amostra recebida $Q_k = a_j + Z_k$, onde Z_k é uma variável Gaussiana aleatória complexa que representa o ruído do canal, de média zero, com partes real e imaginária independentes, cada uma com variância σ^2 .

Será mostrado a seguir que a probabilidade P_r de que a amostra recebida Q_k esteja mais próxima a a_i do que a a_j , tendo sido transmitido a_j , é

$$P_r[\text{quantizador escolher } a_i \text{ quando } a_j \text{ é transmitido}] = Q(d/2\sigma) \quad (5.5)$$

onde d é a distância Euclidiana $|a_j - a_i|$ entre a_i e a_j , e onde $Q(x)$ pode ser descrita como a área sob a curva de distribuição Gaussiana de uma variável aleatória X para valores de X tal que $X > x$. Especificamente, $Q(x)$ é dado por $Q(x) = (1/2)\text{erfc}(x/\sqrt{2})$, onde $\text{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-u^2} du$ é a denominada Função Erro Complementar. A tabela a seguir tabula alguns valores de $\text{erfc}(u)$.

u	$\text{erfc}(u)$	u	$\text{erfc}(u)$
0.0	1.0	2.2	1.86×10^{-3}
0.2	0.777	2.4	6.9×10^{-4}
0.4	0.572	2.6	2.4×10^{-4}
0.6	0.396	2.8	7.5×10^{-5}
0.8	0.258	3.0	2.2×10^{-5}
1.0	0.157	3.3	3.06×10^{-6}
1.2	8.97×10^{-2}	3.7	1.67×10^{-7}
1.4	4.77×10^{-2}	4.0	1.54×10^{-8}
1.6	2.37×10^{-2}	5.0	1.54×10^{-12}
1.8	1.09×10^{-2}		
2.0	4.38×10^{-3}		

Observe que a Equação (5.5) não expressa a probabilidade de erro em si. Esta equação apenas define a probabilidade de o quantizador preferir o símbolo a_i ao símbolo efetivamente transmitido. A Equação (5.5) expressa a probabilidade de erro apenas no caso em que há apenas dois símbolos no alfabeto. Quando existem mais de dois símbolos no alfabeto é necessário alguma inferência adicional para que se determine a probabilidade de erro.

Para provar que $Q(d/2\sigma)$ é a probabilidade de que o quantizador prefira a_i a a_j (assumindo que a_j seja transmitido), observe que esta situação ocorrerá se e somente se

$$|Q_k - a_i|^2 < |Q_k - a_j|^2 \quad (5.6)$$

ou, já que $Q_k = a_j + Z_k$,

$$|a_j - a_i + Z_k|^2 < |Z_k|^2 \quad (5.7)$$

Como a_j , a_i e Z_k são entidades complexas, podemos escrever

$$(a_j - a_i + Z_k)(a_j - a_i + Z_k)^* < |Z_k|^2 \quad (5.8)$$

ou ainda,

$$[(a_j - a_i) + Z_k][(a_j - a_i)^* + Z_k^*]^2 < |Z_k|^2 \quad (5.9)$$

Distribuindo o produto à esquerda da desigualdade,

$$(a_j - a_i)(a_j - a_i)^* + (a_j - a_i)Z_k^* + (a_j - a_i)^*Z_k + Z_kZ_k^* < |Z_k|^2 \quad (5.10)$$

que pode ser escrito como

$$|a_j - a_i|^2 + (a_j - a_i)Z_k^* + (a_j - a_i)^*Z_k + |Z_k|^2 < |Z_k|^2 \quad (5.11)$$

Por simplificação, em (5.11) fazamos

$$(a_j - a_i) = W_0; \quad (5.12)$$

$$Z_k^* = W_1^*;$$

$$(a_j - a_i)^* = W_0^* \text{ e}$$

$$Z_k = W_1.$$

Considerando que

$$W_0 = A_0 + jB_0; \quad (5.13)$$

$$W_1 = A_1 + jB_1$$

podemos escrever

$$\begin{aligned} W_0W_1^* + W_0^*W_1 &= (A_0 + jB_0)(A_1 - jB_1) + (A_0 - jB_0)(A_1 + jB_1) = \\ &= A_0A_1 - jA_0B_1 + jB_0A_1 + B_0B_1 + A_0A_1 + jA_0B_1 - jB_0A_1 + B_0B_1 = \\ &= 2A_0A_1 + 2B_0B_1 = 2 \operatorname{Re}\{W_0W_1^*\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Então, a partir de (5.14) podemos reescrever (5.11) como

$$|a_j - a_i|^2 + 2 \operatorname{Re}\{(a_j - a_i)Z_k^*\} < 0 \quad (5.15)$$

Observe que

$$|a_j - a_i| = |a_i - a_j| = \sqrt{(\text{Re}\{(a_i - a_j)\})^2 + (\text{Im}\{(a_i - a_j)\})^2} = d \quad (5.16)$$

onde d é a distância Euclidiana entre $a_i - a_j$. Assim, a partir de (5.16), a Equação (5.15) pode ser escrita como

$$\text{Re}\{(a_j - a_i)Z_k^*\} < \frac{-d^2}{2} \quad (5.17)$$

Lembrando que, conforme definimos anteriormente,

$$(a_j - a_i) = W_0 \quad \text{e} \quad Z_k^* = W_1^* \quad (5.18)$$

Mas

$$\begin{aligned} W_0 W_1^* &= (A_0 + jB_0)(A_1 + jB_1) = A_0 A_1 - jA_0 B_1 + jB_0 A_1 + B_0 B_1 = \\ &= A_0 A_1 + B_0 B_1 + j(B_0 A_1 - A_0 B_1) \end{aligned} \quad (5.19)$$

e, por comparação de (5.18) e (5.19),

$$\text{Re}\{(a_j - a_i)\} = A_0; \quad \text{Re}\{Z_k\} = A_1; \quad \text{Im}\{(a_j - a_i)\} = B_0 \quad \text{e} \quad \text{Im}\{Z_k\} = B_1, \quad (5.20)$$

então o termo da esquerda em (5.17) pode ser escrita como

$$\text{Re}\{(a_j - a_i)Z_k^*\} = \text{Re}\{(a_j - a_i)\}\text{Re}\{Z_k\} + \text{Im}\{(a_j - a_i)\}\text{Im}\{Z_k\} \quad (5.21)$$

Daí, de (5.17) e (5.21), o quantizador escolhe a_i ao invés de a_j (tendo sido transmitido a_j) quando

$$\text{Re}\{(a_j - a_i)\}\text{Re}\{Z_k\} + \text{Im}\{(a_j - a_i)\}\text{Im}\{Z_k\} < -\frac{d^2}{2} \quad (5.22)$$

Ou seja, o quantizador escolhe a_i ao invés de a_j (tendo sido transmitido a_j) quando

$U > \frac{d^2}{2}$, sendo

$$U = \text{Re}\{a_i - a_j\}\text{Re}\{Z_k\} + \text{Im}\{a_i - a_j\}\text{Im}\{Z_k\} \quad (5.23)$$

A Equação (5.23) pode ser vista como uma combinação linear de variáveis aleatórias Gaussianas independentes $\text{Re}\{Z_k\}$ e $\text{Im}\{Z_k\}$, de média zero, em que

$$\operatorname{Re}\{a_i - a_j\} \rightarrow \text{Coeficiente } \alpha_0 \text{ da combinação linear;} \quad (5.24)$$

$$\operatorname{Re}\{Z_k\} \rightarrow \text{variável aleatória com distribuição Gaussiana, de variância } \sigma^2; \quad (5.25)$$

$$\operatorname{Im}\{a_i - a_j\} \rightarrow \text{Coeficiente } \alpha_1 \text{ da combinação linear e} \quad (5.26)$$

$$\operatorname{Im}\{Z_k\} \rightarrow \text{variável aleatória com distribuição Gaussiana, de variância } \sigma^2. \quad (5.27)$$

Mas, como corolário do Teorema do Limite Central [Papoulis], para toda e qualquer combinação linear U de N variáveis aleatórias X_i Gaussianas de média $E\{X_i\} = \mu_{X_i} = \mu = 0$ e variância $E\{(X_i - \mu_{X_i})^2\} = \sigma_{X_i}^2 = \sigma_X^2$; $i = 0, 1, \dots, N-1$, isto é, para

$$U = \alpha_0 X_0 + \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_{N-1} X_{N-1} \quad (5.28)$$

demonstra-se que [Shanmugan][Papoulis] U é Gaussiana de variância σ_U^2 dada por:

$$\sigma_U^2 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \dots + \alpha_N^2) \sigma_X^2 \quad (5.29)$$

Ainda, a probabilidade de uma variável aleatória Gaussiana U de média μ_U e variância σ_U^2 ser maior do que u é dada por [Taub][Papoulis]

$$P(U > u) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{(u - \mu_U)}{\sqrt{2\sigma_U^2}} \right], \quad (5.30)$$

$$\operatorname{erfc}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{\infty} e^{-u^2} du$$

Daí, a probabilidade de o quantizador escolher a_i ao invés de a_j (tendo sido transmitido a_j), i.e., a probabilidade de U ser maior do que $(d^2/2)$ é obtida por

$$P\left(U > \frac{d^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left[\frac{d^2/2}{\sqrt{2\sigma_U^2}} \right] \quad (5.31)$$

onde, de (5.29),

$$\sigma_U^2 = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2) \sigma_X^2 = \left[(\operatorname{Re}\{a_i - a_j\})^2 + (\operatorname{Im}\{a_i - a_j\})^2 \right] \sigma^2 = d^2 \sigma^2 \quad (5.32)$$

substituindo $\sigma_U^2 = d^2 \sigma^2$ em (5.31) teremos,

$$P\left(U > \frac{d^2}{2}\right) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{d^2/2}{\sqrt{2d^2\sigma^2}}\right] = \frac{1}{2} \operatorname{erfc}\left[\frac{d}{2\sqrt{2}\sigma}\right] = Q\left(\frac{d}{2\sigma}\right) \quad (5.33)$$

Assim, (5.33) define a probabilidade de o quantizador escolher a_i ao invés de a_j tendo sido transmitido a_j . Este resultado será utilizado para analisar constelações específicas.

Exemplo 5.3

Considere a constelação de símbolos binária mostrada na Figura 5.7, correspondendo ao sistema PAM binário em banda-base:

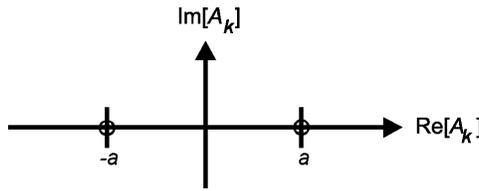


Figura 5.7 - Constelação binária, sistema PAM em banda-base.

Esta constelação é chamada antipodal binária e pode ser usada tanto para sistemas em banda passante quanto para sistemas em banda-base. A distância entre os símbolos é $d = 2a$, e a probabilidade de erro de símbolo, dado que o símbolo $A_k = -a$ seja transmitido no instante k é

$$\Pr[\text{erro de símbolo no instante } k \mid A_k = -a] = Q(d/2\sigma) = Q(a/\sigma) \quad (5.34)$$

A probabilidade de erro é a mesma se $+a$ é transmitido, então a probabilidade não condicionada (não condicionada no sentido de ser independente da ocorrência de $A_k = -a$) é a mesma, isto é,

$$\Pr[\text{erro de símbolo no instante } k] = Q(a/\sigma) \quad (5.35)$$

Como (5.35) é válida para qualquer instante de tempo k , então a probabilidade de erro de símbolo é

$$\Pr[\text{erro de símbolo}] = Q(a/\sigma) \quad (5.36)$$

Exemplo 5.4

Considere a constelação multi-níveis de uma dimensão mostrada na Figura 5.8:

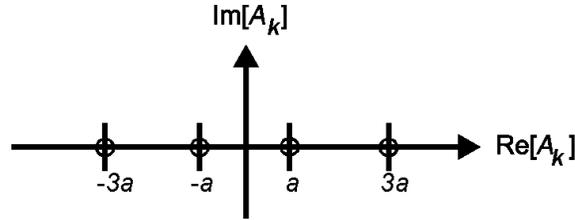


Figura 5.8 - Constelação multi-níveis de uma dimensão.

Se o símbolo transmitido no instante k é $A_k = -a$, então a função de distribuição de probabilidade de Q_k (Q_k sendo a amostra recebida), é mostrada na figura seguinte:

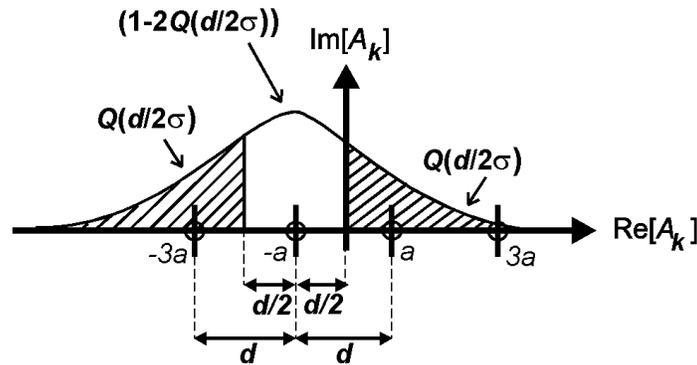


Figura 5.9 - p.d.f. de Q_k quando o símbolo transmitido é $A_k = -a$.

A probabilidade de que a amostra recebida Q_k esteja mais próxima a um símbolo que não seja $-a$ é igual à área das regiões sombreadas. Cada uma das regiões sombreadas tem área $Q(d/2\sigma)$, então

$$\Pr[\text{erro de símbolo no instante } k \mid A_k = \pm a] = 2Q(d/2\sigma) \quad (5.37)$$

Por outro lado, quando o símbolo transmitido é $A_k = -3a$ ou $A_k = 3a$ obtém-se por análise semelhante (Gaussiana estará centrada em $-3a$ ou $3a$)

$$\Pr[\text{erro de símbolo no instante } k \mid A_k = \pm 3a] = Q(d/2\sigma) \quad (5.38)$$

Então, se os símbolos são igualmente prováveis em todos os instantes de tempo e independentes, então, somando (5.37) com (5.38) e dividindo por 2 temos que

$$\Pr[\text{erro de símbolo}] = 1.5Q(d/2\sigma) \quad (5.39)$$

Exemplo 5.5

Para a constelação 4-PSK da Figura 5.3, o símbolo $-b$ pode ser tomado por qualquer dos outros três, caso o ruído seja suficientemente grande. Denotando o símbolo

transmitido por A_k , o sinal recebido por $Q_k = A_k + Z_k$ e, por conveniência matemática rotacionando as coordenadas de 45° , definimos

$$Q'_k = Q_k e^{j\pi/4} = A_k e^{j\pi/4} + Z_k e^{j\pi/4} \quad (5.40)$$

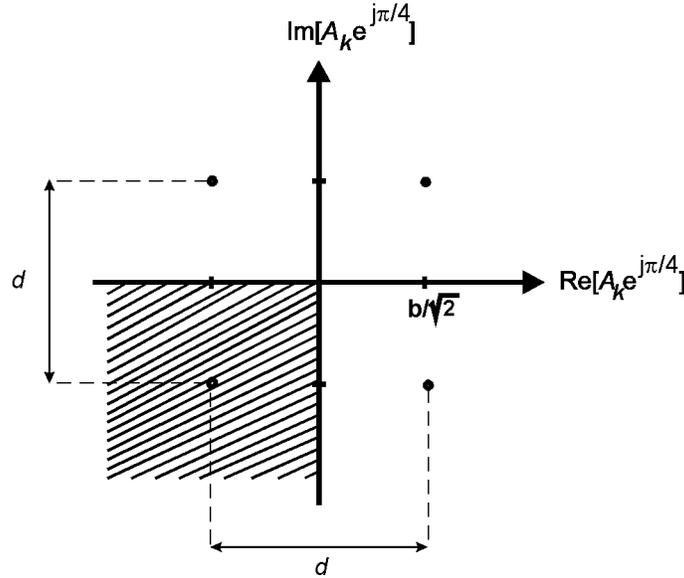


Figura 5.10- Versão rotacionada da constelação 4-PSK da Figura 5.3.

A constelação rotacionada, mostrada na Figura 5.10, define os possíveis valores para $A_k e^{j\pi/4}$. Se $A_k = -b$, então,

$$A_k e^{j\pi/4} = -\frac{b}{\sqrt{2}} - j \frac{b}{\sqrt{2}} \quad (5.41)$$

Para uma decisão correta, Q'_k deve estar dentro da região sombreada na Figura 5.10. A estatística do ruído rotacionado é a mesma do ruído não rotacionado. Se Z_k é ruído Gaussiano complexo com partes real e imaginária, cada uma com variância σ^2 , então

$$M_k = Z_k e^{j\pi/4} \quad (5.42)$$

é também ruído Gaussiano complexo com parte real e imaginária, cada uma com variância σ^2 . A probabilidade de Q'_k estar dentro da região sombreada é, então,

$$\begin{aligned} \Pr[\text{decisão correta}|A_k] &= \Pr[\text{Re}\{M_k\} < d/2, \text{Im}\{M_k\} < d/2] = \\ &= \Pr[\text{Re}\{M_k\} < d/2] \Pr[\text{Im}\{M_k\} < d/2] = \\ &= (1 - Q(d/2\sigma))^2 = 1 - 2Q(d/2\sigma) + Q^2(d/2\sigma) \end{aligned} \quad (5.43)$$

onde $d = b\sqrt{2}$ é a distância entre os símbolos. A probabilidade de um erro de símbolo é simplesmente

$$\begin{aligned} \Pr[\text{erro de símbolo} | A_k] &= 1 - \Pr[\text{decisão correta} | A_k] = \\ &= 2Q(d/2\sigma) - Q^2(d/2\sigma) \end{aligned} \quad (5.44)$$

A probabilidade de erro é a mesma para qualquer símbolo transmitido, então, a probabilidade total de erro $\Pr[\text{erro de símbolo}]$ é a mesma probabilidade condicional de erro $\Pr[\text{erro de símbolo} | A_k]$.

É comum fazer a aproximação de que o ruído é pequeno o suficiente (a relação sinal/ruído é grande suficiente) para que $Q(d/2\sigma)$ seja pequeno. Neste caso (5.44) pode ser aproximada por

$$\Pr[\text{erro de símbolo}] = 2Q(d/2\sigma) \quad (5.45)$$

Esta aproximação é razoável, porque a comunicação é útil apenas se a probabilidade de erro é pequena (relação sinal/ruído alta), quando $Q^2(d/2\sigma)$ é pequeno se comparado a $Q(d/2\sigma)$.

Exemplo 5.6

A probabilidade de erro para a constelação 16-QAM na Figura 5.4 pode ser encontrada por um método similar. Considere os quatro pontos internos. As regiões de decisão para estes pontos são quadrados com lados de dimensão igual a d (distância entre os símbolos). Neste caso, a probabilidade de uma decisão correta é

$$\Pr[\text{decisão correta} | A_k \text{ esteja dentro do quadrado}] = (1 - 2Q(d/2\sigma))^2 \quad (5.46)$$

tal que a probabilidade de erro é

$$\Pr[\text{erro} | A_k \text{ esteja dentro do quadrado}] = 4Q(d/2\sigma) - 4Q^2(d/2\sigma) = 4Q(d/2\sigma) \quad (5.47)$$

A probabilidade de erro dos símbolos do canto é similar à probabilidade de erro para o sinal 4-PSK,

$$\Pr[\text{erro} | A_k \text{ esteja no canto}] \approx 2Q(d/2\sigma) \quad (5.48)$$

e pode ser mostrado que

$$\Pr[\text{erro} | A_k \text{ não esteja dentro ou no canto}] \approx 3Q(d/2\sigma) \quad (5.49)$$

Para cada símbolo, o fator na frente de $Q(\cdot)$ é o número dos vizinhos mais próximos. Isto é geralmente verdade para constelações regulares. Assumindo que os símbolos são igualmente prováveis, a probabilidade total de erro é

$$\Pr[\text{erro}] \approx \frac{4}{16} \times 4Q(d/2\sigma) + \frac{8}{16} \times 3Q(d/2\sigma) + \frac{4}{16} \times 2Q(d/2\sigma) = 3Q(d/2\sigma) \quad (5.50)$$

Para constelações retangulares de duas dimensões, à medida que o tamanho do alfabeto aumenta, uma maior porcentagem de pontos será incluída, e a probabilidade de erro irá tender a

$$\Pr[\text{erro de símbolo}] \rightarrow 4Q(d/2\sigma) - 4Q^2(d/2\sigma) \quad (5.51)$$

assumindo que todos os símbolos sejam igualmente prováveis.

5.3 O Receptor Correlator e o Receptor Filtro Casado

O sinal $x(t) = \sqrt{2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} c_m(kT) \cos(\omega_c t + \theta_m(kT)) g(t - kT)$ gerado no modulador do transmissor digital (Equação (5.2)) é enviado através do canal e é recebido no receptor. O primeiro passo para a demodulação de $x(t)$ no receptor consiste na multiplicação de $x(t)$ por um sinal $\cos(\omega_c t)$ gerado no **oscilador local** do receptor. Esta operação de **conversão de frequência** objetiva transladar o espectro de $x(t)$ de um valor ω_c , de modo que o espectro do sinal resultante representa o sinal PAM em banda-base. O sinal PAM assim recuperado pelo processo de conversão de frequência pode ser expresso por

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_m(kT) g(t - kT) \quad (5.52)$$

onde $a_m = c_m e^{j\theta_m}$ representa um dos M símbolos do alfabeto A e $g(t)$ representa a resposta ao impulso do Filtro de Transmissão da Figura 5.1. Observe que a obtenção de (5.52) exige que a diferença de frequência $\Delta\omega$ entre a frequência da portadora do sinal modulado $x(t)$ e a frequência do oscilador local $\cos(\omega_c t)$ seja nula, caso contrário $S(t)$ resultará multiplicada por $\cos(\Delta\omega t)$, inviabilizando a demodulação do símbolo transmitido. Isto é conseguido através do sistema de **sincronismo de portadora**, em geral constituído por um PLL (*phase locked loop*) que amarra a frequência da portadora com a frequência do oscilador local. Ainda, note que (5.52) também exige que o instante de amostragem kT seja idêntico ao instante de amostragem correspondente no transmissor, caso contrário o pulso $g(t - kT - \tau)$ ocorrerá deslocado no tempo de $\tau \neq 0$ com relação ao símbolo $a_m(kT)$. Isto é conseguido através do sistema de **sincronismo de símbolo**, em geral também constituído por um PLL (*phase locked loop*) que amarra a fase do sinal recebido $S(t)$ com a a fase do *clock* do receptor.

O sinal $S(t)$ dado por (5.52) pode ser interpretado como uma seqüência de pulsos $g_m(t)$ superpostos, cada um deles resultante do produto $a_m(kT)g(t-kT)$ no instante $t = kT$. Por simplicidade consideremos a recepção de um pulso isolado, ou em outras palavras, que a transmissão inteira consista de $g_m(t)$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Vamos assumir que o sinal recebido $R(t)$ não seja distorcido, mas apenas corrompido por ruído Gaussiano,

$$R(t) = g_m(t) + N(t) \quad (5.53)$$

É possível demonstrar que [Taub] o demodulador ótimo em presença de ruído Gaussiano aditivo é o denominado **Receptor Correlator**, mostrado na Figura 5.11:

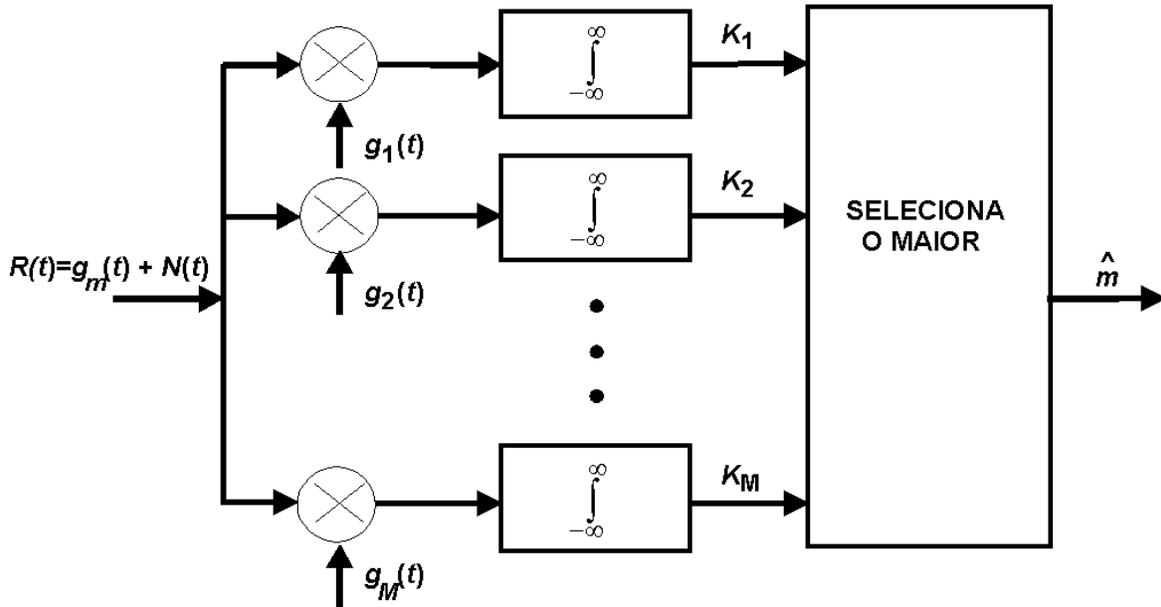


Figura 5.11 - Receptor Correlator para um pulso isolado em transmissão multi-pulso.

O receptor correlator discrimina entre os possíveis pulsos transmitidos através da computação da correlação entre cada pulso $g_i(t)$ no conjunto de M possíveis pulsos e o sinal recebido,

$$K_i = \int_{-\infty}^{\infty} R(t)g_i(t)dt \quad (5.54)$$

Aquele i para o qual K_i é o maior é, intuitivamente, uma estimativa razoável de m , e, de fato, pela desigualdade de Schwartz,

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty} g_m(t)g_i(t)dt \right]^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} g_m^2(t)dt \int_{-\infty}^{\infty} g_i^2(t)dt \quad (5.55)$$

com igualdade se e somente se $m = i$. Então, a componente do sinal após correlação será a maior em magnitude mostrada na Figura 5.11 para o correlator que, de fato, corresponde ao sinal, e o receptor atua adequadamente na ausência de ruído.

O receptor correlator é de fato ótimo no sentido da máxima verossimilhança (ML) para um pulso isolado. Se não há interferência intersimbólica, ou se a interferência intersimbólica puder ser cancelada, então o receptor correlator de pulso isolado é também um receptor ML para uma seqüência de pulsos, não apenas para um pulso isolado.

Observe que o receptor correlator minimiza o efeito do ruído do canal na medida em que ruído é, em geral, um sinal que não apresenta correlação com qualquer outro sinal exceto com ele mesmo e o correlator definido por (5.54) justamente amplifica sinais que apresentam correlação com o pulso $g_i(t)$.

O receptor correlator pode ser implementado como um conjunto de filtros casados. Se definirmos

$$h_i(t) = g_i(-t) \quad (5.56)$$

e observarmos que

$$K_i = [h_i(t) * R(t)]_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} R(\tau) h_i(-\tau) d\tau, \quad (5.57)$$

então, as correlações K_i podem ser computadas através da amostragem da saída de um filtro com resposta ao impulso igual ao pulso $g_i(t)$ invertido no tempo. Um receptor do tipo filtro casado é mostrado na Figura 5.12.

Na prática, existe a necessidade de detecção de seqüências de pulsos, ao invés de apenas pulsos isolados (Decodificador de Viterbi). Sem qualquer processamento adicional, a operação apenas será ótima se a amostragem a cada T segundos não resultar em interferência intersimbólica.

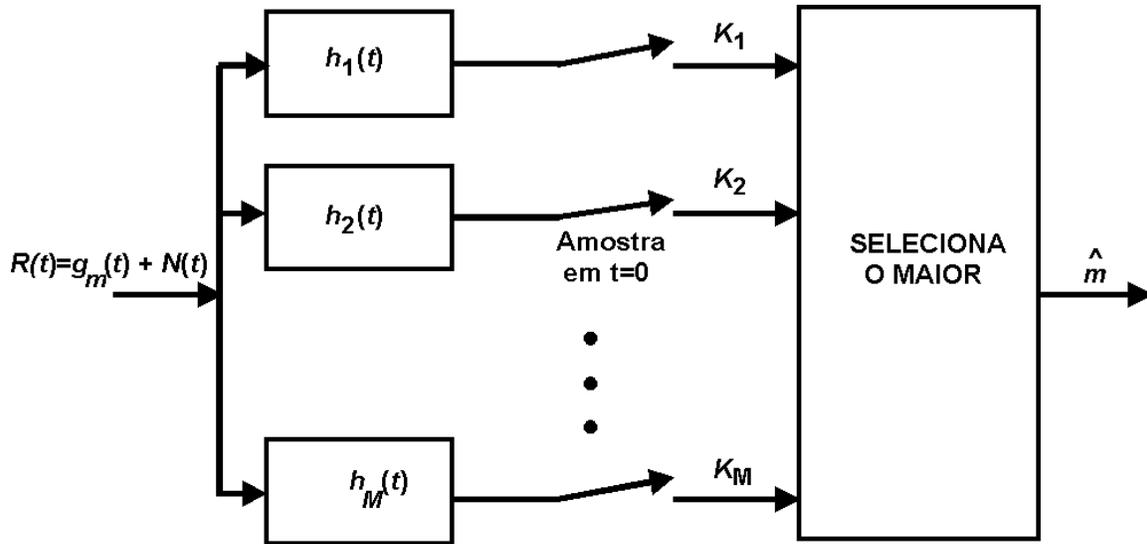


Figura 5.12 - Receptor Filtro Casado para um pulso isolado em transmissão multi-pulso. Na situação de recepção de uma seqüência de pulsos, as amostras são tomadas a intervalos T a partir de $t = 0$.

5.4 Referências Bibliográficas

- [Proakis] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995.
- [Shanmugan] K. S. Shanmugan and A. M. Breipohl, *Random Signals: Detection, Estimation and Data Analysis*, John Wiley and Sons, 1988.
- [Papoulis] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1965.
- [Taub] H. Taub and D.L. Schilling, *Principles of Communications Systems*, McGraw-Hill, 1986.