

Capítulo VI

Interferência Intersimbólica e

Equalização de Canal

Um dos maiores (senão o maior!) obstáculos para a confiabilidade de comunicações digitais é a interferência entre símbolos (ISI – *Inter-Symbol Interference*), inerentemente presente em todos os canais dispersivos, classe à que pertence a grande maioria dos canais de transmissão práticos. É imperativa, portanto, a desconvolução do canal no receptor, sob ruído, com o objetivo de equalizá-lo (ver *Interferência Intersimbólica - Introdução* disponível para *download* em <http://www.ee.pucrs.br/~decastro/download.html>).

A informação a ser transmitida é enviada através de um canal dispersivo C , resultando em ISI no sinal recebido $u(n)$, onde n é um número inteiro. Representando a seqüência de símbolos $s(n)$ originados no transmissor digital, a cada instante nT , o transmissor envia o símbolo $s(nT) \in A$ através de C , sendo $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ o alfabeto da informação a ser transmitida, constituído por M possíveis símbolos, e T o intervalo de amostragem dos símbolos ou intervalo de *Baud*. Conectado ao transmissor através do canal C , o receptor deverá ser capaz de identificar a quais símbolos do alfabeto A pertencem as amostras do sinal recebido $u(n)$, de acordo com a seqüência originalmente transmitida $s(n)$.

A **dispersão de um canal** é medida pelo **intervalo de L_c amostras não nulas que resultam em resposta a uma excitação impulsiva imposta ao canal**. A existência da ISI no sinal recebido, resultante da dispersão de C , é observada através do fato de $u(n)$ assumir inúmeros valores tal que $u(n) \notin A$, mesmo sob ausência total de ruído. Portanto, ao transmitir $s(n)$ através de C , $u(n) \notin A$ como conseqüência da convolução da fonte original $s(n)$ com a resposta ao impulso $c(n)$ de C . Cada elemento da seqüência recebida $u(n)$ consiste em uma soma ponderada de todos os elementos prévios de $s(n)$, com ponderação determinada por $c(n)$. Sob o ponto de vista humano-acústico, a ISI pode ser percebida ao se estabelecer diálogo em um ambiente fechado com paredes de material reflexivo, como rocha polida. A reverberação acústica – ou ISI – pode atingir tal nível de incômodo a ponto de não se compreender as palavras (símbolos) do interlocutor.

Uma solução para a distorção causada pela superposição de símbolos recebidos é adicionar ao receptor um sistema capaz de compensar ou reduzir a ISI no sinal proveniente do canal. Tal sistema compensador é denominado de **equalizador**. Como a operação geradora de ISI é uma convolução, o equalizador deve realizar a operação inversa, a desconvolução [Haykin2]. Em conseqüência, um equalizador é considerado eficaz em

atender ao objetivo a que se destina, se a convolução da resposta ao impulso do canal $c(n)$ com a resposta ao impulso do equalizador $f(n)$ resultar em uma resposta impulsiva conjunta $h(n)$ definida por um único impulso $\delta(n-d)$ em algum instante d . A resposta $\delta(n-d)$ caracteriza uma resposta impulsiva conjunta sem nenhuma dispersão. No domínio frequência z , esta situação é expressa por

$$H(z) = C(z)F(z) = z^{-d} \quad (6.1)$$

É amplamente aceito, tendo sido sugerido por Bello em [Bello], que um canal dispersivo, ou multi-percurso, pode ser modelado através de uma função de transferência $C(z)$ do tipo FIR [Strum]. Assim, de (6.1), a função $F(z)$ do equalizador deve realizar, a menos do termo z^{-d} que define o atraso d da resposta conjunta $\delta(n-d)$ desejada, a inversa de $C(z)$. De fato, se $d = 0$, $F(z)$ realiza exatamente $C^{-1}(z)$. A Figura 6.1 mostra o diagrama de blocos simplificado resultante do sistema no domínio frequência z , onde $Y(z) = Z\{y(n)\}$ é a resposta à excitação $S(z) = Z\{s(n)\}$ e $U(z) = Z\{u(n)\}$ é a seqüência recebida $u(n)$ no domínio z , sendo $Z\{\cdot\}$ o operador Transformada Z [Strum].

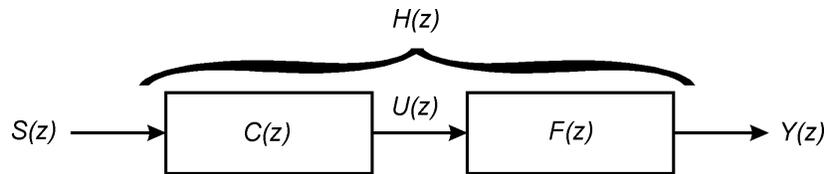


Figura 6.1: Modelo do canal e equalizador no domínio frequência.

No domínio tempo, a remoção de ISI efetuada por um equalizador de canal pode ser melhor compreendida através do exemplo mostrado na Figura 6.2. A Figura 6.2a mostra o alfabeto A, ou constelação, dos símbolos complexos referentes a uma fonte $s(n)$ cuja modulação (ou sinalização) é 256-QAM (QAM – *Quadrature Amplitude Modulation*) com variância unitária [Proakis]. $N_a = 50000$ símbolos do alfabeto A da fonte de informação $s(n)$, gerados seqüencialmente com probabilidade uniforme, são enviados através do canal C, caracterizado por dimensão de dispersão $L_c = 128$, cujo $|c(n)|$ é mostrado na Figura 6.2d, resultando no conjunto de N_a amostras u recebidas mostrado na Figura 6.2b. Ao ser submetido ao equalizador, o conjunto de amostras u transforma-se no conjunto de amostras equalizadas y mostradas na Figura 6.2c, próximo, portanto, da constelação original mostrada na Figura 6.2a. A resposta impulsiva conjunta $h(n)$ do equalizador e canal é mostrada na Figura 6.2e, resultando em $h(n) \approx \delta(n-64)$, onde $\delta(n)$ é a função impulso unitário discreta. Sempre que $h(n) \rightarrow \delta(n-d)$ diz-se que o equalizador atingiu a condição (ou situação) ZF (*zero forcing*), quando então, $ISI \rightarrow 0$ [Proakis][Haykin2]. Esta situação também é conhecida como condição de “olho completamente aberto”, devido ao sinal equalizado $y(t)$ assemelhar-se a um olho aberto na tela de um osciloscópio quando o alfabeto A é constituído por símbolos reais (não complexos).

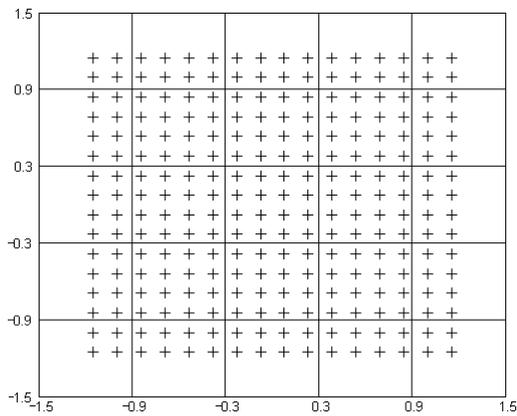


Fig. 6.1a: Constelação 256-QAM.

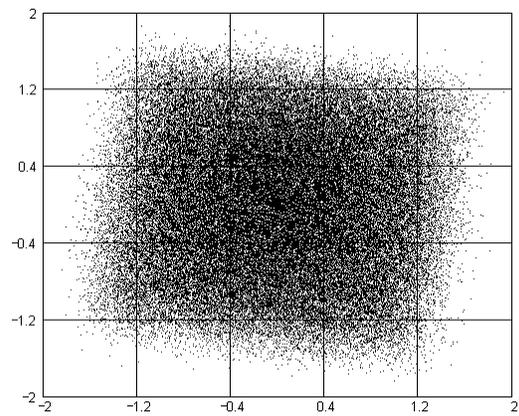


Fig. 6.2b: Conjunto u na entrada do equalizador.

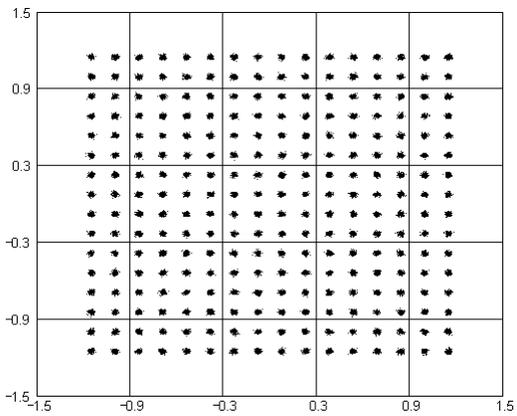


Fig. 6.2c: Conjunto y na saída do equalizador.

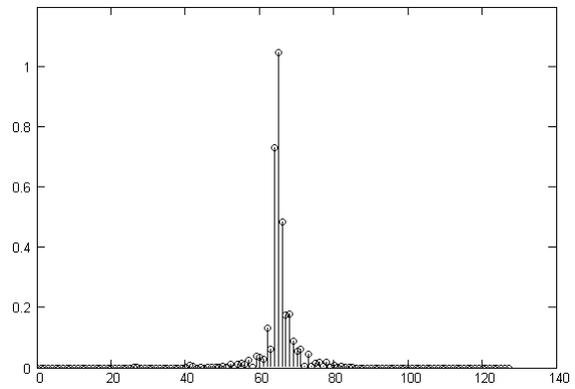


Fig. 6.2d: Resposta impulsiva $|c(n)|$ do canal .

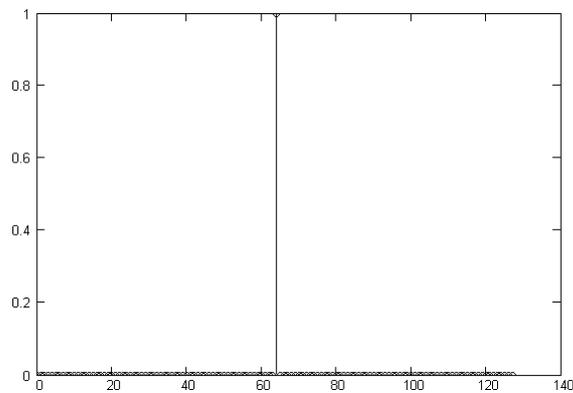


Fig. 6.2e: Módulo da resposta impulsiva combinada do canal e equalizador.

Figura 6.2: Exemplo do processo de desconvolução de um canal de comunicações.

6.1 Desconvolução de Canal sob Ruído e Reflexão Múltipla

A tarefa de desconvolução do canal é dificultada pela presença inevitável de ruído e reflexões, inerentes a todo canal físico. À medida que a dispersão do canal torna-se severa,

a ponto de incluir componentes originados por reflexão múltipla, poderá haver diversas frequências definidas sobre o círculo de raio unitário $z=1.0e^{j\theta}$ no plano z , com $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$, nas quais o canal apresenta ganho zero (ver Apêndice I deste capítulo). Assim, o equalizador apresentará um alto nível de ruído nestas frequências, o que poderá impedir a sua convergência para a condição ZF, conforme explicamos a seguir.

Existem frequências específicas que dependem dos parâmetros físicos do canal, para as quais, se o sinal do transmissor fosse nelas transmitido, daria origem a múltiplos componentes refletidos [Tijonov][Jasik][Dolukhanov][Nikolski]. Nestas frequências, os componentes refletidos, ao se combinarem na chegada ao receptor, somam-se com fase 180° ao sinal direto, anulando-o. Estas frequências, portanto, quando resultam ocorrer na banda de Nyquist, constituem uma parcela dos zeros de $C(z)$. Note que os sinais aqui referidos forçosamente encontram-se em regime permanente, caso contrário não poderiam ser identicamente anulados por soma fasorial. Tais sinais têm sua representação espectral definida sobre o círculo de raio unitário no plano z [Strum].

Como estes zeros de $C(z)$ originam-se do cancelamento de sinal por reflexão, e como cancelamento de sinal por reflexão implica em sinais em regime permanente, as frequências destes zeros jazem forçosamente sobre o círculo de raio unitário no plano z .

Da Equação (6.1), ao atingir a condição ZF, a função de transferência $F(z)$ do equalizador aproxima-se do inverso da função de transferência $C(z)$ do canal. Portanto, as frequências em que o canal $C(z)$ tem ganho nulo tenderão a ser infinitamente amplificadas por $F(z)$ no equalizador. Como o ruído em geral é espectralmente branco, e está presente ao longo de todo percurso do canal, inclusive na entrada do receptor, as frequências de ruído que coincidirem com os zeros de $C(z)$ originados por reflexão múltipla tenderão a ser amplificadas por $F(z)$ até a eventual saturação do sistema equalizador.

6.1.1 Zeros Unitários Fora da Faixa de Passagem do Canal

O canal desconvolvido pelo processo descrito na Figura 6.2 é um canal ruidoso com uma relação sinal-ruído SNR (SNR – *Signal to Noise Ratio*) de 35dB na entrada $u(n)$ do equalizador no receptor receptor digital.

A Figura 6.3 mostra os zeros deste canal no domínio frequência complexa z . Note que o canal apresenta zeros próximos ao círculo de raio unitário $z=1.0e^{j\theta}$ apenas na faixa de frequência $|\theta| > 120^\circ$, na qual a atenuação do canal é altíssima (ganho \approx zero) devido aos zeros sobre o círculo $z=1.0e^{j\theta}$. Na faixa de passagem do canal, i.e. para $|\theta| \leq 120^\circ$, não existem zeros sobre o círculo $z=1.0e^{j\theta}$.

Um sinal a ser transmitido através de um canal através do qual se pretenda enviar informação obrigatoriamente deve ter seu espectro contido na faixa de passagem do canal, caso contrário o sinal chegará no receptor com alta atenuação. Portanto, o sinal a ser desconvolvido pelo equalizador no receptor é resultante da interação do espectro do sinal original com os zeros dentro da faixa de passagem do canal (e não com os zeros fora da

faixa de passagem), justamente porque o espectro do sinal transmitido deve obrigatoriamente estar nela contido.

Vimos que, se um equalizador aproxima a situação ZF, então $F(z)$ aproxima $C^{-1}(z)$, quando, então, os zeros de $C(z)$ tendem a se tornar pólos em $F(z)$. No entanto, visto que um equalizador ajusta sua $F(z)$ de acordo com o sinal recebido do canal, apenas os zeros de $C(z)$ dentro da faixa de passagem do canal tenderão a ser pólos de $F(z)$. Zeros fora da faixa de passagem sobre o círculo $z=1.0e^{j\theta}$ atenuam totalmente o sinal a ser transmitido e, portanto, o equalizador tende a desconsiderá-los, não representando-os como pólos em $F(z)$.

Portanto, na Figura 6.3, os zeros de $C(z)$ próximos ao círculo de raio unitário $z=1.0e^{j\theta}$ na faixa de frequência $|\theta| > 120^\circ$ (fora da faixa de passagem do canal) não induzem pólos sobre o círculo $z=1.0e^{j\theta}$ em $F(z)$, não ocasionando, portanto, a indesejada amplificação de ruído no equalizador. De fato, o equalizador utilizado no processo de desconvolução de canal descrito na Figura 6.2 atinge precisamente a condição ZF, apesar da presença de ruído.

Em suma, zeros de $C(z)$ próximos ao círculo de raio unitário fora da faixa de passagem do canal não resultam em amplificação de ruído no equalizador. Em geral, tais zeros de $C(z)$ não são originados por reflexão múltipla e sim por atenuação devido a perdas dielétricas e/ou magnéticas ao longo do canal de transmissão.

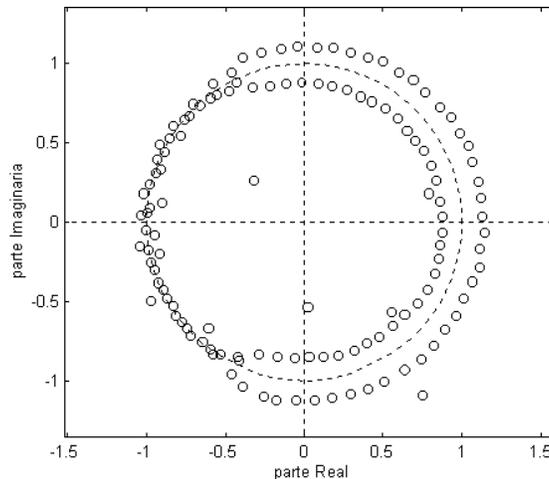


Figura 6.3: Raízes de $C(z)$ para o canal utilizado no exemplo da Figura 6.2. O canal em questão é um cabo coaxial para TV cabo. Ver Apêndice III deste capítulo – caracterização do Canal C2.

6.2 Equalizador LMS – DD

O equalizador utilizado no processo de desconvolução da Figura 6.2 é um equalizador denominado LMS –DD e é baseado no algoritmo LMS [Haykin2]. A Figura 6.4 mostra o diagrama de blocos de um equalizador LMS –DD.

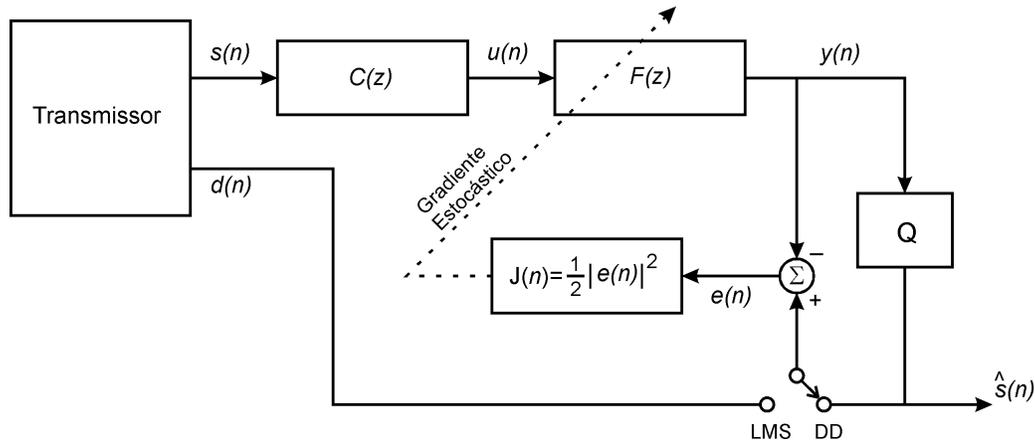


Figura 6.4: Equalizador LMS–DD.

O equalizador LMS–DD é clássico no contexto de equalização adaptativa, contexto no qual o equalizador adapta sua $F(z)$ objetivando reduzir a ISI. A técnica baseia-se na transmissão de uma seqüência de treinamento preestabelecida [Widrow], a qual é conhecida *a priori* tanto no transmissor como no receptor. No receptor, o equalizador utiliza a seqüência de treinamento conhecida para adaptar $F(z)$ de modo supervisionado, através do algoritmo LMS [Haykin2], buscando atingir a condição ZF. É claro que, se o transmissor tivesse que enviar somente esta seqüência de supervisão, não haveria necessidade de equalizar o canal, já que este sinal de treinamento definido *a priori* não carrega informação útil. Na prática, no entanto, a seqüência de treinamento é transmitida somente na fase inicial do estabelecimento de comunicações ponto a ponto ou periodicamente para sistemas que operem em modo *broadcast*. Após a convergência do algoritmo LMS, situação em que o valor do erro médio quadrático (MSE – *Mean Squared Error*) da saída com relação à seqüência de treino é baixo, o equalizador LMS–DD transfere o processo de equalização para o chamado algoritmo DD (DD – *Direct Decision*) [Lucky]. O algoritmo DD dispensa a seqüência de treino enquanto nenhuma alteração súbita e significativa ocorrer no canal.

No algoritmo DD, a saída y do equalizador é aplicada a um quantizador Q , que é um dispositivo de decisão que estima a qual símbolo do alfabeto A mais próximo se encontra o valor de y , conforme mostra a Figura 6.4. Após o algoritmo LMS atingir um nível de MSE suficientemente baixo, a chave comuta da seqüência de treino $d(n)$ para a estimativa da seqüência originalmente transmitida $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$. O algoritmo Gradiente Estocástico [Haykin2] adapta $F(z)$ objetivando minimizar a função de custo J , a qual mede o erro quadrático instantâneo entre a seqüência de saída $y(n)$ do equalizador e $\hat{s}(n)$ (ou mede o

erro quadrático instantâneo entre $y(n)$ e a seqüência de treino $d(n)$ quando a chave está na posição “LMS”). Note que se $\hat{s}(n) = s(n)$ então o algoritmo DD torna-se idêntico ao LMS. Em [Macchi] é mostrado que equalizadores com base no algoritmo DD convergem para a condição ZF quando inicializados em uma condição de “olho parcialmente aberto”. Assim, como corolário, o algoritmo DD é capaz de acompanhar, de modo adaptativo, lentas variações em $C(z)$ sem a necessidade explícita de se retransmitir novamente o sinal de treinamento.

O equalizador LMS–DD é um equalizador **não-autodidata** ou **supervisionado** porque tem acesso à seqüência de símbolos originais $s(n)$ através da seqüência de treino $d(n)$. Isto torna o processo de desconvolução supervisionado muito mais fácil do que o processo de desconvolução denominado **autodidata**, o qual não necessita deste sinal de referência. No entanto, esta facilidade implica na resultante penalidade de reduzir a banda passante do sistema digital como um todo, conforme discutiremos na Seção 6.3.

6.2.1 Funcionamento do Equalizador LMS – DD

A Figura 6.5 detalha um Equalizador LMS – DD. A seqüência de amostras $u(n)$ recebida do canal é seqüencialmente armazenada na fila (*queue*) de blocos z^{-1} (z^{-1} : saída do bloco atrasada de uma amostra com relação à entrada). Como um grande número de sistemas digitais utiliza modulação M -QAM e M -PSK, as amostras $u(n)$ são, em geral, números complexos. O conjunto de saídas da fila de blocos z^{-1} define o vetor $\underline{r} = [r_0 \ r_1 \ \dots \ r_{L-1}]^T$, denominado **regressor do canal**. O conjunto de coeficientes $\{W_0, W_1, \dots, W_{L-1}\}$ define os ganhos dos caminhos que chegam ao somador Σ . O somador Σ estabelece a soma das saídas dos blocos z^{-1} ponderadas pelo conjunto de coeficientes $\{W_0, W_1, \dots, W_{L-1}\}$, de forma que $F(z) = W_0 + W_1 z^{-1} + \dots + W_{L-1} z^{L-1}$. A $F(z)$ assim implementada define um filtro FIR transversal [Strum] e um equalizador cuja arquitetura seja a mostrada na Figura 6.5 é denominado de **equalizador transversal**.

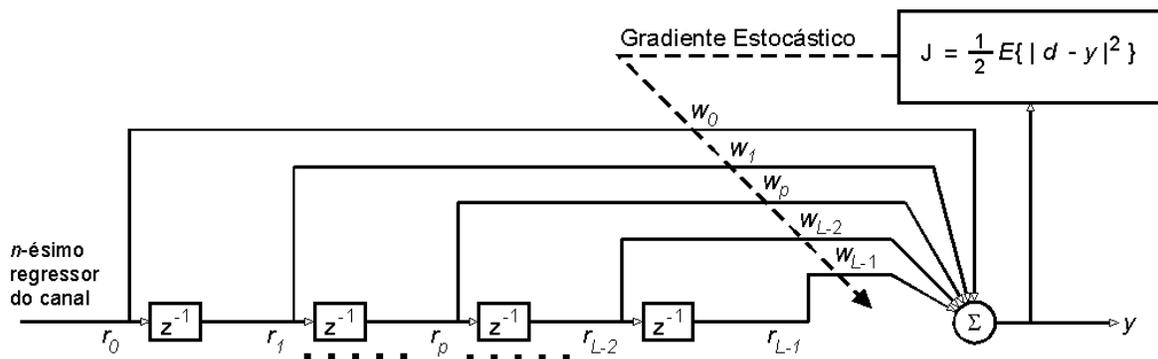


Figura 6.5: Diagrama do Equalizador LMS – DD. A seqüência d representa a seqüência de treino enviada pelo transmissor (chave na posição “LMS” na Figura 6.4) ou a saída do quantizador Q (chave na posição “DD” na Figura 6.4)

Passamos a analisar o equalizador Equalizador LMS – DD. A Figura 6.5 mostra o equalizador no instante n . Como o instante é definido, visando a compacidade das equações no desenvolvimento que segue, não explicitaremos o indexador n para as variáveis envolvidas a menos que n não seja inequivocamente definido pelo contexto.

A partir de sua inicialização, o vetor de pesos $\underline{W} = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_{L-1}]^T$ é atualizado pelo Gradiente Estocástico, visando minimizar a função de custo J . Observe que J mede o quadrado da norma Euclidiana entre a saída do equalizador e o símbolo da seqüência de treino (ou o símbolo na saída do quantizador Q se a chave estiver na posição “DD” na Figura 6.4).

Seja o vetor representativo do n -ésimo regressor do canal $\underline{r}(n)$, $n = 0, 1, \dots$, definido por

$$r_k(n) = u(L-1-k+n), \quad k = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6.2)$$

onde L é a dimensão do equalizador e u é a seqüência de amostras recebida do canal.

A saída do equalizador é dada por

$$y = \underline{W}^T \cdot \underline{r} \quad (6.3)$$

ou

$$y = \sum_{k=0}^{L-1} W_k \cdot r_k \quad (6.4)$$

que é identicamente equivalente à

$$y = \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\} \operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{W_k\} \operatorname{Im}\{r_k\}] \right\} + j \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{W_k\} \operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{W_k\} \operatorname{Re}\{r_k\}] \right\} = \quad (6.5)$$

$$= \operatorname{Re}\{y\} + j \operatorname{Im}\{y\}, \quad j = \sqrt{-1}$$

A minimização da função de custo J é feita através de sucessivos ajustes do vetor \underline{W} pelo algoritmo Gradiente Estocástico, à medida que n é incrementado:

$$J = \frac{1}{2} E\{|d - y|^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J(n) \quad (6.6)$$

$$J(n) = \frac{1}{2} \{|d(n) - y(n)|^2\} \quad (6.7)$$

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \cdot (-\nabla_p J(n)), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6.8)$$

onde W_p é o p -ésimo peso do vetor de pesos \underline{W} , η_w é o passo de adaptação, $\eta_w > 0$, e

$$\nabla_p J = \nabla_p^R J + j \nabla_p^I J = \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Re}\{W_p\}} + j \frac{\partial J}{\partial \operatorname{Im}\{W_p\}} \quad (6.9)$$

é o p -ésimo componente do vetor gradiente complexo de J tomado com relação à variação do p -ésimo componente do vetor \underline{W} .

Substituindo (6.7) em (6.9),

$$\nabla_p J = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial |d-y|^2}{\partial \text{Re}\{W_p\}} + j \frac{\partial |d-y|^2}{\partial \text{Im}\{W_p\}} \right] \quad (6.10)$$

Mas de (6.5),

$$\begin{aligned} |d-y|^2 &= (\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\})^2 + (\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\})^2 = \\ &= \left\{ \text{Re}\{d\} - \left[\sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{W_k\} \text{Re}\{r_k\} - \text{Im}\{W_k\} \text{Im}\{r_k\}] \right] \right\}^2 + \\ &+ \left\{ \text{Im}\{d\} - \left[\sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{W_k\} \text{Im}\{r_k\} + \text{Im}\{W_k\} \text{Re}\{r_k\}] \right] \right\}^2 \end{aligned} \quad (6.11)$$

De (6.11), com referência à (6.10),

$$\frac{\partial |d-y|^2}{\partial \text{Re}\{W_p\}} = 2 \left(\begin{aligned} & \left[\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\} \right] \left[\frac{\partial \text{Re}\{d\}}{\partial \text{Re}\{W_p\}} - \text{Re}\{r_p\} \right] + \\ & \left[\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\} \right] \left[\frac{\partial \text{Im}\{d\}}{\partial \text{Re}\{W_p\}} - \text{Im}\{r_p\} \right] \end{aligned} \right) \quad (6.12)$$

$$\frac{\partial |d-y|^2}{\partial \text{Im}\{W_p\}} = 2 \left(\begin{aligned} & \left[\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\} \right] \left[\frac{\partial \text{Re}\{d\}}{\partial \text{Im}\{W_p\}} + \text{Im}\{r_p\} \right] + \\ & \left[\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\} \right] \left[\frac{\partial \text{Im}\{d\}}{\partial \text{Im}\{W_p\}} - \text{Re}\{r_p\} \right] \end{aligned} \right) \quad (6.13)$$

Mas d é um valor constante independente do vetor \underline{W} , portanto todas as derivadas de d em (6.12) e (6.13) são nulas. Tendo este fato em mente e substituindo (6.12) e (6.13) em (6.10), temos

$$-\nabla_p J = \left(\begin{aligned} & \left[\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\} \right] \text{Re}\{r_p\} + \\ & \left[\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\} \right] \text{Im}\{r_p\} \end{aligned} \right) + j \left(\begin{aligned} & \left[\text{Im}\{d\} - \text{Im}\{y\} \right] \text{Re}\{r_p\} + \\ & - \left[\text{Re}\{d\} - \text{Re}\{y\} \right] \text{Im}\{r_p\} \end{aligned} \right) \quad (6.14)$$

Substituindo (6.14) em (6.8), obtém-se a equação de atualização do vetor \underline{W} para a minimização da função de custo J através do Gradiente Estocástico:

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \left\{ \left(\begin{array}{l} [\text{Re}\{d(n)\} - \text{Re}\{y(n)\}] \text{Re}\{r_p(n)\} + \\ [\text{Im}\{d(n)\} - \text{Im}\{y(n)\}] \text{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right) + j \left(\begin{array}{l} [\text{Im}\{d(n)\} - \text{Im}\{y(n)\}] \text{Re}\{r_p(n)\} + \\ - [\text{Re}\{d(n)\} - \text{Re}\{y(n)\}] \text{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right) \right\} \quad (6.15)$$

ou, visto que $e(n) = d(n) - y(n)$,

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w \left\{ \left(\begin{array}{l} \text{Re}\{e(n)\} \text{Re}\{r_p(n)\} + \\ \text{Im}\{e(n)\} \text{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right) + j \left(\begin{array}{l} \text{Im}\{e(n)\} \text{Re}\{r_p(n)\} - \\ \text{Re}\{e(n)\} \text{Im}\{r_p(n)\} \end{array} \right) \right\} \quad (6.16)$$

mas

$$\left(\text{Re}\{e\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{e\} \text{Im}\{r_p\} \right) + j \left(\text{Im}\{e\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{e\} \text{Im}\{r_p\} \right) = e \cdot r_p^* \quad (6.17)$$

daí, (6.16) pode ser re-escrita como

$$W_p(n+1) = W_p(n) + \eta_w e(n) r_p^*(n) \quad (6.18)$$

ou em forma vetorial,

$$\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w e(n) \underline{r}^*(n) \quad (6.19)$$

A Tabela 6.1 esquematiza o procedimento adotado no Equalizador LMS – DD quando aplicado à equalização de canal:

Etapa	Procedimento
1	Inicializar o vetor L dimensional \underline{W} : $\underline{W} = 0 + j0$ onde $j = \sqrt{-1}$ e L é o “tamanho” (dimensão) do equalizador.
2	Inicializar o indexador de regressor do canal (ou indexador de instante/iteração): $n = 0$
3	Obter o vetor que define o n -ésimo regressor do canal $\underline{r}(n)$: $r_k(n) = u(L-1-k+n)$, $k = 0, 1, \dots, L-1$ onde u é a seqüência de amostras recebida do canal.
4	Obter a saída do equalizador no instante n : $y(n) = \underline{W}^T(n) \cdot \underline{r}(n)$
5	Calcular erro: $e(n) = d(n) - y(n)$
6	Atualizar o vetor de pesos \underline{W} : $\underline{W}(n+1) = \underline{W}(n) + \eta_w e(n) \underline{r}^*(n)$
7	Incrementar indexador: $n = n+1$

8	Comutação da chave LMS – DD : Se o MSE dado pela média dos últimos L valores de $e(n)$ é menor que o valor da Tabela 6.2 então comuta a chave para DD, caso contrário comuta a chave para LMS (neste último caso o receptor deve sinalizar ao transmissor para que este reinicie o envio da seqüência de treino).
9	Repetir as etapas 3 a 9 até que todas as amostras enviadas tenham sido processadas.

Tabela 6.1: Sumário do algoritmo utilizado no Equalizador LMS – DD aplicado à equalização de canal.

6.3 Técnicas de Equalização Usuais – Discussão

Na grande maioria dos sistemas de comunicação digital de alta velocidade a função de transferência $C(z)$ do canal de propagação C não é conhecida *a priori*. Além do canal não ser conhecido, a sua caracterização varia com o tempo, devido à alterações nas condições ambientais do percurso do canal ou devido ao movimento relativo entre transmissor e receptor. Portanto, é bastante desejável que o equalizador seja implementado baseado em técnicas adaptativas, de forma a poder acompanhar as variações de $C(z)$ ao longo do tempo.

No entanto, o uso de uma seqüência de treinamento para o equalizador constitui desperdício de banda passante, já que seqüências de treinamento não transportam informação útil. A necessidade imperiosa de sistemas de comunicação digital de alta velocidade não se coaduna com a não otimização da ocupação de banda. Mesmo para comunicações ponto a ponto, em que a seqüência de treinamento necessitaria ser transmitida somente na fase inicial, não é raro alguma variação drástica no canal (possivelmente pequenas aeronaves na linha de visada entre antenas ou pássaros na região de campo próximo [Jasik] de uma das antenas) obrigar a parada momentânea do sistema para que seja efetuada a reinicialização do equalizador LMS–DD pelo algoritmo LMS. É imperativo, portanto, a concepção de equalizadores que operem com base no sinal recebido e com base em alguma característica estatística da fonte $s(n)$, mas não necessariamente com base na seqüência de símbolos originais $s(n)$ (implícita na seqüência de treino $d(n)$). Tal classe de equalizadores é denominada autodidata. Um equalizador autodidata, portanto, efetua a desconvolução autodidata do canal sem a necessidade de conhecer a seqüência $s(n)$ originalmente transmitida, ao contrário dos algoritmos supervisionados LMS e LMS–DD, que forçosamente precisam desta referência (dada pela seqüência de treino $d(n)$) para que a condição ZF seja alcançada. Os equalizadores autodidatas, ou não-supervisionados, são também conhecidos como equalizadores cegos (*blind equalizers*), pela maneira como buscam atingir a condição ZF.

Existe uma variedade de técnicas para equalização autodidata de canal que utilizam distintas filosofias em sua implementação. Endres, em [Endres1], faz uma exaustiva análise entre as diversas filosofias atuais, incluindo vários exemplos comparativos de equalização autodidata de canais comprovadamente encontrados na prática de transmissão digital. A conclusão a que chega Endres em [Endres1] e que se alinha com o observado no cenário de equalização autodidata é: o algoritmo CMA (*Constant Modulus Algorithm*), proposto

independentemente por Godard [Godard] e Treichler [Treichler3], sob amostragem fracionária de canal [Proakis], apresenta desempenho superior em relação às demais técnicas e filosofias autodidatas, principalmente no que diz respeito à velocidade de convergência. Comparativamente, o CMA necessita poucas amostras recebidas para atingir o ponto de convergência. Até porque, nas raras situações em que a performance do algoritmo CMA é suplantada, tal melhora de performance é obtida às custas de um custo computacional proibitivo. Por estas razões, este estudo focalizará no algoritmo CMA como termo de referência para equalização autodidata.

Um exemplo de classe de algoritmos de alta performance mas de custo proibitivamente alto são os chamados detetores de máxima verossimilhança ou detetores MLSD (MLSD – *Maximum Likelihood Sequence Detection*) [Forney1]. O equalizador de um detetor MLSD é um decodificador em treliça baseado no algoritmo de Viterbi [Forney2]. Para cada símbolo a ser decodificado, o algoritmo de Viterbi precisa computar as métricas de M^{L_c+1} caminhos distintos na treliça, onde M é o número de símbolos do alfabeto A da fonte de informação e L_c é a dimensão da dispersão do canal. Pode-se ter uma idéia do grau de complexidade desta classe de algoritmos ao se constatar que, para um canal com dispersão de $L_c = 16$ amostras, utilizando uma corriqueira modulação 16-QAM, a cada símbolo recebido o equalizador necessita computar $16^{17} = 2.95 \times 10^{20}$ métricas.

Uma outra classe de algoritmo que aparece com alguma freqüência na prática de equalização autodidata são os algoritmos por decomposição em sub-espacos, os quais exploram a ortogonalidade entre os sub-espacos de sinal e ruído, obtidos da matriz de correlação do sinal recebido. Exemplos desta classe de algoritmos podem ser encontrados em [Moulines], [Xu] e [Tong1]. Apresentando um custo computacional considerado moderado, esta classe de algoritmos sofre do inconveniente de ser impossível estabelecer uma delimitação clara entre os sub-espacos de sinal e ruído, o que freqüentemente resulta em alto MSE residual após um longo processo de convergência [Endres1].

Como último exemplo, cita-se ainda os chamados equalizadores DFE (DFE – *Decision Feedback Equalizer*). Equalizadores DFE somam ao sinal recebido uma realimentação negativa da filtragem das estimativas $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$ dos símbolos originalmente transmitidos, na esperança de anular a dispersão do canal pela subtração da dispersão estimada pelo filtro. Não importando ser o filtro adaptado pelo algoritmo LMS ou pelo algoritmo CMA, equalizadores DFE inerentemente apresentam o chamado erro de propagação [Casas][Kennedy], o qual causa, de maneira imprevisível, a elevação da probabilidade de erro nos símbolos recebidos SER (SER – *Symbol Error Rate*) a níveis inaceitáveis durante longos intervalos de tempo. Isto acontece porque, ao ocorrer uma estimativa errada $\hat{s}(n) = Q\{y(n)\}$, o erro se propagará pelo filtro durante vários intervalos amostrais, realimentando-se sobre si mesmo. As recentes tentativas de minimizar o erro de propagação em equalizadores DFE têm apresentado resultados apenas moderados [Balakrishnan]. Faremos uma breve descrição de equalizadores DFE na Seção 6.6.

O procedimento universalmente adotado no cenário de equalização autodidata com relação ao algoritmo CMA é, uma vez atingida a situação de “olho parcialmente aberto”, comuta-se para o algoritmo DD, de modo semelhante ao algoritmo LMS-DD. Este

procedimento é amplamente aceito como solução para um problema inerente ao algoritmo CMA: o MSE residual relativamente alto após a convergência, o qual impede o uso direto do equalizador CMA em sistemas digitais com constelações densas. Quanto mais densa a constelação maior a velocidade de transmissão possível ao sistema, mas, simultaneamente, menor é o MSE de regime permanente exigido do equalizador [Proakis][Endres1]. No entanto, a transferência para o algoritmo DD somente é possível quando o MSE, após a convergência do algoritmo CMA, atinge um nível suficientemente baixo dado pela Tabela 6.2. Portanto, o êxito de um equalizador CMA-DD é condicionado por um suficientemente baixo MSE residual do algoritmo CMA. A tentativa de efetuar a transferência do algoritmo CMA para o algoritmo DD sob um MSE de regime maior que o mostrado na Tabela 6.2 usualmente implica na não-convergência do algoritmo DD.

Modulação:	Nível máximo de MSE para transferência:
16-QAM	0.076
64-QAM	0.0182
256-QAM	0.0045
1024-QAM	0.0011

Tabela 6.2: Nível máximo de MSE para transferência ao algoritmo DD.

6.4 Equalização Autodidata de Canal

Em um sistema de transmissão digital, o problema de equalização autodidata do canal é apenas um em uma miríade. Respectivo a cada problema a ser resolvido, há pelo menos um sub-sistema destinado a resolvê-lo. Como exemplo, cita-se aqui apenas o sub-sistema de sincronismo, por estar intimamente associado ao equalizador. A solução do problema de equalização de canal em um receptor exige, como pré-requisito, a solução dos problemas de **sincronismo de portadora** e de **sincronismo de símbolo**. A representação de um sistema digital em banda base, a ser utilizada ao longo deste estudo, só é possível caso receptor e transmissor estejam em perfeito sincronismo.

Em geral, o sincronismo de portadora e o sincronismo de símbolo são obtidos a partir de dois PLLs (*phase locked loops*) [Gardner]. Um PLL “amarra” a frequência do oscilador local do receptor com a frequência da portadora no transmissor. A seguir, um outro PLL “amarra” a fase dos símbolos (complexos) recebidos com os símbolos do quantizador do receptor.

6.4.1 Descrição do Problema

Muito do trabalho analítico envolvendo algoritmos de desconvolução autodidata considera a representação em banda base do equalizador com a seqüência de entrada definida por amostras do canal espaçadas no tempo de um intervalo igual ao intervalo de amostragem T utilizado no transmissor. Tal forma de amostragem é denominada amostragem não-fracionária e qualquer sistema de equalização nela baseado é dito ser não-fracionário [Proakis]. É possível mostrar formalmente que equalizadores CMA não-fracionários são globalmente convergentes desde que a fonte de informação tenha

distribuição uniforme e independente e desde que o equalizador tenha uma dimensão tal que considere as infinitas amostras passadas do canal [Godard][Foschini][Bellini]. Obviamente, esta é uma situação limite irrealizável. Para contornar esta limitação teórica, a prática faz uso de um número suficientemente grande de amostras passadas do canal tal que condicione a convergência do equalizador a um bom termo.

Este desagradável sentimento despertado pelo termo “infinitas amostras passadas” associado ao universo dos equalizadores não-fractionários é totalmente dissipado quando considera-se, em contrapartida, a classe de equalizadores ditos fractionários ou super-amostrados. Equalizadores baseados em amostragem fractionária foram historicamente desenvolvidos visando o problema de sincronização [Ungerboeck][Gitlin1]. No entanto, mais recentemente, Gardner [Gardner1] mostrou que a amostragem fractionária tem a propriedade de transformar o processo estocástico associado ao sinal recebido, convertendo-o de estacionário no sentido amplo para ciclo-estacionário. No contexto de equalização, esta transformação permite que um equalizador fractionário atinja perfeitamente a condição ZF “conhecendo” apenas um número finito de amostras passadas do canal [LeBlanc], sob determinadas condições ideais, a serem definidas na Seção 6.4.4.

A Figura 6.6 mostra o diagrama de blocos de um equalizador baseado em amostragem fractionária. O caminho entre a fonte de informação discreta $s(n)$ do transmissor, com intervalo de *Baud* dado por T , até o sinal analógico recebido $u(t)$, é modelado através de um conversor D/A (D/A – *digital to analog*) que envia o sinal contínuo $s(t)$ através de um canal C com função de transferência $C(s) = \Lambda\{c(t)\}$, onde $\Lambda\{\}$ é o operador Transformada de Laplace [Kreyszig] e $c(t)$ é a resposta ao impulso do canal C .

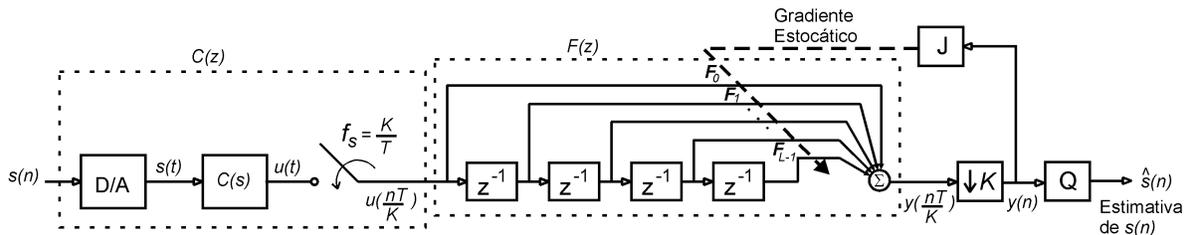


Figura 6.6: Diagrama de um sistema para equalização de canal em transmissão digital.

O sinal recebido $u(t)$ é amostrado a intervalos de T/K segundos, onde K é um inteiro positivo. A seqüência $u(\frac{nT}{K})$ resultante é submetida ao equalizador, com função de transferência $F(z)$, cuja saída $y(\frac{nT}{K})$ é decimada¹ por K , gerando a seqüência de saída equalizada $y(n)$. Por ser resultante da decimação por K de $y(\frac{nT}{K})$, o intervalo de *Baud* associado a $y(n)$ é o intervalo T originalmente usado no transmissor. O quantizador Q é

¹ Decimação no sentido de sub-amostragem.

um dispositivo de decisão que estima a qual símbolo do alfabeto da fonte $s(n)$ mais se aproxima o valor de $y(n)$. Seguindo a tendência da suprema maioria das implementações práticas atuais, a função de transferência $F(z)$ é implementada por um filtro FIR transversal com L coeficientes F_i , $i=0,1,\dots,L-1$, onde L é denominado dimensão do equalizador. A função de custo J gera a informação de erro necessária ao algoritmo adaptativo dos coeficientes ou pesos F_i , sendo usualmente minimizada pelo algoritmo Gradiente Estocástico [Haykin2]. Por exemplo, no caso de um equalizador supervisionado com base no algoritmo LMS, a função de custo minimizada pelo algoritmo Gradiente Estocástico é dada por $J(n) = \frac{1}{2} |d(n) - y(n)|^2$, onde $d(n)$ é a seqüência de treino transmitida pelo transmissor, conforme já visto na Seção 6.2.

6.4.2 Equalizadores Não-Fracionários

Para $K=1$ o equalizador torna-se pertencente à classe de equalizadores não-fracionários. É instrutivo analisar esta classe de equalizadores quanto à viabilidade de convergência, antes de se analisar a classe fracionária. Seja $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{L_c-1}]^T$ o vetor com dimensão igual à da dispersão de canal L_c contendo as amostras da resposta ao impulso $c(n)$ do canal C tal que $C_n = c(n)$, $n=0,1,\dots,L_c-1$. Note que o equalizador, representado por $F(z)$, “enxerga” o canal através do amostrador, e portanto “enxerga” a resposta impulsiva discreta $c(n)$ e não a resposta contínua $c(t)$. Seja $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$ o vetor com dimensão L definido pelos coeficientes F_i , $i=0,1,\dots,L-1$, do filtro FIR transversal que representa o equalizador, conforme a Figura 6.6. Como a resposta ao impulso $f(n)$ de um filtro FIR é definida pelo valor de seus coeficientes F_i [Strum], a resposta ao impulso do equalizador é dada por $f(n) = F_i$, $i=n=0,1,\dots,L-1$. Note que, como a amostragem é não-fracionária, elementos adjacentes no vetor \underline{C} encontram-se com uma separação T relativa ao domínio tempo contínuo. Mesma observação vale para elementos adjacentes no vetor \underline{F} .

A resposta impulsiva combinada do canal e equalizador $h(n)$ no domínio tempo pode ser representada no domínio freqüência por $H(z) = C(z)F(z)$, onde $H(z) = Z\{h(n)\}$, $C(z) = Z\{c(n)\}$ e $F(z) = Z\{f(n)\}$, sendo $Z\{\}$ o operador Transformada Z [Strum]. No domínio tempo, $h(n)$ é dada pela convolução das respostas impulsivas individuais $c(n)$ – do canal – e $f(n)$ – do equalizador:

$$h(n) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(i)c(n-i) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} c(i)f(n-i) \quad (6.20)$$

Como $c(n)$ é limitado a L_c amostras e como $f(n)$ é limitado a L amostras, a resposta impulsiva combinada $h(n)$ pode ser representada pelo vetor $\underline{H} = [H_0 \ H_1 \ \dots \ H_{L_c+L-2}]^T$ tal que $H_i = h(n)$, $i=n=0,1,\dots,L_c+L-2$, com \underline{H} dado

pelo produto da matriz de convolução do canal \mathcal{X} pelo vetor \underline{F} representativo da resposta ao impulso do equalizador:

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ \vdots \\ H_{L_c+L-2} \end{bmatrix} = \mathcal{X} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_0 & \ddots & 0 \\ \vdots & C_1 & \ddots & 0 \\ C_{L_c-1} & \vdots & \ddots & C_0 \\ 0 & C_{L_c-1} & \ddots & C_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & C_{L_c-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_{L-1} \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

onde $C_0, C_1, \dots, C_{L_c-1}$ são os elementos do vetor \underline{C} .

Observe que \mathcal{X} é uma matriz Töeplitz [Golub], com $L_c + L - 1$ linhas e L colunas, que é uma consequência natural de (6.20) na medida em que L_c e L são finitos. Conforme já visto no início deste capítulo, a condição ZF é definida por $h(n) = h_d(n) = \delta(n - d)$, para algum d inteiro não negativo. Em (6.21) a condição ZF implica que $\underline{H} = \underline{H}_d$ onde \underline{H}_d é um vetor de dimensão $L_c + L - 1$ cujos componentes são todos nulos, exceto o de valor unitário na posição d , isto é

$$\underline{H}_d = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^T \quad (6.22)$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \uparrow & & & \\ & & & H_0 & & & \\ & & & & \uparrow & & \\ & & & & H_d & & \\ & & & & & \uparrow & \\ & & & & & & H_{L_c+L-2} \end{array}$$

onde $0 \leq d \leq L_c + L - 2$.

A conclusão imediata da Equação (6.21) com $\underline{H} = \underline{H}_d$ é que, como $L_c + L - 1 > L$, o sistema de equações resultante é sobre-determinado com relação às incógnitas F_i , $i = 0, 1, \dots, L - 1$. Portanto, para um equalizador não-fracionário não existe uma solução \underline{F} tal que a situação ZF possa ser atingida exceto quando $L \rightarrow \infty$. Note que nesta discussão não foi incluído o efeito do ruído, quando então a solução do sistema é mais condicionada ainda. Este caso é discutido em [Johnson2].

A prática de equalizadores não-fracionários faz uso de L suficientemente grande tal que o sistema definido por (6.21) apresente um erro quadrático $|\underline{H}_d - \mathcal{X} \cdot \underline{F}|^2$ aceitável para a operação do equalizador com o canal a ser equalizado. Matematicamente, a melhor

solução F_{otimo} do sistema sobre-determinado (6.21), sob o ponto de vista da minimização do MSE $\frac{1}{L_c + L} |H_d - \mathcal{X} \cdot F|^2$, é dada pela chamada Solução de Wiener [Haykin2],

$$F_{otimo} = \mathcal{X}^+ \cdot H_d \quad (6.23)$$

onde o operador $\{\cdot\}^+$ representa a pseudo-inversa de Moore-Penrose da matriz argumento.

Equalizadores cujo filtro FIR é obtido de (6.23) são denominados de equalizadores MMSE (MMSE – *Minimum Mean Squared Error*), porque o erro médio quadrático é minimizado pela pseudo-inversa de Moore-Penrose [Golub][Press]. Esta classe de equalizadores não é adaptativa, o que a torna não muito popular por exigir o conhecimento *a priori* da resposta impulsiva do canal para a obtenção de \mathcal{X} . No entanto, equalizadores MMSE constituem o limite teórico para a minimização do MSE de equalizadores adaptativos, visto que os últimos apresentam o efeito denominado MSE de Excesso [Haykin2].

6.4.3 Equalizadores Fracionários

Para $K > 1$ na Figura 6.6, o sinal recebido $u(t)$ é amostrado a uma razão maior que $1/T$, que é a razão de amostragem utilizada no transmissor para enviar os símbolos da fonte s sob um intervalo de *Baud* T através do canal. Nesta situação, o equalizador é chamado fracionário ou super-amostrado. A seqüência $u(\frac{nT}{K})$, obtida por amostragem fracionária, resulta em um processo ciclo-estacionário para qualquer K inteiro desde que $K > 1$ [Gardner1]. Sob este ponto de vista, utilizar $K > 2$ constitui um desperdício inútil, pois forçosamente implicaria no aumento da frequência do *clock* dos circuitos digitais empregados, e em conseqüência, no aumento de seu custo. Assim, este texto limitar-se-á ao estudo do caso em que $K = 2$, situação em que o equalizador passa a ser referido como equalizador sob amostragem fracionária $T/2$, ou simplesmente equalizador fracionário $T/2$.

O sinal analógico transmitido $s(t)$ é aproximado no tempo contínuo por

$$s(t) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)\delta(t-iT) \quad (6.24)$$

onde $a(i) \in A \forall i$, sendo $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ o alfabeto da informação a ser transmitida, constituído por M possíveis símbolos, $\delta(t)$ é a Função Delta de Dirac [Zeldovich] e T é o intervalo de amostragem dos símbolos ou intervalo de *Baud* do transmissor [Proakis].

Na ausência de ruído, o sinal analógico recebido $u(t)$ é dado pela convolução da resposta ao impulso $c(t)$ do canal com o sinal analógico transmitido $s(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau)c(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{i=\infty} a(i)\delta(\tau-iT) \right) c(t-\tau)d\tau \quad (6.25)$$

Mas, como o canal é um sistema linear, pelo princípio da superposição, a resposta a uma soma de excitações aplicadas ao canal é a soma das respostas individuais a cada uma delas. A partir deste fato, e utilizando as propriedades da Função Delta [Zeldovich], têm-se:

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{i=-\infty}^{i=\infty} a(i)\delta(\tau-iT) \right) c(t-\tau)d\tau = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a(i)\delta(\tau-iT)c(t-\tau)d\tau = \\ &= \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau-iT)c(t-\tau)d\tau = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c(t-iT) \end{aligned} \quad (6.26)$$

No receptor, o sinal $u(t)$ é amostrado a cada intervalo $T/2$, gerando a seqüência

$$u\left(n\frac{T}{2}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c\left(n\frac{T}{2}-iT\right) \quad (6.27)$$

Note que valores pares de n em (6.27) definem a seqüência $u^{\text{PAR}}(k)$, com espaçamento T entre amostras de índice k , espaçamento imposto pelo fato de $n = 2k = 0, 2, 4, \dots$ para $k = 0, 1, 2, \dots$, e dada por

$$u^{\text{PAR}}(k) = u(kT) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c((k-i)T) \quad (6.28)$$

Da mesma forma, note também que valores ímpares de n em (6.27) definem a seqüência $u^{\text{IMPAR}}(k)$, com espaçamento T entre amostras de índice k , espaçamento imposto pelo fato de $n = 2k - 1 = 1, 3, 5, \dots$ para $k = 1, 2, 3, \dots$, e dada por

$$u^{\text{IMPAR}}(k) = u\left(kT - \frac{T}{2}\right) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} a(i)c\left((k-i)T - \frac{T}{2}\right) \quad (6.29)$$

O transmissor emite o símbolo $s(nT) \in A$, aguarda T segundos, e então emite o símbolo $s((n+1)T) \in A$. Como a chave do amostrador na Figura 6.6 fecha a cada $T/2$ segundos, e como o receptor é assumido estar em sincronismo com o transmissor, dois tipos de amostras u podem ser gerados da operação da chave:

- I. Amostras u geradas em um instante de amostragem da chave que coincida com o instante de emissão de um símbolo $s(nT)$ pelo transmissor.
- II. Amostras u geradas em um instante de amostragem da chave que coincida com o instante localizado na metade do intervalo entre a emissão dos símbolos $s(nT)$ e $s((n+1)T)$ pelo transmissor.

Amostras do tipo I têm um conteúdo de informação predominante associado aos símbolos emitidos pelo transmissor, enquanto que amostras do tipo II têm um conteúdo de informação predominante associado à dispersão do canal. Note que, se não houvesse dispersão, as amostras do tipo I seriam iguais aos símbolos transmitidos e as amostras do tipo II seriam identicamente nulas, por não haver “reverberação” (ISI) no canal. Neste estudo assume-se que o sincronismo seja tal que a seqüência $u^{\text{PAR}}(k)$ represente o conjunto de amostras do tipo I e a seqüência $u^{\text{IMPAR}}(k)$ represente o conjunto de amostras do tipo II. Portanto, amostras recebidas do canal com índice par referem-se a instantes em que o transmissor emite símbolos e amostras recebidas do canal com índice ímpar referem-se a instantes localizados na metade do intervalo entre a emissão de símbolos pelo transmissor. As amostras da resposta impulsiva dos canais descritos Apêndice III deste capítulo obedecem a este critério, isto é, amostras pares referem-se a instantes de emissão de símbolos pelo transmissor.

As Equações (6.28) e (6.29) sugerem que a representação da resposta ao impulso c do canal C também pode ser subdividida em componentes pares e componentes ímpares. Seja, então, $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{L_c-1}]^T$ o vetor com dimensão igual à da dispersão de canal L_c contendo as amostras resultantes da amostragem fracionária $T/2$ da resposta ao impulso $c(t)$ do canal C tal que $C_n = c(\frac{nT}{2})$, $n = 0, 1, \dots, L_c - 1$. Sejam dois vetores, $\underline{C}^{\text{PAR}}$ e $\underline{C}^{\text{IMPAR}}$, ambos com espaçamento T entre seus elementos, obtidos de \underline{C} tal que um vetor mantenha um espaçamento relativo $T/2$ em relação ao outro:

$$\underline{C}^{\text{PAR}} = [C_0 \ C_2 \ C_4 \ \dots]^T, \quad \underline{C}^{\text{IMPAR}} = [0 \ C_1 \ C_3 \ \dots]^T \quad (6.30)$$

Como a resposta ao impulso de um sistema FIR define os coeficientes de sua função de transferência [Strum], $\underline{C}^{\text{PAR}}$ define $C^{\text{PAR}}(z)$ e $\underline{C}^{\text{IMPAR}}$ define $C^{\text{IMPAR}}(z)$. Assim, a Equação (6.30) sugere o modelo multi-canal mostrado na Figura 6.7.

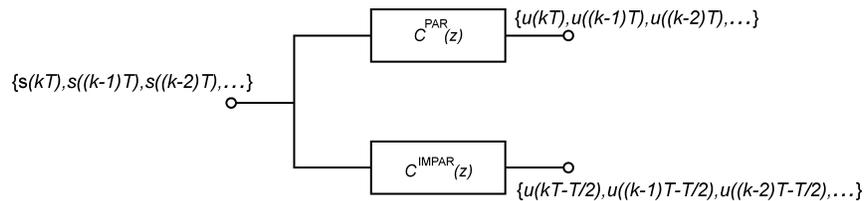


Figura 6.7: Modelo com dois sub-canais (par e ímpar) resultante da amostragem fracionária $T/2$ do canal original.

Semelhantemente, o equalizador – sob amostragem fracionária $T/2$ – também terá uma representação subdividida em componentes pares e ímpares. Da Figura 6.6, seja $f(i) = F_i$ a resposta ao impulso do filtro FIR do equalizador, $i = 0, 1, \dots, L - 1$. No domínio

tempo super-amostrado, a saída $y(\frac{nT}{2})$ é dada pela convolução das amostras recebidas do canal $u(\frac{nT}{2})$ com a resposta ao impulso $f(\frac{nT}{2})$ do equalizador:

$$y(\frac{nT}{2}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} f(\frac{iT}{2})u(\frac{nT}{2} - \frac{iT}{2}) = \sum_{i=0}^{L-1} f(\frac{iT}{2})u((n-i)\frac{T}{2}) \quad (6.31)$$

Para cada n , na convolução definida em (6.31), o indexador i do somatório ora refere-se a instantes associados a amostras pares da seqüência recebida super-amostrada $u(\frac{nT}{2})$, ora refere-se a instantes associados a amostras ímpares de $u(\frac{nT}{2})$. Portanto, a saída super-amostrada $y(\frac{nT}{2})$ pode ser convertida em uma seqüência $y(kT)$, com espaçamento T entre amostras, decomponível em duas seqüências $y^{\text{PAR}}(kT)$ e $y^{\text{IMPAR}}(kT)$ definidas conforme os parágrafos que seguem.

Seja $i = 2j$ e $n = 2k$ em (6.31). Então,

$$y^{\text{PAR}}(kT) = \sum_{j=0}^{\frac{L-1}{2}} f(jT)u((k-j)T) \quad (6.32)$$

Seja $i = 2j+1$ e $n = 2k$ em (6.31). Então,

$$y^{\text{IMPAR}}(kT) = \sum_{i=0}^{L-1} f(\frac{(2j+1)T}{2})u((2k - (2j+1))\frac{T}{2}) = \sum_{j=0}^{\frac{L-1}{2}} f(jT + \frac{T}{2})u((k-j)T - \frac{T}{2}) \quad (6.33)$$

Portanto, a representação total é dada por

$$y(k) = y^{\text{PAR}}(k) + y^{\text{IMPAR}}(k) = \sum_{i=0}^{\frac{L-1}{2}} \left(f(iT)u((k-i)T) + f(iT + \frac{T}{2})u((k-i)T - \frac{T}{2}) \right) \quad (6.34)$$

Dependendo do sistema, o bloco decimador K na Figura 6.6 pode manter as amostras pares e eliminar as amostras ímpares da saída super-amostrada $y(\frac{nT}{2})$, ou pode manter as amostras ímpares e eliminar as amostras pares de $y(\frac{nT}{2})$. Como $u^{\text{PAR}}(k)$ representa o conjunto de amostras do tipo I, o decimador K manterá as amostras para n par e eliminará as amostras para n ímpar na saída super-amostrada $y(\frac{nT}{2})$. Portanto, a saída após o decimador K é dada por $y(n) = y^{\text{PAR}}(k)$.

A Equação (6.34) sugere que o vetor $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$ de coeficientes do filtro FIR do equalizador, os quais são definidos pela sua resposta ao impulso $f(\frac{nT}{2})$, isto é, $F_n = f(\frac{nT}{2})$, $n = 0, 1, \dots, L-1$, pode ser decomposto em $\underline{F}^{\text{PAR}} = f(kT)$ e $\underline{F}^{\text{IMP}} = f(kT - \frac{T}{2})$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ou seja,

$$\underline{F}^{\text{PAR}} = [f(0) \ f(T) \ f(2T) \ \dots]^T, \quad \underline{F}^{\text{IMP}} = [f(\frac{T}{2}) \ f(\frac{3T}{2}) \ f(\frac{5T}{2}) \ \dots]^T \quad (6.35)$$

Como os coeficientes de um filtro FIR definem os coeficientes de sua função de transferência [Strum], $\underline{F}^{\text{PAR}}$ define $F^{\text{PAR}}(z)$ e $\underline{F}^{\text{IMP}}$ define $F^{\text{IMP}}(z)$. Isto sugere o modelo multi-canal para o equalizador mostrado na Figura 6.8.

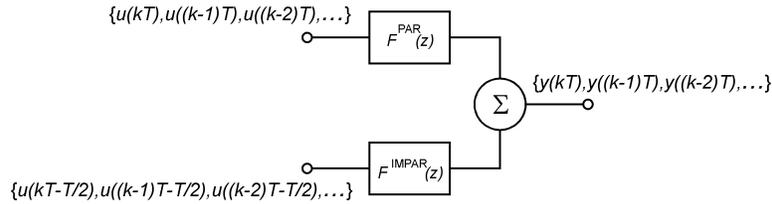


Figura 6.8: Modelo em dois sub-filtros (par e ímpar) para o equalizador, resultante da operação sob amostragem fracionária $T/2$ do canal.

Combinando as Figuras 6.7 e 6.8, obtêm-se o modelo não-fracionário (espaçamento T entre amostras adjacentes em s e y) equivalente para o sistema de equalização:

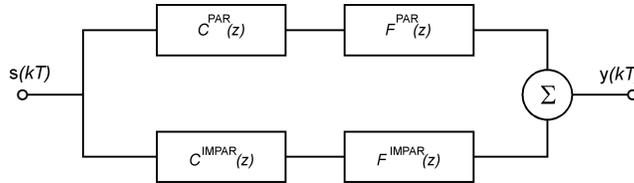


Figura 6.9: Modelo equivalente não-fracionário para um sistema de equalização com amostragem fracionária $T/2$. O espaçamento entre amostras adjacentes em s e y é T .

Algum cuidado é necessário na interpretação do equalizador fracionário através do sistema equivalente mostrado na Figura 6.9. A fonte $s(kT)$ emite símbolos com espaçamento temporal T . No entanto, ao encontrar a bifurcação, o fluxo de sinal da fonte s é dividido em dois fluxos, par e ímpar. A partir da bifurcação, o fluxo par transporta os símbolos $s(kT)$ efetivamente emitidos pela fonte s , o qual origina amostras do tipo I no receptor. O fluxo ímpar transporta símbolos fictícios, gerados na bifurcação, o qual origina amostras do tipo II no receptor. Estes símbolos fictícios são gerados na bifurcação em instantes de tempo que coincidem com instantes de tempo localizados na metade do

intervalo entre a emissão dos símbolos $s(kT)$ e $s((k+1)T)$. Este é o motivo de o decimador K eliminar as amostras do tipo II, mantendo as amostras do tipo I, já que é desejado equalizar o fluxo de símbolos efetivamente emitidos por s e não o fluxo de símbolos fictícios associados à “reverberação” no canal. Em consequência, o procedimento de determinação do filtro \underline{F} do equalizador será feito objetivando equalizar o fluxo de sinal par. Assim, a $H(z)$ equivalente no domínio frequência é dada por

$$H(z) = C^{\text{PAR}}(z)F^{\text{PAR}}(z) + C^{\text{IMPAR}}(z)F^{\text{IMPAR}}(z) \quad (6.36)$$

Sob condição ZF, têm-se que $h(n) = h_d(n) = \delta(n-d)$, o que implica em $H(z) = H_d(z) = Z\{h_d(n)\}$, onde $Z\{\}$ é o operador Transformada Z. É interessante observar que, ao impor $H(z) = H_d(z)$ em (6.36), a equação é transformada na conhecida Identidade de Bezout [Chen], no contexto da Análise de Sistemas Lineares.

Utilizando o conceito de matriz de convolução, a Equação (6.36) é dada no domínio tempo por,

$$\underline{H} = \underline{\mathcal{X}}^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}} + \underline{\mathcal{X}}^{\text{IMPAR}} \underline{F}^{\text{IMPAR}} \quad (6.37)$$

Comparando a Equação (6.37) com a Equação (6.21) verifica-se que, se o filtro \underline{F} de um equalizador não-fracionário sob ZF aproxima a inversa do canal através de $\underline{\mathcal{X}}^+$, um equalizador fracionário sob ZF não necessariamente o faz, visto que dois termos envolvendo as matrizes de convolução de cada sub-canal, distintas da matriz do canal, definem a resposta impulsiva \underline{H} em (6.37).

O procedimento para determinação do filtro \underline{F} de um equalizador fracionário é análogo ao caso não-fracionário, isto é, faz-se $\underline{H} = \underline{H}_d$ na Equação (6.37) objetivando que o equalizador atinja ZF. No entanto, como o decimador K elimina as amostras ímpares, a determinação de \underline{F} é tal que o termo $\underline{\mathcal{X}}^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}}$, com $\underline{F}^{\text{PAR}} = \underline{F}$, seja o responsável por forçar $\underline{H} = \underline{H}_d$ na interpretação multi-canal dada por (6.37). Isto é, \underline{F} é determinado de forma que apenas as componentes pares de \underline{H} sejam forçadas a igualarem \underline{H}_d . Como consequência, o termo $\underline{\mathcal{X}}^{\text{IMPAR}} \underline{F}^{\text{IMPAR}}$ resultante de \underline{F} assim determinado – isto é, para $\underline{F}^{\text{IMPAR}} = \underline{F}$ – é um vetor que resulta do processo de equalização do fluxo de sinal par na Figura 6.9, mas que não tem nenhuma influência direta sobre tal processo.

Para que se proceda a determinação de \underline{F} , faz-se necessário um conjunto de definições preliminares. Seja $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ \dots \ C_{L_c-1}]^T$ o vetor com dimensão igual à da dispersão de canal L_c contendo as amostras resultantes da amostragem fracionária $T/2$ da resposta ao impulso $c(t)$ do canal C tal que $C_n = c(\frac{nT}{2})$, $n = 0, 1, \dots, L_c - 1$. Seja L_c um número inteiro positivo par, de modo que \underline{C} inclua todas as amostras pares e ímpares

(condição não obrigatória na prática) da resposta impulsiva. Seja $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$ o vetor de coeficientes do filtro FIR do equalizador fracionário, contendo as amostras da resposta ao impulso fracionária $f(\frac{nT}{2})$ do equalizador, isto é, $F_n = f(\frac{nT}{2})$, $n = 0, 1, \dots, L-1$.

Antes do decimador K (ver Figura 6.6), a resposta combinada \underline{H} do canal e equalizador pode ser descrita de modo análogo a (6.21), através de uma matriz de convolução fracionária $\underline{\mathcal{X}}$ equivalente. Para o caso não-fracionário representado por (6.21), o intervalo relativo entre as linhas desta matriz de convolução é T . No entanto, para a matriz $\underline{\mathcal{X}}$ do caso fracionário o intervalo relativo entre suas linhas é $T/2$ – o que implicitamente gera, a nível de matriz de convolução, o conceito de fluxo de sinal par e ímpar. Tal sistema matricial, quando referido à saída do decimador K , terá suas linhas pares mantidas e suas linhas ímpares eliminadas, resultando no sistema

$$\underline{H}^\downarrow = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_2 \\ H_4 \\ \vdots \\ H_{2\left(\left\lceil \frac{L_c+L-1}{2} \right\rceil - 1\right)} \end{bmatrix} = \underline{\mathcal{X}}^\downarrow \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & & & & & \\ C_2 & C_1 & C_0 & & & \mathbf{0} \\ \vdots & C_3 & C_2 & C_1 & C_0 & \\ C_{L_c-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ & C_{L_c-1} & C_{L_c-2} & \ddots & \ddots & \\ & & & & & C_1 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & C_3 \\ & & \mathbf{0} & & & \vdots \\ & & & & & C_{L_c-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{L-1} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

onde $\{\cdot\}^\downarrow$ é o operador que resulta na eliminação das linhas ímpares da matriz argumento e $\lceil \cdot \rceil$ é o operador que resulta no inteiro mais próximo e maior que o argumento.

Por exemplo, seja $L_c = L = 4$ tal que $\underline{C} = [C_0 \ C_1 \ C_2 \ C_3]^T$ e $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ F_2 \ F_3]^T$. Referida à entrada do decimador K , têm-se uma matriz de convolução fracionária equivalente $\underline{\mathcal{X}}$ que origina o sistema de equações

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \\ H_5 \\ H_6 \end{bmatrix} = \mathcal{X} \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 \\ C_3 & C_2 & C_1 & C_0 \\ 0 & C_3 & C_2 & C_1 \\ 0 & 0 & C_3 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

A matriz \mathcal{X} , ao ser referida à saída do decimador K , dá origem ao sistema de equações

$$\underline{H}^\downarrow = \begin{bmatrix} H_0 \\ H_2 \\ H_4 \\ H_6 \end{bmatrix} = \mathcal{X}^\downarrow \cdot \underline{F} = \begin{bmatrix} C_0 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_0 & 0 \\ 0 & C_3 & C_2 & C_1 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Observe que \mathcal{X}^\downarrow é uma matriz com $\left\lceil \frac{L_c + L - 1}{2} \right\rceil$ linhas e L colunas. A condição ZF aplicada em (6.40) implica que $\underline{H}^\downarrow = \underline{H}_d^\downarrow$ onde $\underline{H}_d^\downarrow$ é um vetor de dimensão $\left\lceil \frac{L_c + L - 1}{2} \right\rceil$ cujos componentes são todos nulos exceto o de valor unitário na posição d .

Para que o sistema de equações (6.40) tenha pelo menos uma solução para o vetor de incógnitas \underline{F} , solução que objetiva determinar \underline{F} para que o equalizador atinja ZF, é necessário que $\left\lceil \frac{L_c + L - 1}{2} \right\rceil \leq L$, ou equivalentemente, $L \geq L_c - 1$. Esta é uma exigência radicalmente mais factível do que a exigência $L \rightarrow \infty$ necessária à classe de equalizadores não-fracionários.

Note que a obtenção de \underline{F} através de (6.40) para $\underline{H}^\downarrow = \underline{H}_d^\downarrow$ implica que o termo $\mathcal{X}^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}}$, com $\underline{F}^{\text{PAR}} = \underline{F}$, força as componentes pares de \underline{H} a igualarem \underline{H}_d na interpretação multi-canal dada por (6.37).

Sempre que $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$ apresentarem zeros comuns, (6.36) pode ser escrita como

$$H(z) = C^{\text{ZCOM}}(z) \left(C_r^{\text{PAR}}(z) F^{\text{PAR}}(z) + C_r^{\text{IMPAR}}(z) F^{\text{IMPAR}}(z) \right) \quad (6.41)$$

onde $C^{\text{ZCOM}}(z)$ é o polinômio em z resultante do produto de todos os monômios $(z - z_m)$, sendo z_m , $m = 0, 1, \dots, N_{zc} - 1$, a m -ésima frequência do conjunto de N_{zc} zeros comuns a

$$C^{\text{PAR}}(z) \text{ e } C^{\text{IMPAR}}(z), \text{ com } C_r^{\text{PAR}}(z) = \frac{C^{\text{PAR}}(z)}{C^{\text{ZCOM}}(z)} \text{ e } C_r^{\text{IMPAR}}(z) = \frac{C^{\text{IMPAR}}(z)}{C^{\text{ZCOM}}(z)}.$$

Utilizando o conceito de matriz de convolução, (6.41) é dada no domínio tempo por,

$$\underline{H} = \mathcal{X}^{\text{ZCOM}} \left(\mathcal{X}_r^{\text{PAR}} \underline{F}^{\text{PAR}} + \mathcal{X}_r^{\text{IMPAR}} \underline{F}^{\text{IMPAR}} \right) \quad (6.42)$$

Observe que a matriz de convolução fracionária equivalente do sistema de equações (6.42) não é mais identicamente separável em componentes pares e ímpares, como o é (6.37). Portanto, ao referir-se tal matriz à saída do decimador K , por não haver mais um conjunto de linhas pares separável do conjunto de linhas ímpares, o sistema de equações resultante não é mais factível de ser reduzido à forma dada em (6.38). Nesta situação, a condição ZF não é mais garantida apenas fazendo-se $L \geq L_c - 1$. No entanto, é mostrado em [Johnson1] que um equalizador CMA fracionário destinado a equalizar um canal físico que apresente zeros comuns aos sub-canais $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$ pode convergir para a condição ZF desde que L seja “suficientemente grande”, mas não necessariamente infinito. A prática mostra que isto é verdadeiro, muito embora a convergência de um equalizador CMA fique algo dificultada quando os sub-canais apresentam muitos zeros comuns. Em [Endres1] é mostrado que o único algoritmo a convergir satisfatoriamente com este tipo de canal, dentre os presentes no atual cenário e para SNR=35dB, é o LMS cíclico [Giannakis]. O LMS cíclico minimiza a função de custo $J_{\text{LMS}}(n) = |y(n) - s(n-d)|^2$, onde $y(n)$ é a saída do equalizador e $s(n-d)$ é a seqüência originalmente transmitida com um atraso d . O LMS cíclico apresenta o inconveniente de necessitar da estimativa *a priori* do coeficiente C_0 do canal e da variância da fonte no sinal recebido. Como isto não é possível na prática, J_{LMS} é minimizada com um grau de liberdade tal que ocorre redução de ISI, mas com magnitude e fase da constelação de saída desconhecidas. Aliás, [Endres1] dá indício que este é o único caso em que o LMS cíclico apresenta desempenho melhor que o CMA. De fato, o desempenho do LMS cíclico é, em geral, sofrível se comparado com o elenco de algoritmos atuais.

É possível mostrar que zeros comuns aos sub-canais $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$ equivalem a pares de zeros de $C(z)$ situados em posições equidistantes da origem do plano z sobre uma reta que a contém [Jury][Fijalkow][Tugnait][Tong2]. No jargão de equalização, é dito que a condição ZF é perfeitamente alcançável se há disparidade (nenhuma raiz comum) entre os sub-canais ou, equivalentemente, se não há pares de raízes refletidas de $C(z)$ com relação à origem. A Figura 6.10 mostra a equivalência entre raízes de $C(z)$ refletidas e raízes comuns aos sub-canais $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$.

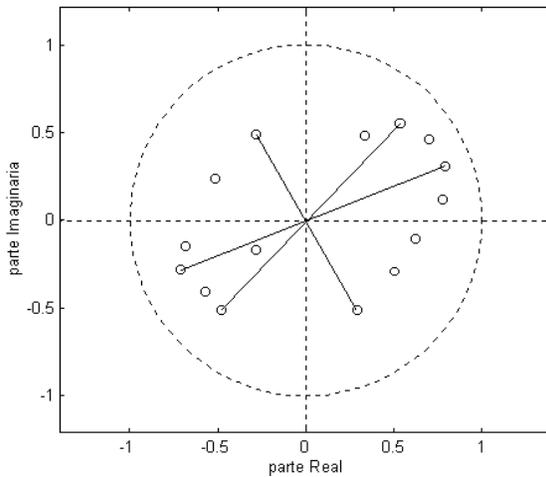


Fig. 6.10a: Zeros de $C(z)$.

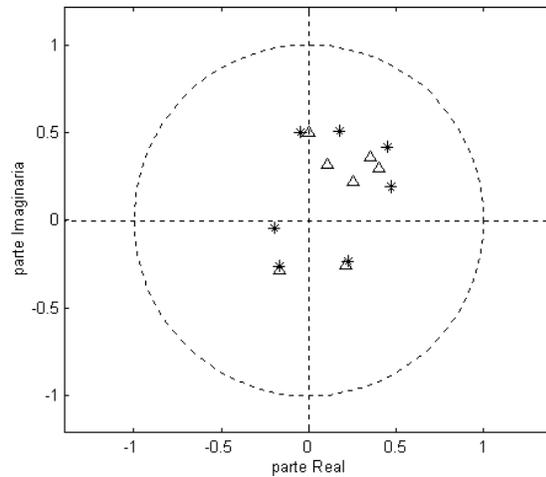


Fig. 6.10b: Zeros de $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$ e $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$.

Figura 6.10: Equivalência entre pares de raízes de $C(z)$ refletidas com relação à origem e pares de raízes comuns entre os sub-canais $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$. Para cada par de raízes aproximadamente refletidas sobre a origem na Figura 6.10a existe um par de raízes próximas na Figura 6.10b.

6.4.4 Condições Ideais para ZF em um equalizador CMA

Tendo em vista a discussão anterior em toda a sua extensão, é possível, então, definir as condições ideais para que um equalizador CMA super-amostrado atinja perfeitamente a situação ZF. É importante ressaltar que o conjunto destas condições constitui uma idealização não encontrada em nenhum caso prático, servindo apenas de referência para uma primeira avaliação do ambiente operacional em que um equalizador CMA fracionário deverá funcionar. Quanto mais próximo o ambiente operacional estiver das referidas condições, mais facilidade terá o equalizador em atingir um ponto de convergência próximo à situação ZF. As condições operacionais ideais para ZF são:

- I. Característica estatística da fonte de informação: A seqüência que representa a fonte de informação possui média zero, distribuição uniforme, e apresenta independência estatística entre amostras. Em [LeBlanc] Le Blanc faz um exaustivo estudo do comportamento de equalizadores fracionários CMA quanto à correlação e quanto à distribuição estatística da fonte. O resultado que emerge de [LeBlanc] é que, para fontes cuja distribuição apresenta valor de curtose κ entre a da distribuição uniforme ($\kappa = 1$) e a da distribuição Gaussiana ($\kappa = 3$), os mínimos da função de custo J_G do algoritmo CMA resultam factíveis de serem alcançados pelo Gradiente Estocástico (à medida que κ aproxima-se de 3, menor torna-se o gradiente de J_G na direção dos mínimos), e, portanto, a convergência do CMA é possível para esta situação. Para fontes cuja distribuição apresenta $\kappa > 3$ o CMA diverge. É mostrado também que a correlação da fonte influencia o desempenho do CMA na medida em que altera a posição dos mínimos – o que não impede a

convergência. No entanto, para fontes altamente correlacionadas, falsos mínimos são acrescentados à J_G , o que pode impedir a convergência do CMA.

- II. Ruído aditivo: Não há ruído aditivo no canal de transmissão. Obviamente esta é uma situação ideal que jamais é encontrada na prática.
- III. Disparidade de sub-canais: Não existem raízes comuns às funções de transferência FIR $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$ que representam os sub-canais. Esta condição estende-se também a sistemas que utilizam múltiplos canais originados por diversidade espacial (super-amostragem é considerada diversidade temporal), como por exemplo, sistemas que utilizam um conjunto de múltiplas antenas receptoras [Gesbert][Fijalkow].
- IV. Dimensão do equalizador: O equalizador apresenta um dimensão L tal que $L \geq L_c - 1$, onde L_c é a dimensão da dispersão de canal. Em [Endres1] é apresentado um estudo de considerável abrangência sobre a sensibilidade de um equalizador fracionário CMA quanto à violação desta condição.

6.4.5 Algumas Definições Operacionais

Muito se falou em ISI neste estudo até o presente momento, associando-a à idéia de “reverberação” no canal, mas não foi sugerida ainda uma definição quantitativa da mesma. Uma possível definição, que será adotada neste estudo, é denominada de ISI de pico [Gitlin2], e é dada por

$$\text{ISI} = \frac{\sum_k |H_k^\downarrow| - \max_k |H_k^\downarrow|}{\max_k |H_k^\downarrow|} \quad (6.43)$$

onde H_k^\downarrow é o k -ésimo componente do vetor \underline{H}^\downarrow definido em (6.38).

Ainda resta determinar a forma de implementação do bloco decimador K na Figura 6.6. Embora a representação da operação de decimação por um bloco específico seja instrutiva, na prática ela não é implementada desta forma. Ao invés disto, utiliza-se o conceito de regressor fracionário de canal. O n -ésimo regressor fracionário do canal é o vetor $\underline{r}(n) \in \mathbb{C}^L$, $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$, \mathbb{C} é o conjunto dos números complexos, vetor dado por

$$r_k(n) = u(L - 1 - k + i), \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (6.44)$$

onde:

L é a dimensão do equalizador,

u é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária $\frac{T}{2}$ do canal, com $i = 1, 3, \dots, N_a - 1$ variando na medida em que $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$ tal que $i = 2n + 1$,

N_a é o número total de amostras a serem recebidas por amostragem fracionária do canal,

$N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1$ é o número total de regressores a serem obtidos do canal ,

T é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor,

$\lfloor \cdot \rfloor$ é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.

Desta maneira, a saída $y(n)$, no instante n , é simplesmente dada por

$$y(n) = \underline{F}^T(n) \cdot \underline{r}(n) \quad (6.45)$$

onde $\underline{F}(n)$ é o vetor $\underline{F} = [F_0 \ F_1 \ \dots \ F_{L-1}]^T$ que define os coeficientes do filtro do equalizador no instante n . Note que o intervalo de tempo contínuo associado ao intervalo entre os instantes discretos n e $n+1$ é o intervalo de *Baud* do transmissor, ou T . Assim, a cada símbolo $s(n)$ transmitido pelo transmissor é gerado um correspondente regressor de canal $\underline{r}(n)$ no receptor, ficando, portanto, implicitamente implementada a operação de decimação. No entanto, o intervalo de tempo contínuo associado ao intervalo entre os componentes de cada regressor \underline{r} é $\frac{T}{2}$, garantindo a convolução fracionária realizada pelo filtro.

6.5 Equalização com o Algoritmo CMA

No cenário de desconvolução autoidata, o algoritmo CMA (*Constant Modulus Algorithm*) é universalmente utilizado, seja para canais eletromagnéticos ou acústicos. Tem havido um imenso interesse da comunidade de pesquisadores neste algoritmo, desde sua proposição em 1980 por Godard, em parte devido ao seu baixo custo computacional e em parte devido à sua capacidade de desconvoluir canais para os quais os demais algoritmos para desconvolução autoidata flagrantemente falham.

A capacidade autoidata e a versatilidade do algoritmo CMA é amplamente reconhecida quanto à tarefa de desconvoluir o conjunto de símbolos recebidos a partir de uma situação inicial de alto ISI, conhecida como “olho fechado”, até a convergência do algoritmo, situação de baixo ISI conhecida como “olho aberto”. No entanto, o requerimento de alta velocidade de transmissão dos sistemas digitais atuais tem levado ao uso de constelações de símbolos cada vez mais densas. Para tais constelações densas, o erro de regime permanente do algoritmo CMA é insuficiente para que a probabilidade de erro nos símbolos recebidos, ou SER (*Symbol Error Rate*), reduza-se a níveis aceitáveis.

Devido à excelente performance autoidata do algoritmo CMA, a comunidade de pesquisadores tem preferido conviver com o problema de alto erro de regime permanente deste algoritmo. A solução universalmente proposta para contornar este problema é utilizar o algoritmo CMA até a ISI atingir a melhor condição de “olho aberto” possível e então comutar para um algoritmo auto-supervisionado denominado Decisão Direta (DD – Direct Decision). O algoritmo DD é incapaz de desconvoluir o conjunto de símbolos a partir de uma situação inicial de “olho fechado”. Mas, uma vez inicializado a partir de uma situação

de ISI relativamente baixa, é capaz de atingir níveis de erro de regime permanente muito menores que o algoritmo CMA.

O algoritmo baseia-se na minimização de uma função de custo J_{CM} que objetiva ajustar uma potência P inteira do conjunto de saídas do equalizador a uma constante real e positiva R_P . Esta constante é escolhida de modo a projetar sobre um círculo todos os pontos da constelação de saída do equalizador. Em [Godard] J_{CM} é definida como

$$J_{CM} = \frac{1}{4} E \left\{ \left(|y|^P - R_P \right)^2 \right\} \quad (6.46)$$

para algum inteiro P . Note que J_{CM} é uma dispersão estatística de ordem P [Papoulis] e que inerentemente utiliza estatísticas de ordem superior do conjunto de saídas y do equalizador.

Quando $P=1$, J_{CM} reduz-se à função de custo utilizada no pioneiro trabalho de Sato [Sato], em 1976. Embora P possa teoricamente assumir qualquer valor inteiro, a suprema maioria das implementações de equalizadores autodidatas atuais aplica o algoritmo CMA com a função de custo J_{CM} para $P=2$, minimizada pelo Gradiente Estocástico [Treichler1][Proakis][Haykin2]. Assim, neste estudo, a função J_{CM} para $P=2$ será referida como Função de Custo CMA ou Função de Custo de Godard, representada por J_G , e dada por

$$J_G = \frac{1}{4} E \left\{ \left(|y|^2 - \gamma \right)^2 \right\} \quad (6.47)$$

onde γ é a constante de dispersão do algoritmo CMA definida por

$$\gamma = \frac{E \left\{ |A|^4 \right\}}{E \left\{ |A|^2 \right\}} \quad (6.48)$$

sendo $A = \{s_0, s_1, \dots, s_{M-1}\}$ o conjunto de M possíveis símbolos, ou alfabeto, referente ao tipo de modulação utilizada. Godard mostra em [Godard] que γ , assim definido, minimiza J_G .

6.5.1 Características do Algoritmo CMA

A função J_G , definida em (6.47), é uma função não-convexa, e portanto possui mínimos locais. Isto condiciona a minimização de J_G até o mínimo global à trajetória percorrida pelo Gradiente Estocástico. É possível que a trajetória do gradiente fique presa em um mínimo local não significativo, quando a convergência para o mínimo global jamais é alcançada [Ding]. Isto faz com que a convergência de equalizadores CMA com base em filtros FIR transversais seja fortemente dependente da inicialização dos coeficientes (ou pesos) do filtro [Chung]. Ainda, para que a estabilidade da delicada dinâmica do processo de minimização de J_G não seja comprometida, o passo de adaptação deve ficar nas vizinhanças do valor 1×10^{-3} , como um compromisso entre velocidade de convergência e erro de regime permanente [Endres1].

Observe também de (6.47) que a minimização de J_G é um procedimento que, em última análise, procura minimizar a variância da diferença entre o quadrado da norma Euclidiana $|\cdot|^2$ do conjunto de saídas y do equalizador e a constante de dispersão γ . Ocorre que a norma Euclidiana impõe uma ambigüidade de fase para $|y|^2$, ou seja, $|y \cdot e^{j\varphi}|^2 = |y|^2 \cdot |e^{j\varphi}|^2 = |y|^2$. Assim, para qualquer rotação de fase φ , $J_G(y) = J_G(y \cdot e^{j\varphi})$. Portanto, ao se utilizar modulação cujo alfabeto de símbolos seja complexo, como M -PSK e M -QAM, a saída de um equalizador CMA pode convergir para a constelação de símbolos originalmente transmitida, mas girada de um ângulo φ dependente da inicialização, da dinâmica de atualização e também do próprio canal [Garth]. Para M -PSK esta convergência espúria do algoritmo CMA é contornada utilizando-se codificação diferencial DPSK [Carlson]. Para M -QAM o efeito desta convergência espúria não é tão severa, mas, para certas situações é necessário utilizar um circuito adicional separado para girar a saída do equalizador após a sua convergência [Garth][Treichler4].

Neste momento, é oportuno lembrar que a minimização de J_G busca projetar sobre um círculo todos os pontos da constelação de saída do equalizador, tal que $|y|^2 = \gamma$ para todo y . Se este resultado representa a equalização correta para modulação M -PSK, pois todos os símbolos deste alfabeto possuem módulo constante, para M -QAM seria considerado uma completa falha do processo de equalização. Por que, então, o algoritmo CMA é universalmente utilizado para desconvolução de canais com sinalização M -QAM, já que os símbolos do alfabeto M -QAM não apresentam módulo constante? Ocorre que a minimização de J_G é feita com base em uma estrutura adaptativa cuja arquitetura é a de um simples filtro FIR transversal. Quando a minimização de J_G é feita com base na adaptação dos parâmetros livres de tal estrutura específica, como efeito secundário do processo de minimização de J_G , obtém-se o processo de desconvolução do canal [Treichler3]. É interessante notar que, se um equalizador CMA com arquitetura FIR transversal desconvoluir o canal com γ dado por (6.48), o mesmo processo de desconvolução será obtido para qualquer outro valor de γ : Para um equalizador com γ não definido por (6.48) ? portanto com γ não ótimo ? a única diferença observada na constelação de saída será um fator de escala real [LeBlanc]. Desta maneira, o canal é desconvoluído pelo ajuste do filtro FIR transversal mesmo quando J_G é parametrizada por um valor não ótimo de γ para a constelação dada.

Portanto, nem toda estrutura adaptativa ? mesmo aquelas consideradas poderosas o suficiente para aprender o processo estocástico subjacente ao sinal recebido ? conduzirá ao êxito o processo de desconvolução autodidata do canal. Os autores deste estudo experimentaram a minimização de J_G com base no ajuste via Gradiente Estocástico dos parâmetros livres de estruturas adaptativas denominadas redes neurais RBF (*Radial Basis Function*) [Haykin3]. Para as várias arquiteturas experimentadas [Kassam][Zhang][McLaughlin][Mulgrew], o único resultado obtido foi a projeção de todos os pontos da constelação de saída do equalizador no único ponto do plano complexo

$\sqrt{\gamma} \cdot e^{j\theta}$, onde θ depende da inicialização da estrutura. A lição aprendida aqui é que de nada adianta utilizar arquiteturas poderosas (redes neurais RBF são consideradas aproximadores não-lineares universais [Haykin2]) para minimização de uma função de custo se o mínimo desta função de custo não expressa exatamente o resultado que se almeja.

6.5.2 O Algoritmo CMA

Apesar de todos estes condicionantes e detalhes específicos, o equalizador CMA FIR transversal é o mais amplamente utilizado e testado na implementação de equalizadores autodidatas [Haykin1], pois, em sistemas práticos, seu desempenho tem sido comprovadamente superior ao dos demais métodos de desconvolução autodidata vigentes [LeBlanc][Endres1].

A Figura 6.11 mostra um típico equalizador CMA FIR transversal no instante n . Como o instante é definido, não explicitar-se-á o indexador n para as variáveis envolvidas, a menos que n não seja inequivocamente definido pelo contexto. Este procedimento será adotado visando a compacidade das equações no desenvolvimento que segue.

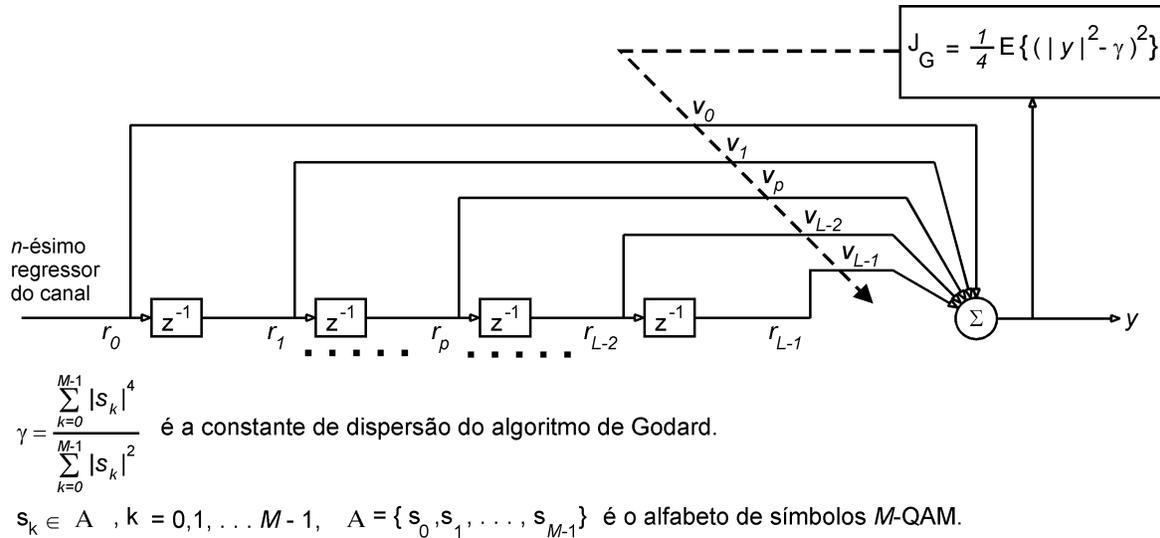


Figura 6.11: Equalizador CMA com filtro FIR transversal.

A partir de sua inicialização, o vetor de pesos $\underline{V} = [V_0 \ V_1 \ \dots \ V_{L-1}]^T$ é atualizado pelo Gradiente Estocástico [Haykin2] objetivando minimizar a função de custo de Godard J_G .

Seja o n -ésimo regressor do canal $r(n)$, $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$, definido por

$$r_k(n) = u(L - 1 - k + i), \quad k = 0, 1, \dots, L - 1 \quad (6.49)$$

onde:

L é a dimensão do equalizador,

u é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária $\frac{T}{2}$ do canal, com $i = 1, 3, \dots, N_a - 1$ variando na medida em que $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$ tal que $i = 2n + 1$,

N_a é o número total de amostras a serem recebidos por amostragem fracionária do canal,

$N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1$ é o número total de regressores a serem obtidos do canal ,

T é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor,

$\lfloor \cdot \rfloor$ é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.

A saída do equalizador é dada por

$$y = \underline{V}^T \cdot \underline{r} \quad (6.50)$$

ou

$$y = \sum_{k=0}^{L-1} V_k \cdot r_k \quad (6.51)$$

que é identicamente equivalente à

$$y = \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\} \operatorname{Re}\{r_k\} - \operatorname{Im}\{V_k\} \operatorname{Im}\{r_k\}] \right\} + j \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\operatorname{Re}\{V_k\} \operatorname{Im}\{r_k\} + \operatorname{Im}\{V_k\} \operatorname{Re}\{r_k\}] \right\} = \quad (6.52)$$

$$= \operatorname{Re}\{y\} + j \operatorname{Im}\{y\}, \quad j = \sqrt{-1}$$

A minimização da função de custo J_G é feita através de sucessivos ajustes do vetor \underline{V} pelo algoritmo Gradiente Estocástico [Haykin2], à medida que n é incrementado:

$$J_G = \frac{1}{4} E \left\{ \left(|y|^2 - \gamma \right)^2 \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J_G(n) \quad (6.53)$$

$$J_G(n) = \frac{1}{4} \left\{ \left(|y(n)|^2 - \gamma \right)^2 \right\} \quad (6.54)$$

$$V_p(n+1) = V_p(n) + \eta \cdot (-\nabla_p J_G(n)), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6.55)$$

onde V_p é o p -ésimo peso do vetor de pesos \underline{V} , η é o passo de adaptação, $\eta > 0$, e

$$\nabla_p J_G = \nabla_p^R J_G + j \nabla_p^I J_G = \frac{\partial J_G}{\partial \operatorname{Re}\{V_p\}} + j \frac{\partial J_G}{\partial \operatorname{Im}\{V_p\}} \quad (6.56)$$

é o p -ésimo componente do gradiente complexo de J_G tomado com relação à variação do p -ésimo componente do vetor \underline{V} .

Substituindo (6.54) em (6.56),

$$\nabla_p J_G = \frac{1}{2} (|y|^2 - \gamma) \left[\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Re}\{V_p\}} + j \frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Im}\{V_p\}} \right] \quad (6.57)$$

Mas de (6.52),

$$|y|^2 = (\text{Re}\{y\})^2 + (\text{Im}\{y\})^2 = \quad (6.58)$$

$$= \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{V_k\} \text{Re}\{r_k\} - \text{Im}\{V_k\} \text{Im}\{r_k\}] \right\}^2 + \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} [\text{Re}\{V_k\} \text{Im}\{r_k\} + \text{Im}\{V_k\} \text{Re}\{r_k\}] \right\}^2$$

De (6.58), com referência à (6.57),

$$\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Re}\{V_p\}} = 2(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) \quad (6.59)$$

$$\frac{\partial |y|^2}{\partial \text{Im}\{V_p\}} = 2(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) \quad (6.60)$$

Substituindo (6.59) e (6.60) em (6.57) e multiplicando por -1 ,

$$-\nabla_p J_G = (\gamma - |y|^2) [(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) + j(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\})] \quad (6.61)$$

mas

$$(\text{Re}\{y\} \text{Re}\{r_p\} + \text{Im}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) + j(\text{Im}\{y\} \text{Re}\{r_p\} - \text{Re}\{y\} \text{Im}\{r_p\}) = y \cdot r_p^* \quad (6.62)$$

e substituindo (6.62) em (6.61)

$$-\nabla_p J_G = y(\gamma - |y|^2) r_p^* \quad (6.63)$$

Substituindo (6.63) em (6.55), obtém-se a equação de atualização do vetor \underline{V} para a minimização da função de custo J_G através do Gradiente Estocástico:

$$\underline{V}(n+1) = \underline{V}(n) + \eta \cdot y(n) (\gamma - |y(n)|^2) \underline{r}^*(n) \quad (6.64)$$

sendo $e_{cma}(n) = y(n) (\gamma - |y(n)|^2)$ denominado de Função de Erro do algoritmo CMA [LeBlanc].

A Tabela 4.1 esquematiza o algoritmo CMA aplicado à equalização de canal:

Etapa	Procedimento
1	<p>Inicializar o vetor \underline{V}:</p> $V_k = \begin{cases} 0 + j0, & k = 0, 1, \dots, L-1, \quad k \neq \xi \\ 1 + j0, & k = \xi \end{cases}$ <p>onde $j = \sqrt{-1}$, L é a dimensão do vetor \underline{V} (dimensão do equalizador) e ξ, $0 < \xi < L-1$, é o índice do único peso do vetor de pesos \underline{V} a ser inicializado com o valor $1+j0$. Esta inicialização é amplamente utilizada na prática de equalizadores CMA e é denominada de inicialização <i>single spike</i> [LeBlanc][Haykin4][Endres1][Chung].</p>
2	<p>Inicializar o indexador de amostras recebidas por amostragem fracionária do canal: $i = 1$</p>
3	<p>Inicializar o indexador de regressor do canal (ou indexador de instante/iteração): $n = 0$</p>
4	<p>Obter o n-ésimo regressor do canal $\underline{r}(n)$:</p> $r_k(n) = u(L-1-k+i), \quad k = 0, 1, \dots, L-1$ <p>onde u é a seqüência de amostras recebida por amostragem fracionária $\frac{T}{2}$ do canal, com $i = 1, 3, \dots, N_a - 1$ variando na medida em que $n = 0, 1, \dots, N_r - 1$, sendo N_a o número total de amostras a serem recebidas por amostragem fracionária do canal, $N_r = \left\lfloor \frac{N_a - L - 1}{2} \right\rfloor + 1$ é o número total de regressores a serem obtidos do canal e T é o intervalo entre os símbolos gerados no transmissor. $\lfloor \cdot \rfloor$ é o operador que resulta no inteiro mais próximo e menor que o argumento.</p>
5	<p>Obter a saída do equalizador no instante n:</p> $y(n) = \underline{V}^T(n) \cdot \underline{r}(n)$
6	<p>Atualizar o vetor de pesos \underline{V}:</p> $\underline{V}(n+1) = \underline{V}(n) + \eta \cdot y(n) \left(\gamma - y(n) ^2 \right) \cdot \underline{r}^*(n)$ <p>onde η é o passo de adaptação do vetor \underline{V}, $\eta > 0$.</p>
7	<p>Incrementar indexadores:</p> $i = i + 2$ $n = n + 1$

8	Testar fim de loop: Se $L + i > N_a \Rightarrow$ FIM caso contrário repetir etapas 4 a 8.
---	---

Tabela 4.1: Sumário do algoritmo CMA aplicado à equalização de canal.

6.5.3 Exemplos de Operação do Algoritmo CMA

Nos exemplos que seguem, a fonte de informação s possui média zero, variância unitária, distribuição uniforme e independente e é transmitida através do canal por meio de modulação 16-QAM. Os dois canais de microondas a serem equalizados, M2 e M6, apresentam SNR=35dB – ruído branco Gaussiano é adicionado na entrada do equalizador tal que a razão entre a variância do sinal e a variância do ruído seja 35dB. A dimensão do equalizador L é igual à dimensão da dispersão de canal L_c tal que $L = L_c = 16$. A inicialização do vetor \underline{V} segue a estratégia denominada *single spike* [Chung], que consiste em inicializar \underline{V} com $1 + j0$ na posição $\xi = L/2$, mantendo nulos os elementos nas demais posições. Em caso de não convergência, o equalizador faz novas tentativas em torno de $\xi = L/2$, isto é, $\xi = L/2 \pm \lambda$, $\lambda = 1, 2, \dots$ [Haykin4]. O passo de adaptação η do filtro do equalizador CMA é experimentalmente ajustado objetivando atender o compromisso entre rápida convergência e baixo MSE de regime permanente.

São apresentados os seguintes resultados:

- 1- Gráfico da constelação Γ na saída y do equalizador após a convergência, tendo como referência a constelação do alfabeto A da fonte, sendo A representado no gráfico pelo conjunto de símbolos \dagger .
- 2- Gráfico da constelação Φ na entrada u do equalizador que resulta na constelação Γ na saída y , tendo como referência a constelação do alfabeto A da fonte, sendo A representado no gráfico pelo conjunto de símbolos \dagger .
- 3- Gráfico da curva $ISI(i)$, $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$, onde N_a é o número total de amostras recebidas por amostragem fracionária $T/2$ do canal, e $ISI(i)$ é a medida de “reverberação” no sinal equalizado y no instante i , obtida pela Equação (6.43) calculada para este instante.
- 4- Gráfico da curva $MSE(i)$, $i = 0, 2, \dots, N_a - 1$, sendo $MSE(i)$ o erro médio quadrático entre a saída equalizada y e a seqüência original transmitida s , considerando-se para a média o intervalo de amostras que inclui o instante i e as $L + L_c - 1$ amostras anteriores ao mesmo. Adicionalmente, este gráfico mostra a reta horizontal NT que define o nível de MSE máximo permissível (ver Tabela 1.1) para que a transferência do algoritmo CMA ao algoritmo DD seja possível, caso se deseje efetuar esta operação.

5- Gráfico do módulo $|h^\downarrow(n)|$ e fase $\angle h^\downarrow(n)$, em graus, da resposta impulsiva combinada do canal e equalizador $h^\downarrow(n)$ definida pelos componentes do vetor \underline{H}^\downarrow obtido da Equação (6.38) computada após a convergência.

A Figura 6.12 mostra os resultados obtidos para a equalização do canal de microondas M2 (ver Apêndice III deste capítulo), canal considerado "comportado", pois não possui muitas raízes sobre o círculo de raio unitário e nenhum par de raízes exatamente refletidas sobre a origem. A Figura 6.13 mostra os resultados para o canal de microondas M6. Note que, para este canal, a $ISI(i)$ é menor e o $MSE(i)$ é maior do que para o canal M2. Isto ocorre porque o cursor (elemento de maior módulo) de $h^\downarrow(n)$, para quaisquer η e ξ , apresenta um ângulo de fase não nulo ($\approx 14^\circ$ na Fig. 6.13e) após a convergência, implicando no giro correspondente da constelação Γ .

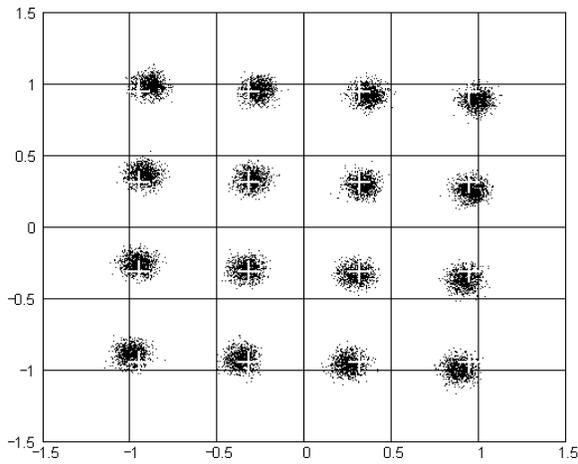


Fig. 6.12a: Γ

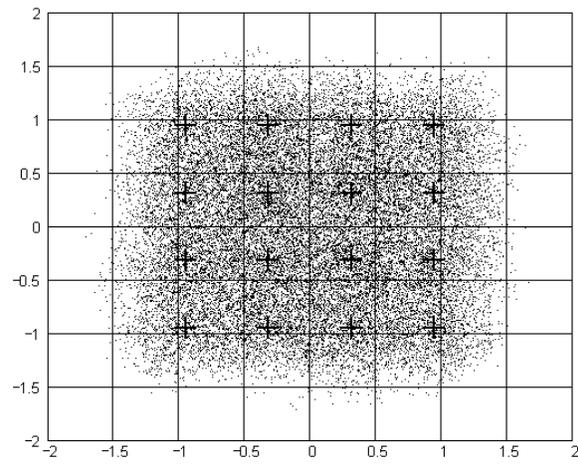


Fig. 6.12b: Φ

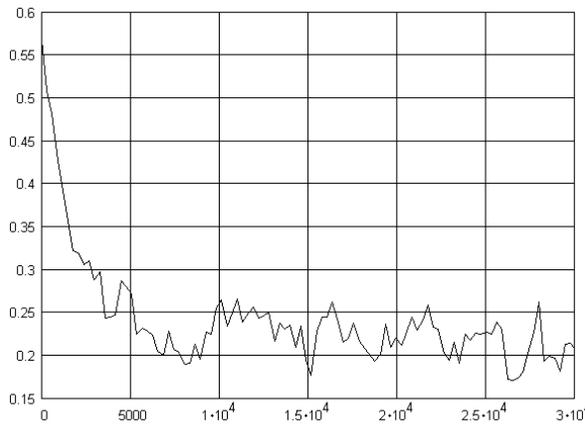


Fig. 6.12c: $ISI(i)$

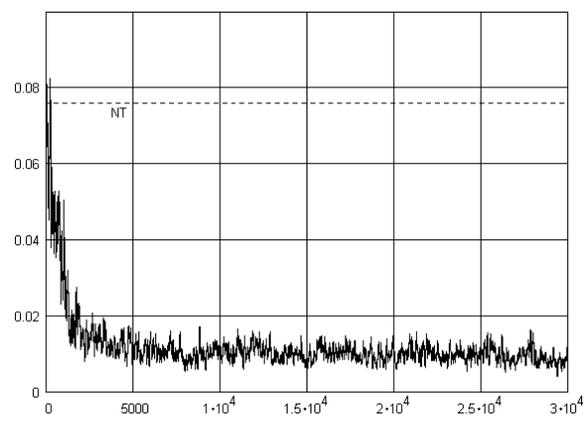


Fig. 6.12d: $MSE(i)$

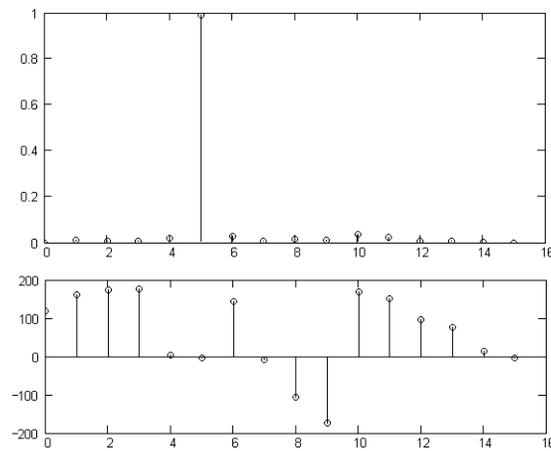


Fig. 6.12e: $|h^{\downarrow}(n)|$ e $\angle h^{\downarrow}(n) [^{\circ}]$

Figura 6.12: Resultados obtidos para o canal M2, modulação 16-QAM ($\gamma=1.32$), SNR=35dB. Parâmetros: $N_a = 30000$, $\eta = 1 \times 10^{-3}$ e $\xi = 8$.

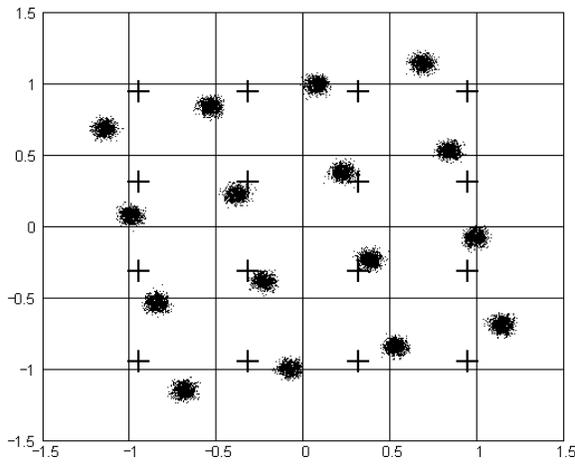


Fig. 6.13a: Γ

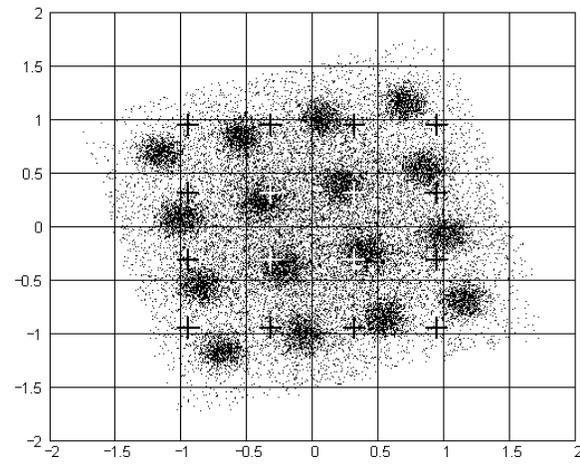


Fig. 6.13b: Φ

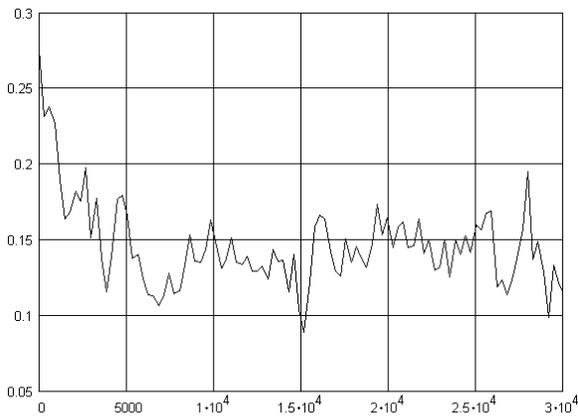


Fig. 6.13c: ISI(i)

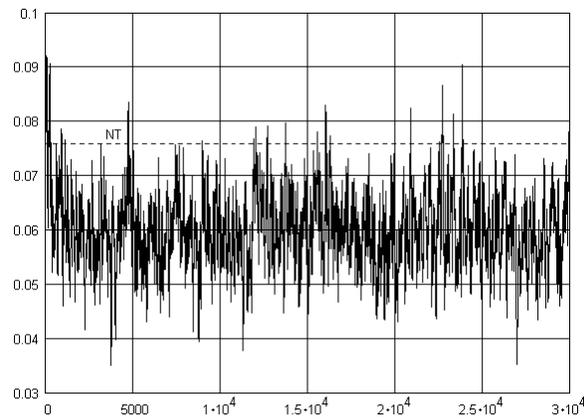


Fig. 6.13d: MSE(i)

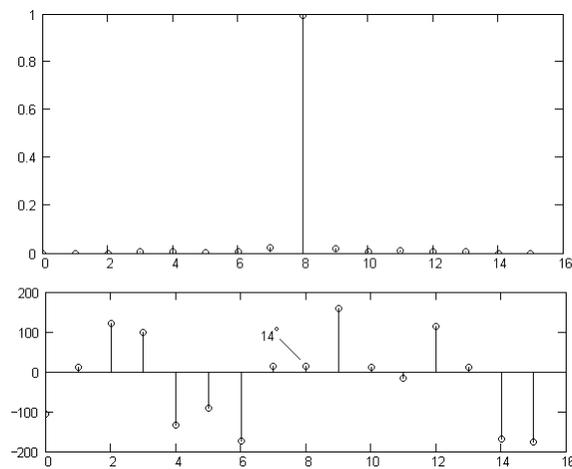


Fig. 6.13e: $|h^{\downarrow}(n)|$ e $\angle h^{\downarrow}(n)$ [$^{\circ}$]

Figura 6.13: Resultados obtidos para o canal M6, modulação 16-QAM ($\gamma=1.32$), SNR=35dB. Parâmetros: $N_a = 30000$, $\eta = 1 \times 10^{-3}$ e $\xi = 10$.

6.6 Equalizador DFE

Equalizadores DFE (DFE – *Decision Feedback Equalizer*) somam ao sinal recebido y uma realimentação negativa da filtragem das estimativas $\hat{s}(n) = Q\{o(n)\}$ dos símbolos originalmente transmitidos, na esperança de anular a dispersão do canal pela subtração da dispersão estimada pelo filtro, conforme mostra a Figura 6.14.

Um DFE não consegue desconvoluir o canal sem que o diagrama de olho esteja pelo menos parcialmente aberto. Portanto, um DFE necessita que haja um equalizador transversal prévio a ele. Assim, y na Figura 6.14 representa a saída de um equalizador transversal.

Um DFE não sofre do problema de amplificação de ruído inerente ao equalizador transversal, visto que um DFE não aproxima a inversa do canal. A ISI é reduzida pela subtração da dispersão do canal estimada pelo filtro do DFE. Desta maneira, um DFE consegue reduzir significativamente o MSE residual na saída y do equalizador transversal prévio.

Observe na Figura 6.14 que a saída o é realimentada à entrada através do quantizador Q e do filtro \underline{B} . Assim, ao ocorrer uma estimativa errada $\hat{s}(n) = Q\{o(n)\}$, o erro se propagará pelo filtro durante vários intervalos amostrais, realimentando-se sobre si mesmo. Esta situação define o chamado **erro de propagação** [Casas][Kennedy]. O erro de propagação em um DFE causa, de maneira imprevisível, a elevação da probabilidade de erro nos símbolos recebidos SER (SER – *Symbol Error Rate*) a níveis inaceitáveis durante longos intervalos de tempo. Por este motivo o uso de DFEs pode resultar em uma “faca de dois gumes” quanto ao desempenho de um sistema digital. As recentes tentativas de minimizar o erro de propagação em equalizadores DFE têm apresentado resultados apenas moderados [Balakrishnan].

Analisaremos aqui um DFE para sinais modulados cujos símbolos sejam reais (8-VSB, por exemplo). A Figura 6.14 mostra o equalizador DFE no instante n . Portanto, como o instante é definido, visando a compacidade das equações no desenvolvimento que segue, continuaremos não explicitando o indexador n para as variáveis envolvidas a menos que n não seja inequivocamente definido pelo contexto.

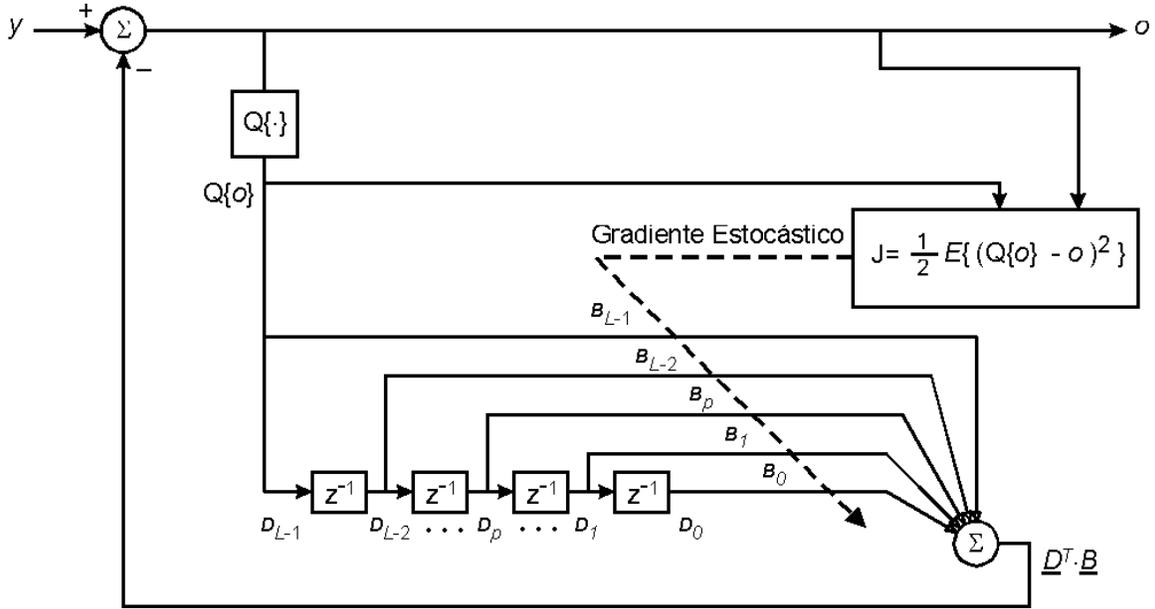


Figura 6.14: Diagrama de um Equalizador DFE. A entrada y é proveniente da saída de um equalizador transversal prévio ao DFE.

A partir de sua inicialização, o vetor de pesos $\underline{B} = [B_0 \ B_1 \ \dots \ B_{L-1}]^T$ é atualizado pelo Gradiente Estocástico, visando minimizar a função de custo J . Observe que J mede o quadrado da diferença entre a saída $Q\{o\}$ do quantizador (o símbolo mais próximo de o) e a saída o do equalizador.

A saída do equalizador é dada por

$$o(n) = y(n) - \underline{D}^T(n) \cdot \underline{B}(n) \quad (6.65)$$

onde $\underline{D} = [D_0 \ D_1 \ \dots \ D_{L-1}]^T$, ou

$$o(n) = y(n) - \sum_{k=0}^{L-1} B_k(n) D_k(n) \quad (6.66)$$

A minimização da função de custo J é feita através de sucessivos ajustes do vetor \underline{B} pelo algoritmo Gradiente Estocástico, à medida que n é incrementado:

$$J = \frac{1}{2} E\{(Q\{o\} - o)^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} J(n) \quad (6.67)$$

$$J(n) = \frac{1}{2} \{(Q\{o(n)\} - o(n))^2\} \quad (6.68)$$

$$B_p(n+1) = B_p(n) + \eta (-\nabla_p J(n)), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6.69)$$

onde B_p é o p -ésimo peso do vetor de pesos \underline{B} , η é o passo de adaptação, $\eta > 0$, e

$$\nabla_p J = \frac{\partial J}{\partial B_p} \quad (6.70)$$

é o p -ésimo componente do vetor gradiente de J tomado com relação à variação do p -ésimo componente do vetor \underline{B} .

Substituindo (6.68) em (6.70),

$$\nabla_p J(n) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (Q\{o(n)\} - o(n))^2}{\partial B_p(n)} \right] \quad (6.71)$$

Mas para $n \rightarrow \infty$, quando o processo de atualização do vetor \underline{B} supostamente converge, $Q\{o(n)\}$ torna-se um valor constante e independente do vetor \underline{B} . Portanto a derivada de $Q\{o(n)\}$ em (6.71) é nula sob convergência do processo. Tendo este fato em mente, (6.71) torna-se

$$\nabla_p J(n) = (Q\{o(n)\} - o(n)) \left[\frac{-\partial o(n)}{\partial B_p(n)} \right] \quad (6.72)$$

mas, a partir de (6.66), e como y não depende de \underline{B} , temos que

$$\frac{\partial o(n)}{\partial B_p(n)} = \frac{\partial}{\partial B_p(n)} \left[y(n) - \sum_{k=0}^{L-1} B_k(n) D_k(n) \right] = \frac{\partial}{\partial B_p(n)} \left[- \sum_{k=0}^{L-1} B_k(n) D_k(n) \right] = -D_p(n) \quad (6.73)$$

e substituindo (6.73) em (6.72) temos

$$\nabla_p J(n) = (Q\{o(n)\} - o(n)) D_p(n) \quad (6.74)$$

$$-\nabla_p J(n) = (o(n) - Q\{o(n)\}) D_p(n) \quad (6.75)$$

substituindo (6.75) em (6.69),

$$B_p(n+1) = B_p(n) + \eta (o(n) - Q\{o(n)\}) D_p(n), \quad p = 0, 1, \dots, L-1 \quad (6.76)$$

ou em forma vetorial

$$\underline{B}(n+1) = \underline{B}(n) + \eta (o(n) - Q\{o(n)\}) \underline{D}(n) \quad (6.77)$$

A Equação (6.77) define a atualização adaptativa do vetor \underline{B} do filtro do DFE mostrado na Figura 6.14.

Apêndice I – A Transformada Z

AI.1 – Revisão de Transformada de Laplace e Frequência Complexa

Seja $x(t)$ uma função contínua no domínio tempo. Define-se como Transformada de Laplace de $x(t)$ a representação matemática:

$$X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\} = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (\text{A1.1})$$

sendo $s = \alpha + j\omega$

A Equação (A1.1), determina o Espectro de Frequências Complexas do sinal $x(t)$, isto é, $X(s)$.

Analise o porquê desta denominação. Visto que $s = \alpha + j\omega$, então $X(s)$ é uma função com domínio s complexo. A imagem $X(s)$ é também complexa pois (A1.1) pode ser interpretada como uma soma ponderada de valores de $x(t)$ ao longo de intervalos infinitesimais de tempo com fatores de ponderação dado por números complexos e^{-st} . Visto que a variável de integração t em (A1.1) tem a dimensão de tempo, o expoente da exponencial e^{-st} deve ser uma grandeza adimensional, caso contrário estaria em desacordo com a interpretação de (A1.1) como uma soma de valores de $x(t)$ ao longo de intervalos infinitesimais de tempo. Por exemplo, se $x(t)$ é dado em [volt] então $X(s)$ é dado em [volt×segundo]. Portanto, o parâmetro s deverá ter a dimensão do inverso do tempo, isto é, frequência, ou, equivalentemente, variação. Sendo assim, s é uma grandeza complexa que representa modos de variação.

A parte real α_0 de uma específica frequência complexa $s = s_0$, sendo $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ pertencente ao conjunto s de frequências complexas do espectro que representa $x(t)$, está associada à variação exponencial $e^{-\alpha_0 t}$ da função $x(t)$. Por outro lado, a parte imaginária ω_0 de $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$ está associada à variação oscilatória senoidal $e^{-j\omega_0 t} = \cos \omega_0 t - j \sin \omega_0 t$ da função $x(t)$, naquela frequência $s_0 = \alpha_0 + j\omega_0$. Portanto, visto que $e^{-st} = e^{-\alpha t} (\cos \omega t - j \sin \omega t)$, a Transformada de Laplace decompõe um sinal no tempo $x(t)$ em modos de variação exponenciais (não-oscilatórias) e senoidais (oscilatórias), cada um deles determinado por cada frequência do conjunto s de frequências complexas.

O módulo da componente espectral complexa $X(s_0) = |X(s_0)|e^{j\angle\{X(s_0)\}}$, i.e. $|X(s_0)|$, representa a “intensidade” da contribuição daquele modo de variação na frequência s_0 . A fase $\angle\{X(s_0)\}$ do número complexo $X(s_0)$ representa o ângulo associado a quão “deslocada” no tempo está a contribuição da variação oscilatória $e^{-j\omega_0 t}$ na frequência s_0 . Um ângulo de fase para $X(s_0)$ de $\pi/2$ radianos, por exemplo, significa que o modo de variação oscilatório na frequência s_0 é

$$e^{-j\omega_0 t} e^{j(\pi/2)} = e^{-j(\omega_0 t + \pi/2)} = e^{-j\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \frac{\pi}{2}\right)} = e^{-j\frac{2\pi}{T_0}\left(t + \frac{T_0}{4}\right)} \quad (\text{A1.2})$$

ou seja, o modo de variação está deslocado $T_0/4$ segundos no tempo, sendo T_0 o período da componente oscilatória senoidal na frequência complexa s_0 definido por $T_0 = 2\pi/\omega_0$.

A interpretação acima baseia-se no fato de (A1.1) somar ponderando ao longo do tempo $x(t)$ com a exponencial e^{-st} , isto é, (A1.1) procura estabelecer o grau de semelhança entre $x(t)$ e e^{-st} . Especificamente, (A1.1) procura estabelecer o grau de semelhança entre $x(t)$ e variações exponenciais e/ou senoidais definidas pela frequência complexa s . Quanto mais “semelhante” for $x(t)$ com o fator e^{-st} na frequência s , maior será o produto $x(t)e^{-st}$, e, portanto, maior será o módulo $|X(s)|$ de $X(s) = |X(s)|e^{j\angle\{X(s)\}}$. Ainda, o grau de “semelhança” $|X(s)|$ na frequência s é válido para um deslocamento no tempo da variação senoidal dado por $\angle\{X(s)\}T/2\pi$ segundos, ou seja, a variação oscilatória na frequência s é caracterizada por $e^{-j\omega(t + \angle\{X(s)\}T/2\pi)}$, sendo $T = 2\pi/\omega$.

Resumindo: O espectro $X(s)$, distribuído ao longo do plano complexo s , define como $x(t)$ é construída a partir de variações senoidais e exponenciais.

Tendo isto em mente, a partir de (A1.1) é possível mostrar que [Zeldovich]:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\alpha_m - j\infty}^{\alpha_m + j\infty} X(s)e^{st} ds \quad (\text{A1.3})$$

A Equação (A1.3) é a chamada Transformada de Laplace Inversa de $X(s)$. Dado o espectro $X(s)$, a Equação (A1.3) especifica como reconstruir $x(t)$ no tempo. A partir do Teorema de Cauchy (ver Apêndice II), é possível mostrar que os limites de integração $\alpha_m - j\infty$ a $\alpha_m + j\infty$ em (A1.3), muito embora definam um caminho retilíneo, equivalem a “varrer” ponto a ponto o plano complexo s . Esta varredura total do plano s é garantida desde que a reta α_m esteja à direita do pólo de $X(s)$ mais à direita no plano s . Assim, (A1.3) pode ser interpretada como uma “varredura” em todo plano s efetuando uma soma

ponderada das componentes espectrais $X(s)$, com fator de ponderação dado por e^{st} . Em outras palavras, (A1.3) reconstrói (expande) $x(t)$ a partir de uma série infinita de termos e^{st} , ponderados por coeficientes $X(s)$, infinitesimalmente distintos entre si, já que s é uma variável contínua.

Para encerrar a análise interpretativa da Transformada de Laplace, consideremos, a título de exemplo, a função do tempo $x(t)$ e respectivo Espectro de Freqüências Complexas $X(s)$, sendo $X(s)$ obtido de $x(t)$ através de (A1.1) e sendo $x(t)$ obtido de $X(s)$ através de (A1.3):

$$x(t) = 1.05e^{-5t} \cos(6t - 18.4^\circ).u(t) \quad (\text{A1.4})$$

$$X(s) = \frac{s + 7}{s^2 + 10s + 61} \quad (\text{A1.5})$$

A Figura A1.1 mostra a localização dos pólos e zeros de $X(s)$ no plano s e um possível caminho de integração ao longo da reta α_m para cômputo da Transformada Inversa de Laplace (Equação (A1.3)). Foi dito “possível” porque qualquer valor de α_m que localize o caminho retilíneo de integração à direita de todos os pólos de $X(s)$ é válido.

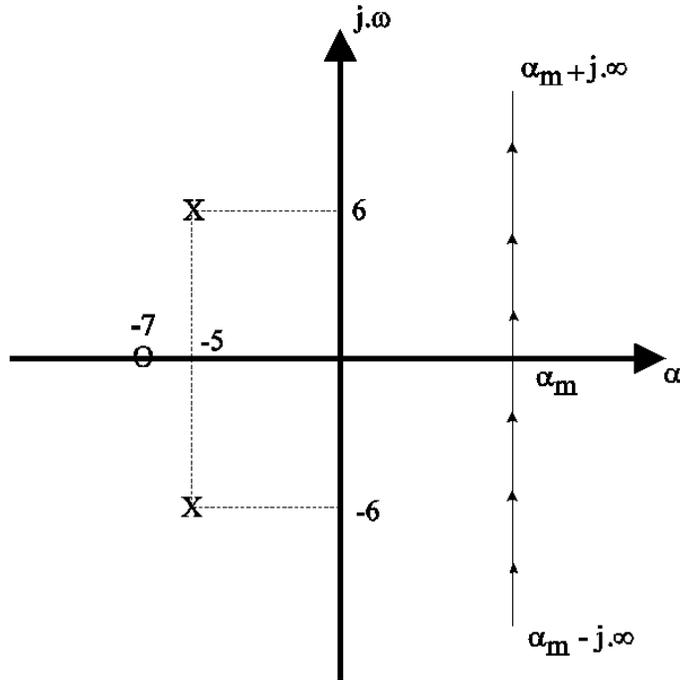


Figura A1.1: “Root Locus” de $X(s)$ e contorno de integração para cômputo de (A1.3).

As Figuras A1.2 e A1.3 mostram a vista tridimensional da Figura A1.1, respectivamente as superfícies de módulo e ângulo do espectro $X(s)$. Obviamente, visto que $X(s)$ é um número complexo, são necessários dois gráficos tridimensionais para definir $X(s)$, um para a superfície da função $|X(s)|$ e outro para a superfície da função $\angle\{X(s)\}$, plotadas contra o plano s , que é o conjunto de domínio destas funções.

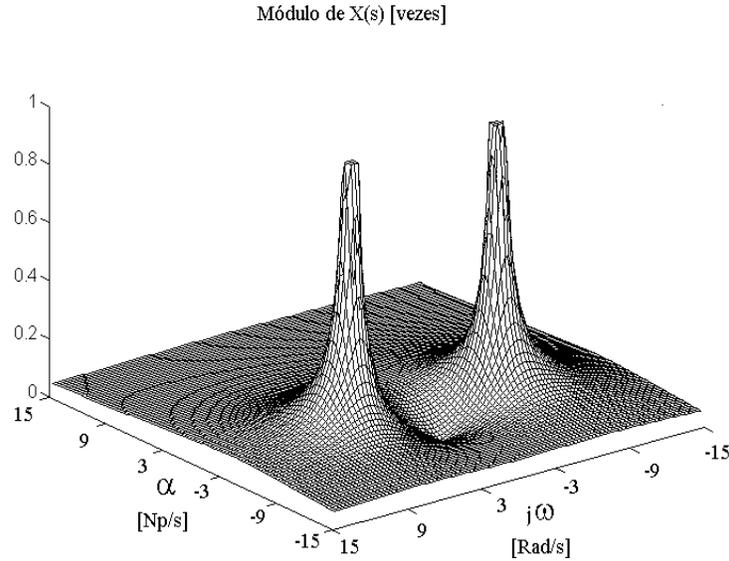


Figura A1.2: Módulo do espectro de freqüências complexas $X(s)$ com topo dos pólos limitado em 1.0.

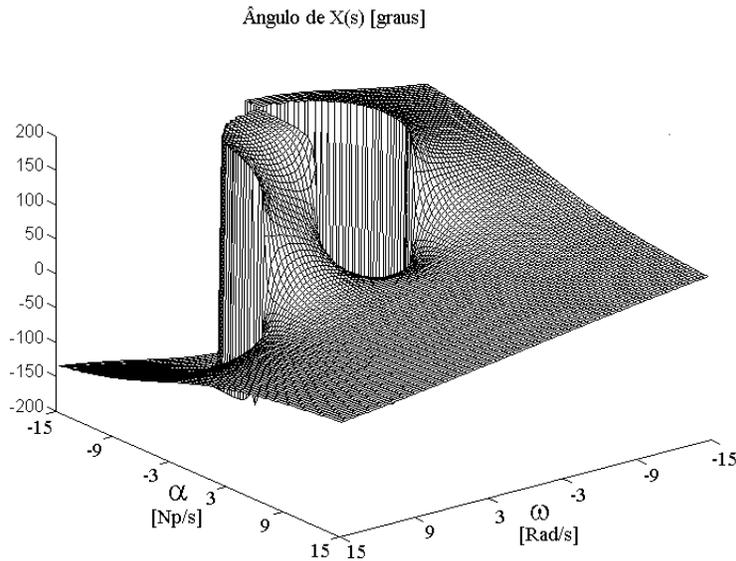


Figura A1.3: Ângulo do espectro de freqüências complexas $X(s)$.

AI.2 – A Transformada Z

Suponhamos, agora, que uma função $x(t)$, cujo espectro de frequências complexas é $X(s)$, seja amostrada no tempo sob um período de amostragem T_a , isto é,

$$x(t) = x(nT_a), n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{A1.6})$$

Para um sinal $x(t)$ desta forma amostrado, temos que a Equação (A1.1) assume a forma

$$X(s) = \int_0^{nT_a} x(nT_a) e^{-snT_a} d(nT_a) = \int_0^{nT_a} x(nT_a) (e^{sT_a})^{-n} d(nT_a) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x(n) (e^{sT_a})^{-n} \quad (\text{A1.7})$$

Definindo

$$z = e^{sT_a} \quad (\text{A1.8})$$

e substituindo (A1.8) em (A1.6):

$$X(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} x(n) z^{-n} \quad (\text{A1.9})$$

A equação (A1.9) constitui a Transformada Z da seqüência $x(n)$. Note que tanto n como z são ambas grandezas adimensionais. O fato de n ser adimensional torna-se óbvio pela equação (A1.6), isto é, n é apenas o índice da amostra. A grandeza z é adimensional pela equação (A1.8), porque sendo a dimensão de s [tempo]⁻¹ e sendo a dimensão de T_a [tempo], a função exponencial aplicada sobre uma grandeza adimensional (o produto de s por T_a), resultará em uma grandeza também adimensional.

AI.3 – A Interpretação da Transformada Z

O que representa z e $X(z)$, já que z é uma grandeza adimensional ?

A partir de (A1.8) e definindo a frequência de amostragem $f_a = 1/T_a$ temos:

$$z = e^{sT_a} = e^{\frac{s}{f_a}} = e^{\frac{\alpha + j\omega}{f_a}} = e^{\frac{\alpha}{f_a}} e^{j\frac{\omega}{f_a}} = e^r e^{j\theta} = \rho e^{j\theta} \quad (\text{A1.10})$$

Ou seja, z é o resultado da normalização do plano s de frequências complexas em relação à frequência de amostragem f_a , com subsequente mapeamento através da transformação $z = e^u$ [Churchill], onde $u = s/f_a$ representa o plano s normalizado em relação a f_a . Em outras palavras, quando um sinal $x(t)$ é amostrado a uma frequência de amostragem f_a , dando origem à uma seqüência $x(n)$, não existe mais um domínio s de frequências complexas absolutas, mas sim, um domínio de frequências relativas u , cujo parâmetro de referência é a frequência de amostragem f_a . Sobre este domínio relativo u aplica-se a transformação $z = e^u$, no sentido de simplificar o trabalho computacional

envolvido na Equação (A1.7), eliminando assim o cômputo adicional da exponencial que haveria caso mantivéssemos o domínio da função resultante de (A1.9) como sendo s e não z . O cômputo da exponencial em (A1.7) impõe um custo computacional desnecessário visto que, conforme veremos a seguir, todas as informações contidas no plano s são mapeadas no plano z através de (A1.8).

Pela análise de (A1.10) verifica-se que o mapeamento por ela definido é tal que uma trajetória paralela ao eixo α no plano s (variação somente em α) é mapeado em uma trajetória radial no plano z (variação somente em ρ), uma vez que $\rho = e^{\frac{\alpha}{f_a}}$. Por análise semelhante, uma trajetória paralela ao eixo $j\omega$ no plano s (variação somente em ω) é mapeada em uma trajetória circular no plano z (variação somente em θ), uma vez que $e^{\frac{j\omega}{f_a}} = e^{j\theta}$. De onde podemos inferir que

$$\theta = \omega/f_a = 2\pi \left(\frac{f}{f_a} \right). \quad (\text{A1.11})$$

Note de (A1.10) que o eixo $j\omega$ do plano s transforma-se em um círculo $1e^{j\theta}$ com raio unitário no plano z , de tal forma que todos os pontos à esquerda do eixo $j\omega$ no plano s são mapeados dentro do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ no plano z e os pontos à direita do eixo $j\omega$ no plano s são mapeados fora do círculo de raio unitário $1e^{j\theta}$ no plano z . Observe também que os pontos $\omega \in [0, +\infty)$ no semi-eixo positivo $j\omega$ no plano s são mapeados no semi-círculo $1e^{j\theta}$ no plano z , com $\theta \in [0, \pi)$; e que os pontos $\omega \in (-\infty, 0]$ no semi-eixo negativo $j\omega$ no plano s são mapeados no semi-círculo $1e^{j\theta}$ no plano z , com $\theta \in (-\pi, 0]$.

Ainda, de (A1.11), note que a máxima frequência $f_M = f_a/2$ permitida no espectro de $x(t)$ para que não ocorra *aliasing* no processo de amostragem é mapeada sobre o círculo de raio unitário nos pontos $\theta = \pm\pi$. De fato, a medida que o espectro de $x(t)$ contenha qualquer frequência $f > f_a/2$, esta será mapeada em um ponto sobre o círculo $1e^{j\theta}$ para o qual já exista mapeada alguma outra frequência $f < f_a/2$, caracterizando, assim, a superposição espectral resultante do *aliasing*.

Sob este ponto de vista, $X(z)$ representa **espectro**, a diferença sendo que o domínio frequência encontra-se “distorcido” pela passagem de s para z através da transformação simplificadora $z = e^s$. Poderíamos perguntar porque então não usar a Transformada de Laplace $X(s)$ para um sinal amostrado $x(nT_a)$ em vez da Transformada Z $X(z)$, já que ambas resultam em uma representação espectral? A resposta a esta pergunta pode ser dividida em três partes:

- 1- O custo computacional da determinação de $X(z)$ é menor do que o de $X(s)$ devido à inexistência do termo exponencial e^{sT_a} .

- 2- Ao usar $X(s)$ ao invés de $X(z)$ estaríamos automaticamente incluindo em $X(s)$ componentes espectrais **redundantes** decorrentes do processo de amostragem que nada teriam a ver com as componentes espectrais do sinal útil em si $x(n)$, o qual efetivamente constitui a informação a ser transmitida e/ou processada.
- 3- O uso de $X(s)$ ao invés de $X(z)$ dificultaria a análise de qualquer sistema amostrado excitado por um sinal espectralmente definido por $X(s)$, visto que tal espectro conteria componentes somente úteis e significativas no contexto da amostragem e que inevitavelmente serão eliminadas pelo filtro passa-baixa no processo inverso da digitalização.

Uma vez obtido o espectro de um sinal no domínio z através da Transformada Z, a análise deste sinal torna-se independente da frequência de amostragem f_a , desde que respeitadas os critérios para não-ocorrência de *aliasing* [Oppenheim][Stearns], situação decorrente da superposição no domínio frequência Z implicada por $|\theta| > \pi$ em (A1.11).

Assim como na Transformada de Laplace utilizamos o conceito de que $x(t)$ pode ser reconstruído a partir das componentes espectrais definidas em $X(s)$ (Equação (A1.3)), da mesma forma $x(n)$ pode ser reconstruído pelas componentes espectrais definidas em $X(z)$ [Oppenheim], através da relação :

$$x(n) = \oint_C X(z) z^{n-1} dz \quad (\text{A1.12})$$

A Equação (A1.12) é a chamada Transformada Z Inversa de $X(z)$, ou seja, dado o espectro $X(z)$, (A1.12) especifica como reconstruir $x(n)$ no domínio tempo discreto. Note que a integração é realizada sobre um contorno fechado C em z . Este contorno fechado nada mais é do que a reta α_m ($\alpha_m - j\infty$ a $\alpha_m + j\infty$) de (A1.2) mapeada de s para z através da transformação $z = e^u$. Assim como a reta α_m deve estar à direita do pólo de $X(s)$ mais à direita no plano s conforme já discutido na análise da Equação (A1.3), o contorno de integração fechado C de (A1.12) deve estar localizado externamente ao pólo de $X(z)$ mais afastado da origem do plano z , obedecendo, assim, ao mapeamento dado por (A1.10). Esta região na qual C obrigatoriamente deve estar contido denomina-se ROC (*Region Of Convergence*), mas absolutamente não implica que $X(z)$ inexistia fora dela. Assim como $X(s)$ continua existindo mesmo à direita da reta α_m (ver Figuras A1.2 e A1.3), $X(z)$ existe e é definida mesmo fora da ROC.

Cabe aqui observar que estamos tratando de seqüências $x(n)$ **causais**, porque estamos relacionando a Transformada de Laplace com a Transformada Z [Stearns]. A Transformada Z, no entanto, permite a determinação do espectro $X(z)$ de seqüências não-causais, o que equivaleria na Transformada de Laplace a inverter o sentido do caminho de integração da reta α_m e, em conseqüência, admitir a existência do sinal $x(t)$ somente

para $t < 0$. Nesta situação hipotética, a reta α_m deveria estar à esquerda dos pólos de $X(s)$ e conseqüentemente C deveria estar localizado internamente aos pólos de $X(z)$.

Consideremos, a título de exemplo, o par de transformadas, definido pelas equações (A1.4) e (A1.5), mas suponhamos que $x(t)$ seja agora amostrado sob um período de amostragem $T_a = 0.1$ segundos. Nesta situação, a função no tempo discreto $x(n)$ e respectivo Espectro de Freqüências Complexas $X(z)$, relacionados através das equações (A1.9) e (A1.12), são:

$$x(n) = 1.05 e^{-0.5n} \cos(0.6n - 18.4^\circ) u(n) \quad (\text{A1.13})$$

$$X(z) = \frac{z(z - 0.367)}{z^2 - z + 0.367} \quad (\text{A1.14})$$

A Figura A1.4 mostra a localização dos pólos e zeros de $X(z)$ no plano z e um possível caminho de integração C ao longo do contorno definido pelo círculo denominado “limite interno da ROC” para cômputo da Transformada Z Inversa (Equação (A1.12)). Foi dito “possível” porque qualquer círculo externo à este seria válido como contorno C para cômputo de (A1.12). Note que ao mapearmos no plano z os 2 pólos em s de $X(s)$ (Equação (A1.5) e Figura A1.1) através de (A1.10) com $f_a = 1/T_a = 10$ Hertz, as posições mapeadas em z coincidem com as posições dos 2 pólos de $X(z)$ dada por (A1.14).

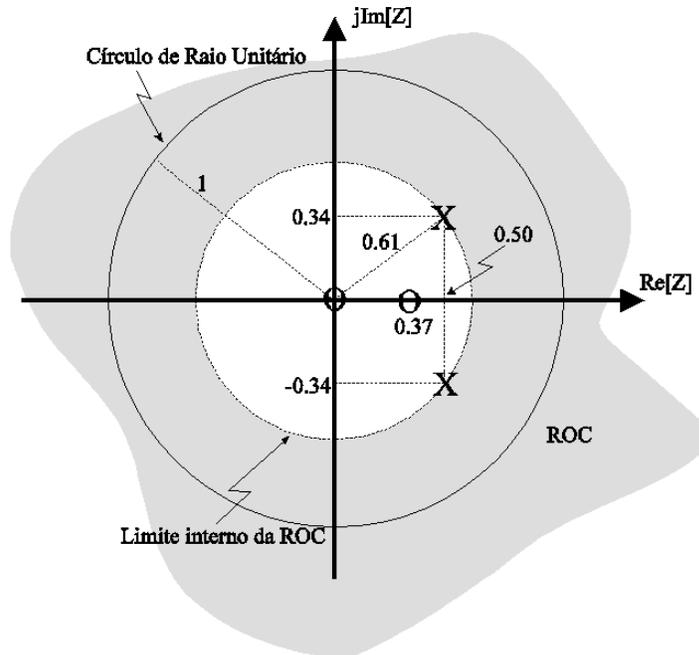


Figura A1.4: *Root Locus* de $X(z)$ sendo a ROC representada pela região sombreada.

As Figuras A1.5 e A1.6 mostram o gráfico tridimensional da Figura A1.4, respectivamente as superfícies de módulo e ângulo do espectro $X(z)$.

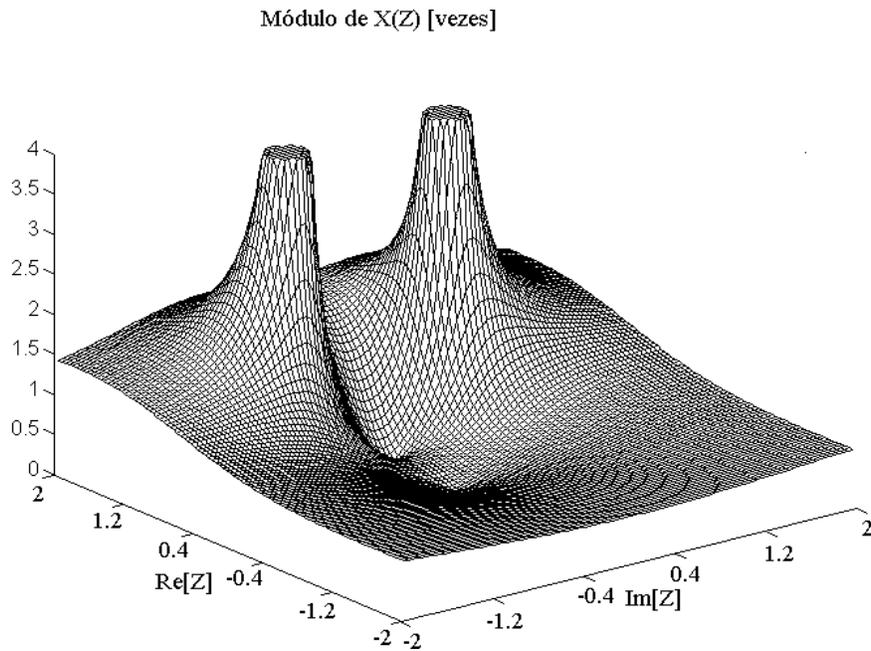


Figura A1.5: Módulo do espectro $X(z)$ com topo dos pólos limitado em 4.0 .

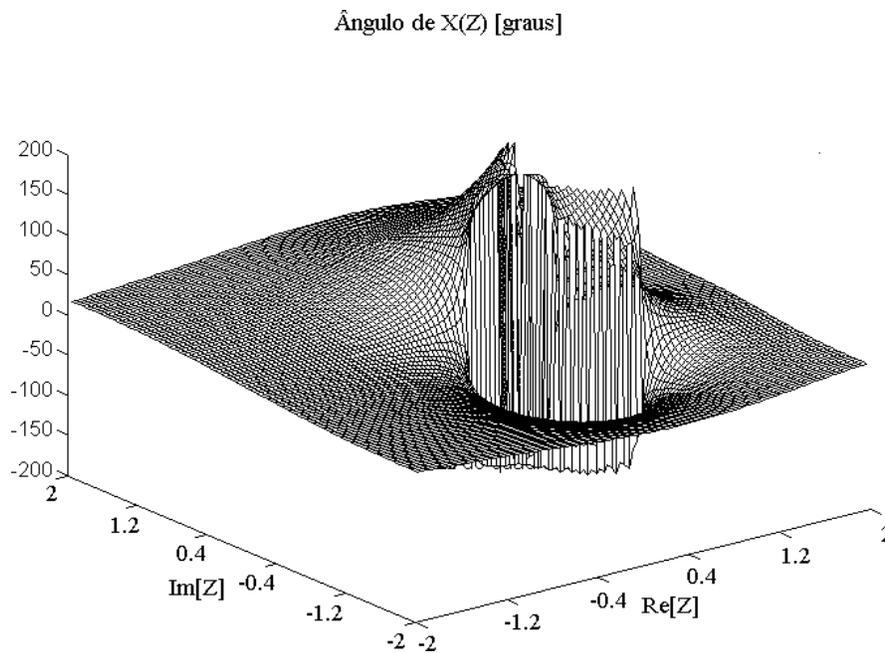


Figura A1.6: Ângulo do espectro $X(z)$.

Apêndice II – Reconstrução de $x(t)$ a partir de suas Componentes Espectrais no plano s

Seja uma função no tempo $x(t)$, com instante inicial em $t=0$, e seja $X(s)$ seu espectro de frequências complexas, onde $s = \alpha + j\omega$. Seja $x(t)$ construída a partir de seu espectro $X(s)$ através de expressão

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_s X(s) e^{st} ds \quad (\text{A2.1})$$

ou seja, a integral (A2.1) “varre” todo plano complexo s “procurando” as infinitas e infinitesimalmente distantes entre si componentes espectrais $X(s)$ no intuito de restituir a cada uma delas a variação temporal, ponderando-as com a exponencial no tempo e^{st} de mesma frequência complexa s que a componente espectral sendo ponderada.

Ocorre que o custo computacional de (A2.1) é altíssimo, visto que implica na varredura ponto a ponto de todo plano complexo s . No sentido de reduzir este custo computacional vamos definir uma estratégia de “varredura” do plano s que evite esta situação, mas que seja equivalente.

Uma maneira de “varrer” o plano s seria particioná-lo em infinitos contornos retangulares de dimensões infinitesimais, como mostra a Figura A2.1. Note que as fronteiras de cada quatro contornos adjacentes se anulam devido aos sentidos contrários de integração nas fronteiras, resultando em um contorno equivalente que envolve os quatro originais.

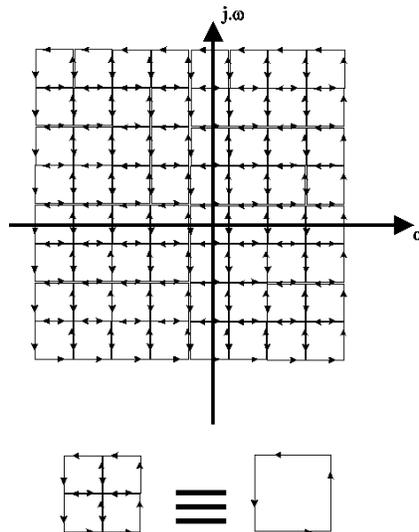


Figura A2.1: Plano s subdividido em infinitos contornos retangulares de dimensões infinitesimais. Cada quatro contornos adjacentes equivalem a um contorno envolvendo os quatro originais.

Se cada quatro contornos adjacentes resultam em um único contorno de dimensões equivalentes à soma dos quatro originais, podemos aplicar este procedimento em todo plano s e executar a “varredura” à procura de componentes espectrais simplesmente executando a integral definida por (A2.1) ao longo de um caminho retangular de lados tendendo ao infinito, conforme mostra a Figura A2.2.

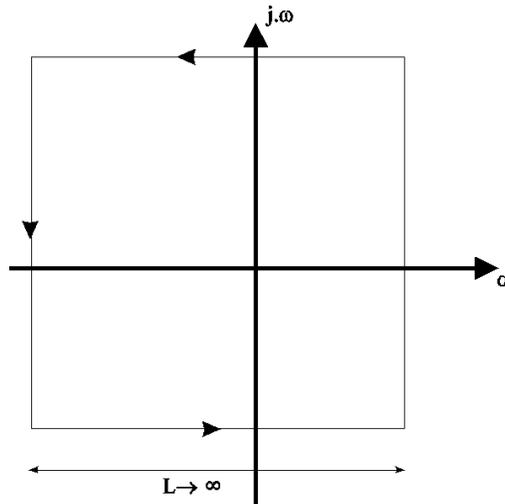


Figura A2.2: Varredura do todo plano s realizada pela integração ao longo de um contorno retangular de lados L tendendo ao infinito.

Mas se os lados do contorno retangular tendem ao infinito, um observador “sentado” no plano s localizado em qualquer posição finita não poderá distinguir as fronteiras do contorno da Figura A2.2. Sendo assim, a forma do contorno não importa, desde que suas fronteiras estejam no infinito. Portanto o contorno de integração da integral definida pela Equação (A2.1) pode ser o mostrado na Figura A2.3.

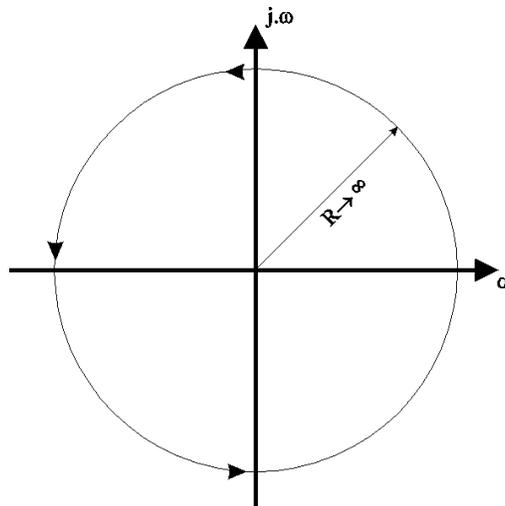


Figura A2.3: Varredura do todo plano s realizada pela integração ao longo de um contorno circular de raio tendendo ao infinito.

Mas sabemos do Teorema de Cauchy [Zeldovich][Churchill] que a integral de uma função complexa ao longo de um caminho fechado definido sobre o plano complexo de domínio da função é nula se o caminho fechado não engloba nenhum pólo ou singularidade da função complexa. Sendo assim, vamos dividir o contorno da Figura A2.3 em dois contornos C1 e C2, separados pela fronteira em α_m , de tal forma que todos os pólos de $X(s)$ estejam à esquerda da fronteira α_m , conforme mostra a Figura A2.4.

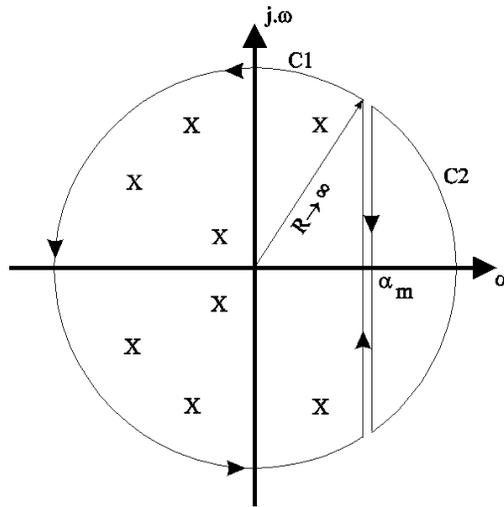


Figura A2.4: Varredura do todo plano s realizada pela integração ao longo dos contornos C1 e C2. Todos os pólos de $X(s)$ estão à esquerda da fronteira α_m .

Mas, pelo Teorema de Cauchy , a integral definida por (A2.1) ao longo do contorno C2 é nula. Se fizermos , após esta consideração, o raio do contorno C1 tender efetivamente ao infinito teremos o contorno definido na Figura A2.5. Note que este é o caminho de integração definido na equação (A1.3), e por mais estranho que possa parecer, estamos realizando a varredura sobre todo plano s se apenas fizermos a integral (A2.1) sobre este caminho retilíneo.

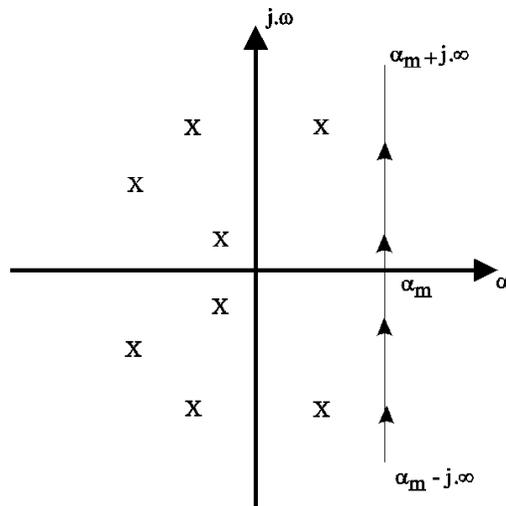


Figura A2.5: Varredura do todo plano s a procura de componentes espectrais realizada pela integração ao longo do caminho definido pela reta α_m . A reta α_m está à direita de todos os pólos de $X(s)$.

Apêndice III – Modelos de Canais

Objetivando testar novos sistemas equalizadores em situações mais próximas o possível da operação real, a comunidade de pesquisadores da área costuma utilizar modelos de canais disponíveis na base de dados da Universidade de Rice, Houston, Texas, USA. Esta base de dados é conhecida como *Signal Processing Information Base* (SPIB) e pode ser acessada em <http://spib.rice.edu/>. A SPIB tem sido bastante utilizada como referência em muitos trabalhos recentes que procuram evitar o cunho de serem apenas acadêmicos, visto que a base de dados é resultante de medidas e simulações em campo de sistemas reais e práticos. Informações adicionais, incluindo estudos e artigos com base na SPIB, podem ser encontradas no site do *Blind Equalization Research Group* (BERG) em <http://backhoe.ee.cornell.edu/BERG/>, pertencente à Universidade de Cornell, Ithaca, New York, USA.

AIII.1 Descrição da Base de Dados

Os modelos de canais de microondas a serem utilizados podem ser acessados em <http://spib.rice.edu/spib/microwave.html>. Estes modelos constituem a resposta ao impulso, medida em campo, de diversos canais de microondas reais. Muito embora seja apresentada nesta estudo a caracterização completa de cada canal utilizado, tanto no domínio tempo como no domínio frequência, informações adicionais podem ser obtidas em [Johnson3], [Treichler2] e [Endres2].

A resposta ao impulso dos canais de microondas da SPIB é obtida sob uma razão de amostragem alta, da ordem de dezenas de megabauds por segundo, resultando em respostas impulsivas com centenas de amostras. Isto permite que cada pesquisador decime a seqüência resultante por um fator adequado ao seu caso de particular interesse, sem que se perca informação significativa. A suprema maioria dos trabalhos raramente utiliza uma resposta impulsiva de canal com mais de algumas dezenas de amostras. Neste estudo, para que se mantenha termo de comparação com recentes trabalhos na área [LeBlanc][Endres1][Chung], os canais de microondas SPIB serão decimados para 16 amostras. A Tabela AIII.1 identifica os canais SPIB utilizados e estabelece a respectiva designação a ser doravante aqui adotada. Por exemplo, ao referir-se ao canal M2 neste texto, entenda-se: o canal cuja resposta ao impulso resulta da decimação para 16 amostras da seqüência de amostras do arquivo chan2.mat da base de dados SPIB referente a canais de microondas.

Arquivo SPIB: (micro-ondas)	Razão de amostragem $1/T$ do transmissor em Mbauds/s (conforme http://spib.rice.edu/spib/microwave.html):	Número de amostras no arquivo SPIB resultante da amostragem fracionária $T/2$ da resposta impulsiva recebida do canal:	Designação, neste estudo, da respectiva resposta impulsiva gerada por decimação do arquivo SPIB para 16 amostras:
chan2.mat	22.5	230	M2
chan6.mat	30	300	M6

Tabela AIII.1: Modelos de canais de microondas da base de dados SPIB utilizados neste estudo.

Para que a localização dos zeros da função de transferência FIR de um canal SPIB não seja alterada, utiliza-se decimação no domínio frequência [Strum][Endres1]. Especificamente, o número de amostras em um arquivo SPIB é estendido para a próxima potência inteira de 2 mediante o acréscimo de amostras nulas em seqüência. A seguir é aplicada a FFT (FFT – *Fast Fourier Transform*) sobre a seqüência estendida e a resultante seqüência no domínio frequência é decimada para 16 amostras. Aplica-se então a IFFT (IFFT – *Inverse Fast Fourier Transform*) sobre a seqüência decimada no domínio frequência resultando em uma seqüência de 16 amostras no domínio tempo, correspondente à resposta impulsiva decimada. Caso fosse utilizada decimação no domínio tempo, seriam gerados efeitos de *aliasing* [Strum], alterando, em especial, a posição das raízes refletidas e das raízes próximas ao círculo de raio unitário, o que poderia transformar os canais SPIB em um conjunto de canais “acadêmicos”.

Outro tipo de modelo de canal utilizado neste estudo é o representativo de canais para TV a cabo, os quais podem ser acessados em <http://spib.rice.edu/spib/cable.html>. A razão de amostragem utilizada para estes canais da SPIB é a usualmente utilizada em decodificadores de TV a cabo práticos. Assim, para que se mantenha termo de comparação com trabalhos na área, estes canais não serão decimados. A Tabela AIII.2 identifica o canal de TV a cabo SPIB utilizados e estabelece a respectiva designação a ser doravante aqui adotada. Por exemplo, ao referir-se ao canal C2 neste estudo, entenda-se: o canal cuja resposta ao impulso é dada pela seqüência de amostras do arquivo chan2.mat da base de dados SPIB referente a canais de TV a cabo.

Arquivo SPIB: (TV a cabo)	Número de amostras no arquivo SPIB resultante da amostragem fracionária $T/2$ da resposta impulsiva recebida do canal: (conforme http://spib.rice.edu/spib/cable.html .)	Designação, neste estudo, da respectiva resposta impulsiva associada:
chan2.mat	128	C2

Tabela AIII.2: Modelo de canal de TV a cabo da base de dados SPIB utilizado neste estudo.

AIII.2 Caracterização dos Canais

Neste estudo, os canais M2, M6 e C2, RR serão caracterizados por:

- 1- Módulo $|c(n)|$ e fase $\angle c(n)$ (em graus) da resposta impulsiva $c(n)$ resultante da amostragem fracionária $T/2$ da resposta ao impulso $c(t)$ do canal.
- 2- O lugar no plano z dos zeros de $C(z)$.
- 3- O lugar no plano z dos zeros de $C^{\text{PAR}}(z)$ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$.

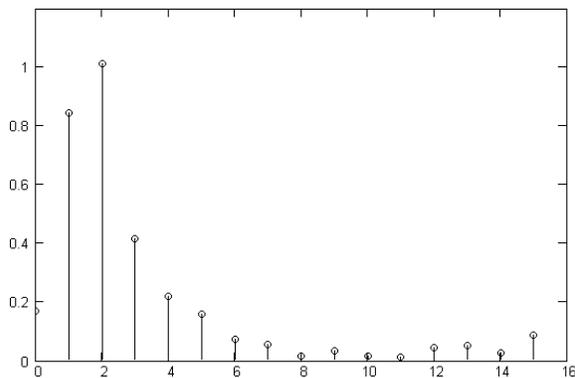


Fig. AIII.1a: $|c(n)|$.

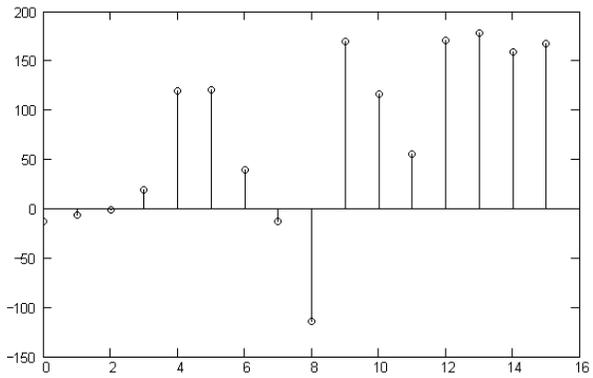


Fig. AIII.1b: $\angle c(n)$ em graus.

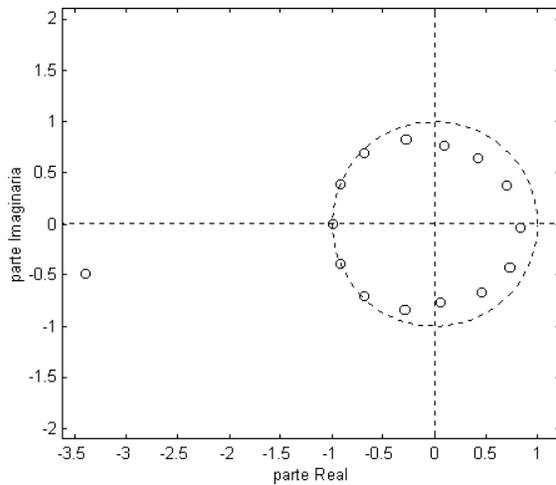


Fig. AIII.1c: Zeros de $C(z)$.

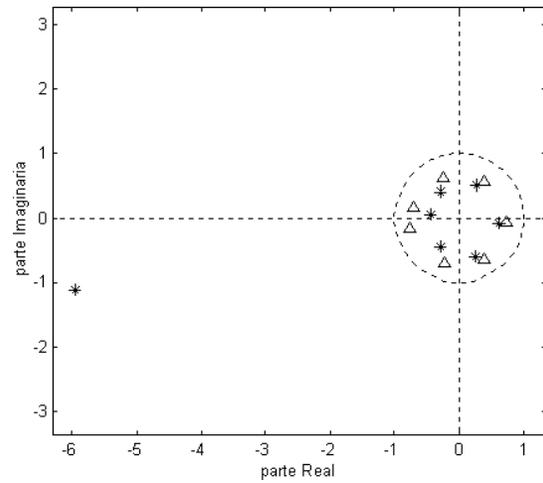


Fig. AIII.1d: Zeros de $C^{\text{PAR}}(z)$ – Δ e $C^{\text{IMPAR}}(z)$ – $*$.

Figura AIII.1: Caracterização do canal M2.

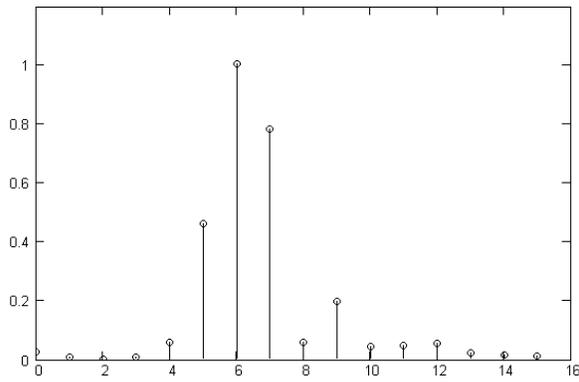


Fig. AIII.2a: $|c(n)|$.

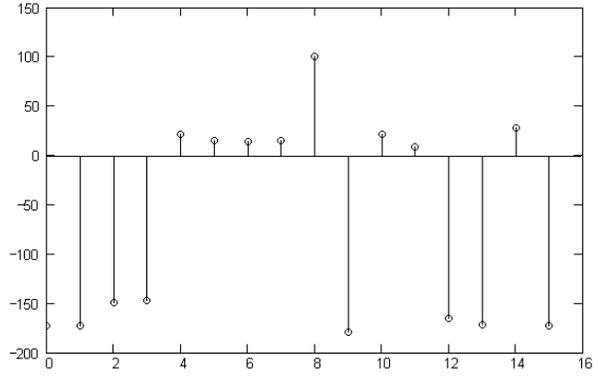


Fig. AIII.2b: $\angle c(n)$ em graus.

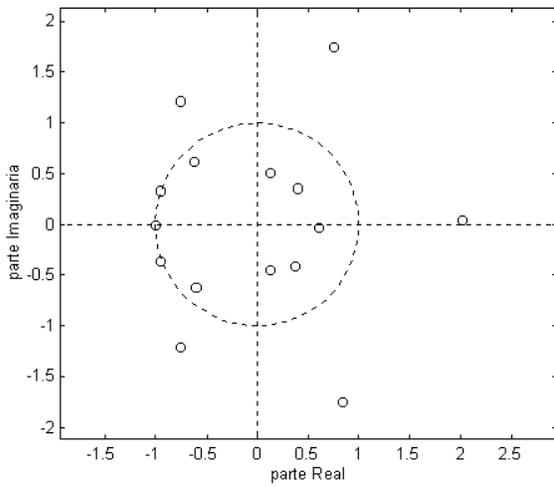


Fig. AIII.2c: Zeros de $C(z)$.

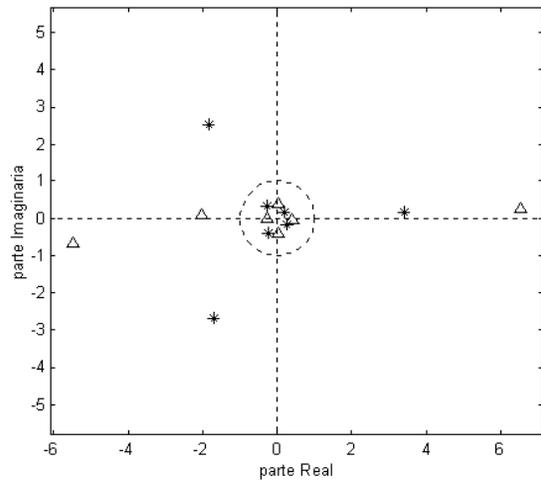


Fig. AIII.2d: Zeros de $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$ e $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$.

Figura AIII.2: Caracterização do canal M6.

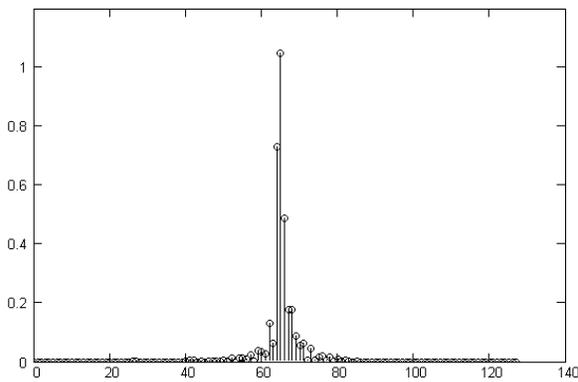


Fig. AIII.3a: $|c(n)|$.

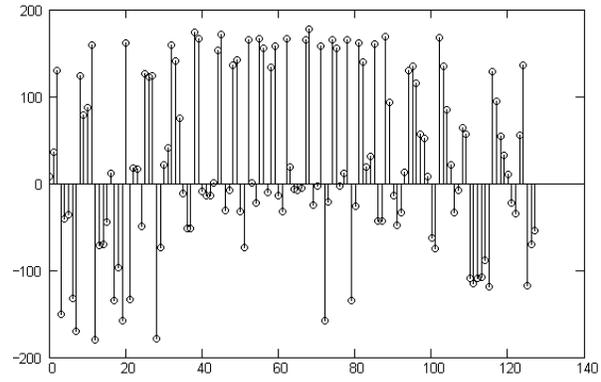


Fig. AIII.3b: $\angle c(n)$ em graus.

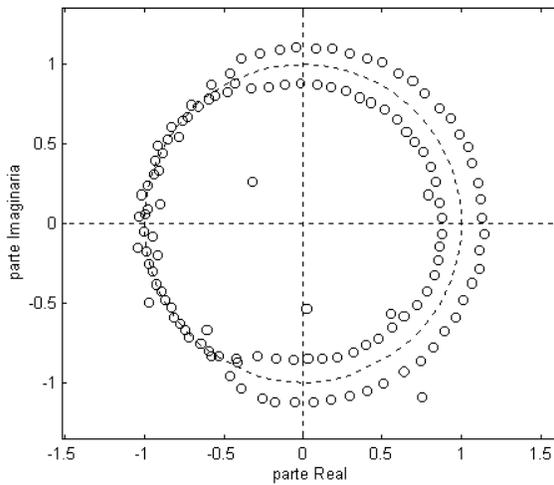


Fig. AIII.3c: Zeros de $C(z)$.

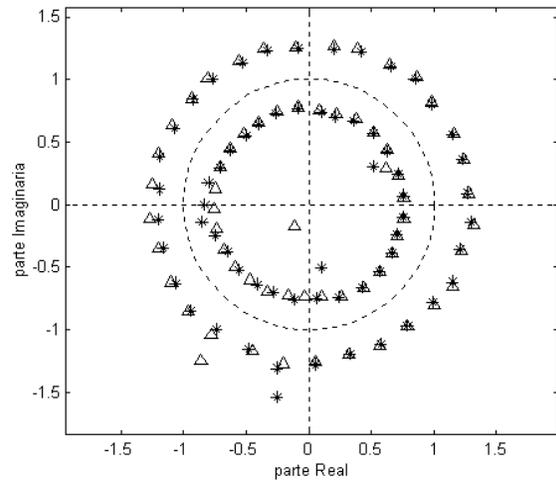


Fig. AIII.3d: Zeros de $C^{\text{PAR}}(z) - \Delta$ e $C^{\text{IMPAR}}(z) - *$.

Figura AIII.3: Caracterização do canal C2.

Referências Bibliográficas

- [Carlson] A. B. Carlson, *Communication Systems*, McGraw-Hill, 1965.
- [Tijonov] A. N. Tijonov e A. A. Samarsky, *Ecuaciones de La Fisica Matematica*, Editorial Mir, Moscow, URSS, 1980.
- [Widrow] B. Widrow, J. McCool e M. Ball, "The Complex LMS Algorithm", *Proceedings of IEEE*, vol. 63, no. 4, pp. 719-720, Abril 1975.

- [Johnson1] C. R. Johnson Jr. e B. D. O. Anderson, “Godard Blind Equalizer Error Surface Characteristics: White Zero-Mean Binary Case”, *International Journal of Adaptive Control & Signal Processing*, vl. 9, pp. 301-324, Agosto 1995.
- [Johnson2] C. R. Johnson Jr., H. J. Lee, J. P. LeBlanc, T. J. Endres, et al., “On Fractionally-Spaced Equalizer Design for Digital Microwave Radio Channels”, *Proc. Asilomar Conference on Signals, Systems and Computers*, pp. 290-294, Pacific Grove, California, USA, Outubro 1995.
- [Johnson3] C. R. Johnson, Jr. et.al., "On Fractionally-Spaced Equalizer Design for Digital Microwave Radio Channels," *Proc. of the 29th Asilomar Conference*, Pacific Grove, CA, Novembro 1995.
- [Chen] Chi-Tsong Chen, *Linear System Theory and Design*, Harcourt Brace College Publishers, 1984.
- [Gesbert] D. Gesbert, P. Duhamel e S. Mayrargue, “Blind Multichannel Adaptive MMSE Equalization with Controlled Delay”, *Proc. Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pp. 172-175, Corfu, Grécia, Junho 1996.
- [Godard] D. N. Godard, “Self-Recovering Equalization and Carrier Tracking in Two-Dimensional Data Communication Systems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-28, no. 11, Novembro 1980.
- [Jury] E. I. Jury, *Inners and Stability of Dynamic Systems*, 2nd ed., R.E. Publishing Company, 1982.
- [Moulines] E. Moulines, P. Duhamel, J. Cardoso e S. Mayrargue, “Subspace Methods for Blind Identification of Multichannel FIR Filters”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 2, pp. 516-525, Fevereiro 1995.
- [Kreyszig] Erwin Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, 1967.
- [Forney1] G. D. Forney Jr., “Maximum likelihood sequence estimation of digital sequences in the presence of inter symbol interference”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 18, no. 3, pp. 989-995, Maio 1972.
- [Forney2] G. D. Forney Jr., “The Viterbi Algorithm”, *Proceeding of the IEEE*, vol. 61, no. 3, pp. 268-278, Março 1973.
- [Giannakis] G. Giannakis e S. Halford, “Blind Fractionally-Spaced Equalization of Noisy FIR Channels: Optimal and Adaptive Solutions”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, submetido em Abril 1995.
- [Foschini] G. J. Foschini, “Equalizing Without Altering or Detecting Data”, *AT&T Technical Journal*, vol. 64, no. 9, Outubro 1985.
- [Ungerboeck] G. Ungerboeck, “Fractional Tap-Spacing Equalizer and Consequences for

- Clock Recovery in Data Modems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-24, no. 8, Agosto 1976.
- [Xu] G. Xu, H. Liu, L. Tong, T. Kailath, “A Least-Squares Approach to Blind Channel Identification”, *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 43, no. 12, pp. 2982-2993, Dezembro 1995.
- [Gardner] Gardner, *Phaselock Techniques*, 2nd ed., John Wiley & Sons, 1979.
- [Golub] G. H. Golub e C. F. Van Loan , *Matrix Computations*, 3rd ed., John Hopkins University Press, 1996.
- [Jasik] H. Jasik, *Antenna Engineering Handbook*, McGraw-Hill, 1961.
- [Kassam] I. Cha e S. Kassam, “Channel Equalization Using Adaptive Complex Radial Basis Function Networks”, *IEEE Journal on Selected Areas in Communications*, vol. 13, no. 1, pp. 122-131, Janeiro 1995.
- [Fijalkow] I. Fijalkow, “Multichannel Equalization Lower Bound: A Function of Channel Noise and Disparity”, *Proc. Signal Processing Workshop on Statistical Signal and Array Processing*, pp. 344-347, Corfu, Grécia, Junho 1996.
- [Balakrishnan] J. Balakrishnan, “Mitigation of Error Propagation in Decision Feedback Equalization” , *M.S. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Agosto 1999.
- [Tugnait] J. K. Tugnait, “On Blind Identifiability of Multipath Channels Using Fractional Sampling and 2nd Order Cyclostationarity Statistics”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, no. 1, pp. 308-311, 1995.
- [LeBlanc] J. P. LeBlanc, “Effects of Source Distributions and Correlation on Fractionally Spaced Blind Constant Modulus Algorithm Equalizers”, *Ph.D. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Agosto 1995.
- [Treichler1] J. R. Treichler, I. Fijalkow e C.R. Johnson Jr., “Fractionally-Spaced Equalizers: How Long Should They Really Be?”, *Signal Processing Magazine*, vol. 13, no. 3, pp. 65-81, Maio 1996.
- [Treichler2] J. R. Treichler, I. Fijalkow, C. R. Johnson, Jr., "Fractionally Spaced Equalizers: How Long Should They Really Be?" *IEEE Signal Processing Magazine*, vol. 13, No. 3, pp. 65-81, Maio 1996.
- [Treichler3] J. R. Treichler, M. G. Agee, “A New Approach to Multipath Correction of Constant Modulus Signals”, *IEEE Transactions on Acoustics, Speech and Signal Processing*, Abril 1983.
- [Proakis] John G. Proakis, *Digital Communications*, 3rd ed., McGraw-Hill, 1995.
- [Tong1] L. Tong, G. Xu, B. Hassibi e T. Kailath, “Blind Channel Identification Based on Second-Order Statistics: A Frequency Domain Approach” ”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 41, pp. 329-334, Janeiro

1995.

- [Tong2] L. Tong, G. Xu, e T. Kailath, “Blind Channel Identification Based on Second-Order Statistics: A Time Domain Approach”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 40, no. 2, pp. 340-349, Março 1994.
- [Garth] L. Garth, J. Yang, e J.J. Werner, “An Introduction to Blind Equalization”, *Lucent Technologies*, 1998, <http://www.vdsl.org/main1/frpap.htm>
- [Dolukhanov] M. Dolukhanov, *Propagation of Radio Waves*, Mir Publishers, Moscow, URSS, 1971.
- [Macchi] O. Macchi e E. Eweda, “Convergence Analysis of Self-Adaptive Equalizers”, *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. IT-30, no. 2, 1984.
- [Bello] P.A.Bello, “Characterization of Randomly Time-Invariant Linear Channels”, *IEEE Transactions on Communications Systems*, vol. CS-11 pp. 360-393, Dezembro 1963.
- [Papoulis] Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes*, McGraw-Hill, 1965.
- [Zhang] Q. Zhang, “Using Wavelet Network in Nonparametric Estimation”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 8, no. 2, pp. 227-236, Março 1997.
- [Casas] R. A. Casas, “Blind Adaptive Decision Feedback Equalization: A Class of BAD Channels”, *M.S. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Maio 1996.
- [Kennedy] R. A. Kennedy, “Operational Aspects of Decision Feedback Equalizers”, *Ph.D. Dissertation*, The Australian National University, Canberra, ACT, Australia, Dezembro 1988.
- [Gitlin1] R. D. Gitlin e S. B. Weinstein, “Fractionally-Spaced Equalization: An Improved Digital Transversal Equalizer”, *Bell Systems Technical Journal*, vol. 60, Fevereiro 1981.
- [Gitlin2] R. D. Gitlin, J. F. Hayes e S. B. Weinstein, *Data Communications Principles*, Plenum Press, New York, 1992.
- [Treichler4] J. R. Treichler, M. G. Larimore e J. C. Harp, “Practical Implementations of Blind Demodulators”, *Applied Signal Technology Inc.*, 1998, <http://www.appsig.com/technews/>
- [Lucky] R. W. Lucky, “Techniques for Adaptive Equalization of Digital Communication Systems”, *Bell Systems Technical Journal*, vol. 45, no. 2, pp. 255-286, Fevereiro 1966.
- [Strum] R. D. Strum e D. E. Kirk, *First Principles of Discrete Systems and Digital Signal Processing*, Addison-Wesley, 1989.

- [Bellini] S. Bellini, “Blind Equalization”, *Alta Frequenza*, vol. LVII, no. 7, Setembro 1988.
- [McLaughlin] S. Chen, S. McLaughlin e B. Mulgrew, “Complex-Valued Radial Basis Function Network, Part I: Network Architecture and Learning Algorithms”, *Signal Processing*, vol. 35, pp 19-31, 1994.
- [Mulgrew] S. Chen, S. McLaughlin e B. Mulgrew, “Complex-Valued Radial Basis Function Network, Part I: Application to Digital Communications Channel Equalisation”, *Signal Processing*, vol 36, pp 175-188, 1994.
- [Haykin1] S. Haykin, *Blind Deconvolution*, Prentice-Hall, 1994.
- [Haykin2] Simon Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 3rd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1996.
- [Haykin3] Simon Haykin, *Neural Networks*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- [Haykin4] Simon Haykin, *Unsupervised Adaptive Filtering*, Wiley, New York, 1999.
- [Endres1] T. J. Endres, “Equalizing With Fractionally-Spaced Constant Modulus and Second-Order Statistics Blind Receivers”, *Ph.D. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Maio 1997.
- [Endres2] T. J. Endres, S. D. Halford, C. R. Johnson, Jr., G. B. Giannakis, "Blind Adaptive Channel Equalization Using Fractionally-Spaced Receivers: A Comparison Study," *Proc. Conf. on Info. Sciences and Systems*, Princeton, NJ, Março 1996.
- [Nikolski] V. V. Nikolski, *Electrodinámica y Propagación de Ondas de Radio*, Editorial Mir, Moscow, URSS, 1976.
- [Gardner1] W. A. Gardner, “A New Method of Channel Identification”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 6, pp. 813-817, Junho 1991.
- [Chung] W. Chung, “Geometrical Understanding of the Constant Modulus Algorithm: Adaptive Blind Equalization and Cross-Polarized Source Separation” , *M.S. Thesis*, Cornell University, Ithaca, New York, USA, Maio 1999.
- [Press] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling e B. P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, 2nd ed., Cambridge University Press, 1992.
- [Zeldovich] Y. B. Zeldovich e A. D. Myskis, *Elements of Applied Mathematics*, Mir Publishers, Moscow, URSS, 1976.
- [Sato] Y. Sato, “A Method of Self-Recovering Equalization for Multilevel Amplitude Modulated Systems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. COM-23, no. 6, Junho 1975.
- [Ding] Z. Ding, R. A. Kennedy, B. D. O. Anderson e C. R. Johnson Jr., “Ill-Convergence of Godard Blind Equalizers in Data Communication

Systems”, *IEEE Transactions on Communications*, vol. 39, no. 9, pp. 1313-1327, Setembro 1991.

[Oppenheim] A.V. Oppenheim and R.W. Schafer , *Digital Signal Processing*, Prentice-Hall, 1975

[Churchill] R.V. Churchill , *Variáveis Complexas e Suas Aplicações*, McGraw Hill, 1975.

[Stearns] S.D Stearns and D.R. Hush, *Digital Signal Analysis*, Prentice Hall, 1990.