Capítulo I

Introdução

Neste texto são apresentados os princípios gerais necessários à compreensão da área da Engenharia Elétrica denominada Codificação de Sinais. A necessidade de codificação de sinais surge basicamente no contexto de comunicações digitais, especificamente no processo de codificação de fonte e também no processo de codificação de canal. O processo de codificação de fonte objetiva eliminar ao máximo a informação redundante da fonte, de forma a minimizar a banda-passante necessária ao sistema digital. Já o processo de codificação de canal objetiva introduzir informação redundante de forma controlada à informação a ser transmitida de forma que, no receptor, esta informação redundante possa ser utilizada para detectar e corrigir erros decorrentes de ruído e interferência que afetam o sinal quando este é transmitido através do canal de transmissão. Embora a área de Codificação de Sinais não seja restrita ao contexto de comunicações digitais, sendo extensivamente utilizada , entre outros, em encriptação, compressão de imagens e recuperação de dados armazenados por exemplo, o principal enfoque deste texto é em comunicações digitais.

Assim, é instrutivo preliminarmente discutirmos de forma breve alguns conceitos e elementos básicos de comunicação digital.

1.1 Comunicação Digital

A Figura 1.1 mostra o diagrama de blocos simplificado e os elementos básicos de um sistema de comunicações digital.

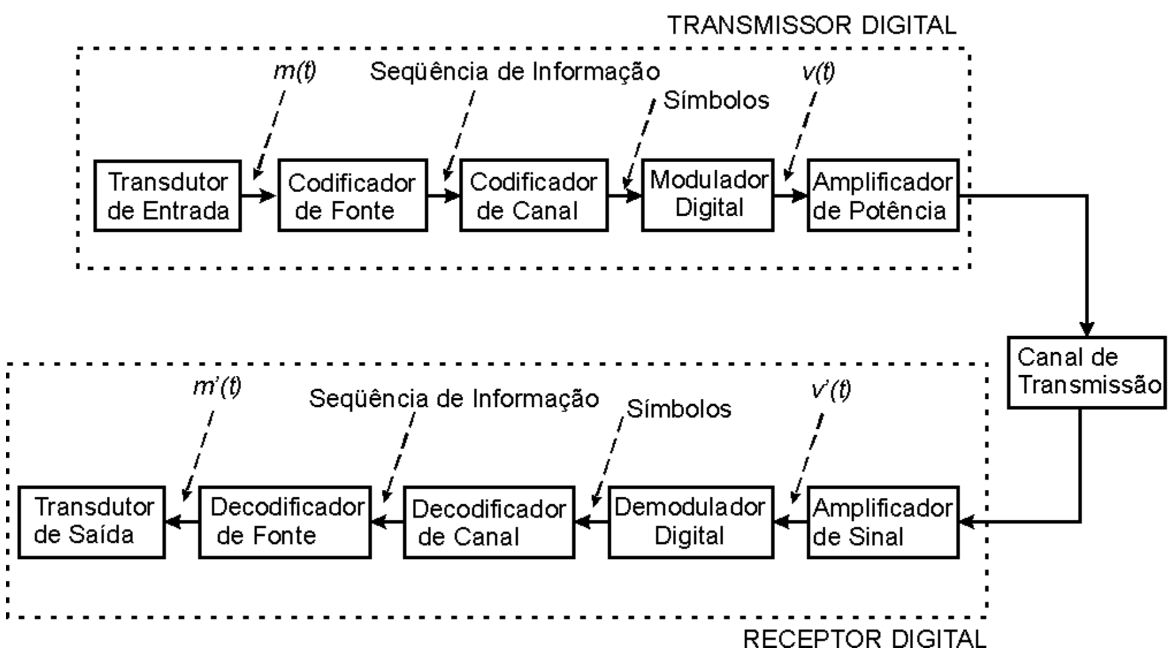

Figura 1.1: Diagrama de blocos de um sistema de comunicações digital.

O Transdutor de Entrada é um dispositivo que converte uma grandeza física qualquer em um sinal elétrico. Em um sistema digital, o sinal $m(t)$ pode ser

I. Um sinal contínuo. Exemplo: O sinal gerado por um microfone.

II. Um sinal discreto no tempo representado por um conjunto finito de símbolos. Isto é, tal sinal é discreto não só no tempo como também quanto aos valores que o representam – ou seja, o sinal é <u>quantizado</u>. Exemplo: O sinal gerado pelo foto-diodo que lê a informação de um CD musical através de um feixe LASER assume somente dois valores de tensão – portanto, dois símbolos – de acordo com os *pits* (*pit*: cova, fossa, buraco – em inglês) e *bumps* (*bump*: protuberância, galo – em inglês) marcados ao longo da trilha em espiral na superfície de policarbonato do disco em rotação.

Se o sinal $m(t)$ é do tipo II ele é aplicado diretamente ao Codificador de Fonte, por já ser um sinal quantizado. Se $m(t)$ for do tipo I ele será transformado em um sinal do tipo II através de um processo de amostragem e quantização prévios. Na realidade, o processo de amostragem + quantização faz parte do Codificador de Fonte em sistemas que operam com sinais $m(t)$ do tipo I. Este processo serve para transformar o sinal contínuo $m(t)$ em uma seqüência de dígitos numéricos em base numérica binária. Para representar os dígitos binários – ou bits – a nível de circuito, é comum associar o nível lógico "1" a um pulso elétrico retangular de largura τ tendo como amplitude a tensão V_H e o nível lógico "0" a um pulso retangular de mesma largura tendo como amplitude a tensão V_L .

Idealmente, busca-se representar o valor quantizado do sinal $m(t)$ a cada instante discreto através de uma seqüência de bits que utilize o menor número de bits possível. Isto porque, um menor número de bits enviados no mesmo intervalo de tempo implica em pulsos de largura τ maior, o que reduz a largura de espectro do sinal $m(t)$ quantizado e, portanto, reduz a banda-passante necessária para enviá-lo através do sistema + canal [Carlson]. Por exemplo, suponhamos que cada amostra do sinal $m(t)$ possa ser representado por uma seqüência de 16 bits, significando que cada amostra de $m(t)$ pode assumir um valor dentre os $2^{16} = 65536$ valores ou <u>níveis de quantização</u> possíveis. Suponhamos ainda que se deseja transmitir uma amostra de $m(t)$ durante um intervalo de tempo de $100\,\mu\text{S}$, de modo que o pulso que representa cada bit tem uma duração de $\tau = 100\,\mu\text{S}/16 = 6.25\,\mu\text{S}$. Isto resulta em uma largura espectral para o trem de pulsos de $1/\tau = 160\text{KHz}$, a qual proporcionalmente define a banda-passante necessária ao sistema [Carlson]. No entanto, se cada amostra de $m(t)$ puder ser representada por uma seqüência de 8 bits em vez de 16 bits, $1/\tau = 80\text{KHz}$, e a banda-passante necessária ao sistema será a metade do necessário para 16 bits. O número de bits necessário para representar $m(t)$ é dependente da aplicação, porque quanto menos bits usarmos para representar um sinal, maior será o <u>ruído de quantização</u> , que é uma distorção não-desejada mas intrínseca ao processo de quantização.

Representar o sinal $m(t)$ quantizado através de uma seqüência de bits que utilize o menor número de bits possível é a tarefa principal do Codificador de Fonte.

Especificamente, o Codificador de Fonte procura reduzir ao máximo a informação redundante no sinal $m(t)$ quantizado de forma que o menor número de bits possível seja utilizado para sua representação sem perder informação significativa. Em outras palavras, o Codificador de Fonte efetua uma compressão de dados.

A seqüência de bits gerada na saída do Codificador de Fonte é denominada Seqüência de Informação e é aplicada à entrada do Codificador de Canal. O propósito do Codificador de Canal é introduzir na Seqüência de Informação, de maneira controlada, uma determinada quantidade de informação redundante, de tal forma que, no receptor, esta informação redundante possa ser utilizada para detectar e corrigir erros decorrentes de ruído e interferência que afetam o sinal quando este é transmitido através do canal de transmissão. Portanto, a redundância adicionada serve para aumentar a confiabilidade da informação recebida e melhorar a fidelidade do sinal $m'(t)$ no Receptor Digital. De fato, a redundância controlada introduzida na Seqüência de Informação auxilia o receptor na decodificação da Seqüência de Informação desejada. Por exemplo, uma forma trivial de codificação de uma seqüência de informação binária é simplesmente repetir *m* vezes cada dígito binário, sendo *m* um inteiro positivo. Uma maneira mais sofisticada de codificação seria tomar um conjunto de *k* bits da Seqüência de Informação na entrada do Codificador de Canal, conjunto este denominado de mensagem, e mapear cada mensagem de *k* bits em uma seqüência de *n* bits, $n > k$, seqüência esta denominada de palavra-código, tal que cada mensagem seja univocamente relacionada com a respectiva palavra-código. O mapeamento deve ser unívoco de forma que, sendo conhecido no receptor, este tenha condições de inferir, a partir do mapeamento, se ocorreu ou não erro e eventualmente corrigi-lo. A quantidade de redundância controlada introduzida pela codificação de canal é medida pelo quociente n/k. O recíproco deste quociente, i.e. k/n , é denominado de razão de codificação.

Um Codificador de Canal simples é aquele que executa a operação denominada cheque de paridade (*parity check*). Suponhamos que tenhamos uma mensagem de $k = 7$ bits a ser codificada em uma palavra-código de $n = 8$ bits através do seguinte mapeamento: Os 7 primeiros bits da mensagem são mapeados sem nenhuma alteração nos 7 primeiros bits da palavra-código. O oitavo bit da palavra-código é tal que se o número de dígitos “1” na mensagem é par o oitavo bit da palavra-código é “0” e se o número de dígitos “1” na mensagem é ímpar o oitavo bit da palavra-código é “1”. Sejam, agora, por exemplo, as seguintes mensagens M_A, M_B e M_C tal que $M_A = 1000001$, $M_B = 1000010$, $M_C = 1000011$. As palavras-código resultantes na saída do Codificador de Canal são $P_A = 10000010$, $P_B = 10000100$ e $P_C = 10000111$. Suponhamos que na saída do demodulador do receptor tenhamos $R_A = 10000010$, $R_B = \mathbf{0}0000100$ e $R_C = \mathbf{0}0000\mathbf{000}$. O Decodificador de Canal do receptor não detecta erro em R_A porque o oitavo bit é “0” para um número par de bits “1” nos dígitos correspondentes à mensagem, o que é uma decisão correta pois $R_A = P_A$. O Decodificador de Canal detecta erro em R_B porque o oitavo bit é “0” para um número ímpar de bits “1” nos dígitos correspondentes à mensagem, o que é uma decisão correta pois $R_B \neq P_B$ no primeiro bit. O Decodificador de Canal não detecta erro em R_C porque o oitavo bit é “0” para um número par de bits “1” nos dígitos correspondentes à mensagem, o que é um decisão <u>incorreta</u> pois $R_C \neq P_C$ nos dígitos marcados em negrito. A razão de codificação para este caso simples é $k/n = 7/8$.

A saída do Codificador de Canal é enviada ao Modulador Digital cuja função é mapear a seqüência binária proveniente do Codificador de Canal em um conjunto de M valores distintos de parâmetros de um sinal elétrico $v(t)$. Por exemplo, seja $v(t) = V\cos(2\pi ft + \phi)$ e suponhamos que desejamos transmitir a seqüência binária proveniente do Codificador de Canal de um em um bit a uma razão uniforme de R $bits/s$. O Modulador Digital pode, por exemplo, simplesmente mapear o dígito "0" no sinal $v_0(t) = V\cos(2\pi ft + \phi_0)$ e o dígito "1" no sinal $v_1(t) = V\cos(2\pi ft + \phi_1)$, situação que define a modulação digital denominada BPSK (*Binary Phase Shift Keying*) para $\phi_0 = 0^\circ$ e $\phi_1 = 180^\circ$. Neste caso $M = 2$, e dizemos que a modulação é binária porque o mapeamento envolve dois valores de parâmetros de $v(t)$.

Uma outra forma de modulação seria tomar um bloco de N bits consecutivos da seqüência binária proveniente do Codificador de Canal e efetuar a transmissão de um em um bloco a uma razão constante de R $[bits/s]$. Para tanto, o modulador mapeia $M = 2^N$ blocos (ou <u>símbolos</u>) distintos no conjunto de sinais $\{v_i(t)\}$, $i = 0,1,\cdots,M-1$. Este tipo de modulação é denominada *M*-ária porque existem $M > 2$ sinais $v(t)$ distintos. Por exemplo, seja $N = 4$ tal que $M = 2^4 = 16$. Um possível mapeamento seria associar os 16 possíveis blocos de 4 bits aos elementos do conjunto de sinais $\{v_i(t)\}$, $i = 0,1,\cdots,15$, $v_i(t) = V_i\cos(2\pi ft + \phi_i)$, conforme Tabela 1.1.

i	bloco (símbolo)	V_i	ϕ_i
0	0000	1.3	135°
1	0001	1.0	108°
2	0010	1.3	45°
3	0011	1.0	72°
4	0100	1.0	162°
5	0101	0.5	135°
6	0110	1.0	18°
7	0111	0.5	45°
8	1000	1.3	-135°
9	1001	1.0	-108°
10	1010	1.3	-45°
11	1011	1.0	-72°
12	1100	1.0	-162°
13	1101	0.5	-135°
14	1110	1.0	-18°
15	1111	0.5	-45°

Tabela 1.1: Possível mapeamento entre um conjunto de 16 blocos (símbolos) distintos de 4 bits e o conjunto de sinais $\{v_i(t)\}$, $i = 0,1,\cdots,15$, $v_i(t) = V_i\cos(2\pi ft + \phi_i)$. Note que amplitude V e fase ϕ do sinal $v(t)$ são variados, mas a freqüência f é mantida constante neste tipo de modulação. Os valores de V_i e ϕ_i mostrados caracterizam a modulação conhecida por 16–QAM (QAM - *Quadrature Amplitude Modulation*).

Note que o Modulador Digital recebe bits do Codificador de Canal a uma razão uniforme de $R\ [bits/s]$ e os envia na mesma razão ao Canal de Transmissão através do Amplificador de Potência. Cada bloco possui N bits, portanto o Modulador Digital processa $R\left[\frac{bits}{s}\right] \Big/ N\left[\frac{bits}{\text{bloco}}\right] = \frac{R}{N}\left[\frac{\text{blocos}}{\text{s}}\right]$, ou seja, cada bloco de N bits possui um intervalo de duração de N/R segundos. Em outras palavras, para uma taxa fixa de transmissão de bits enviados ao canal de $R\ [bits/s]$, N/R segundos é o intervalo de tempo durante o qual o Modulador Digital gera um dos M sinais $v(t)$ e o transmite ao Canal de Transmissão através do Amplificador de Potência.

Note também que quanto maior o número M de sinais disponíveis, maior será o tamanho N do bloco representado por um dos M sinais, o que implica em maior velocidade de transmissão. Por exemplo, seja um sistema digital com $M = 256$ tal que $N = \log_2 M = 8$. Toda vez que um dos 256 possíveis sinais $v(t)$ é transmitido, significa que 8 bits foram enviados através do canal. Comparemos este sistema com o sistema para o qual $M = 16$ tal que $N = \log_2 M = 4$, mas com o mesmo intervalo entre emissão de sinais $v(t)$ do sistema com $M = 256$. Para $M = 16$, toda vez que um dos 16 possíveis sinais $v(t)$ é transmitido significa que apenas 4 bits foram enviados através do canal. Portanto o sistema com $M = 256$ apresenta o dobro da velocidade de transmissão $R\ [bits/s]$ que o sistema para $M = 16$, assumindo que ambos possuam a mesma taxa $R/N\,[\text{blocos/s}]$ de transmissão de blocos (símbolos).

O Amplificador de Potência eleva o nível de potência do sinal $v(t)$ de forma que o sinal recebido no Receptor tenha um nível suficientemente alto para sobrepujar a degradação decorrente das interferências e ruído inerentes ao Canal de Transmissão.

O Canal de Transmissão é o meio físico que é utilizado para enviar a informação entre o Transmissor e Receptor, a partir do Amplificador de Potência no Transmissor. Qualquer que seja o tipo de Canal de Transmissão, o sinal é corrompido de maneira aleatória através de uma variedade de possíveis mecanismos, como ruído térmico aditivo gerado por dispositivos eletrônicos, ruídos industriais, ruídos de ignição, ruídos atmosféricos, ruído da fauna sub-aquática, interferência de outros transmissores, interferência do próprio sinal devido à ecos e reverberação no canal, etc...

No Receptor, o Amplificador de Sinal é um amplificador de baixo ruído que possui um filtro passa-banda centrado na freqüência f do sinal $v(t)$, o qual recebe o sinal distorcido e interferido pelos agentes de degradação inerentes ao Canal de Transmissão. O objetivo principal do Amplificador de Sinal é eliminar sinais interferentes e reduzir o nível de ruído pelo efeito de corte no espectro do ruído efetuado pelo filtro passa-banda.

O Demodulador Digital processa o sinal corrompido pelo canal e reduz o sinal $v'(t)$ a uma seqüência numérica que representa as estimativas dos símbolos de dados (blocos) transmitidos, símbolos estes que, conforme já discutido, podem ser binários (2 símbolos) ou *M*-ários (*M* símbolos). Esta seqüência numérica é enviada ao Decodificador de Canal, o qual tenta reconstruir a Seqüência de Informação original baseado no conhecimento do código utilizado pelo Codificador de Canal e na redundância controlada contida na informação recebida.

Uma medida de quão bem feito está sendo realizado o trabalho conjunto do Demodulador Digital + Decodificador de Canal é a freqüência estatística em que erros ocorrem na Seqüência de Informação decodificada. Precisamente falando, a probabilidade média de erros em bits da Seqüência de Informação na saída do Decodificador de Canal é uma medida da performance do trabalho conjunto do Demodulador e Decodificador de Canal. Na prática esta probabilidade média de erro é obtida contando-se o número de bits errados N_e em um número suficientemente grande de bits totais N_t recebidos, bits estes provenientes da recepção de diversas Seqüências de Informação consecutivas. Computa-se então a razão $\text{BER} = N_e / N_t$, onde o parâmetro de performance BER (BER – *bit error rate*) é a taxa de erro de bits do Demodulador Digital + Decodificador de Canal e é uma aproximação da probabilidade média de erro. Em geral, a probabilidade de erro é função das características do código utilizado, do tipo de sinal $v(t)$ adotado, da potência do Amplificador de Potência no transmissor, das características do canal (nível de ruído, natureza da interferência, etc...) e do método de demodulação e decodificação.

Finalmente, o Decodificador de Fonte tenta recuperar o sinal original $m(t)$ baseado no método de codificação usado pelo Codificador de Fonte no transmissor. Devido a erros no Decodificador de Canal e possível distorção introduzida pelo Codificador/Decodificador de Fonte, o sinal $m'(t)$ é uma aproximação de $m(t)$. A diferença entre $m'(t)$ e $m(t)$ (ou alguma função desta diferença: $(m'(t) - m(t))^2$, por exemplo) é uma medida da distorção introduzida pelo sistema de transmissão digital.

O Transdutor de Saída é um dispositivo que converte o sinal elétrico $m'(t)$ em uma grandeza física qualquer. Por exemplo, no caso de o sistema mostrado na Figura 1.1 representar um transmissor/receptor de rádio, o Transdutor de Saída pode ser um alto-falante: O sinal elétrico $m'(t)$ movimenta o diafragma do alto-falante o qual gera uma onda acústica cuja intensidade da pressão instantânea corresponde ao sinal $m'(t)$.

1.2 Códigos para Compressão de Dados

Se o Canal de Transmissão na Figura 1.1 fosse absolutamente isento de agentes de degradação como ruído e interferência, não haveria necessidade de codificação para correção de erros e, portanto, não haveria necessidade do Codificador de Canal. Assim, a única necessidade de codificação no sistema digital da Figura 1.1 seria no Codificador de Fonte, já que, nesta situação, nossa única tarefa é maximizar o número de mensagens que podem ser transmitidas pelo sistema em um dado intervalo de tempo. Esta tarefa é realizada através do tipo de codificação denominado Codificação Sem Ruído [Ash], cujo efeito final é efetuar uma compressão no volume de informação a ser transmitido. Sob este enfoque, a Compressão de Dados efetuada no Codificador de Canal de um sistema de transmissão digital é um dos objetos de estudo deste texto.

Vamos supor que o Quantizador do Codificador de Fonte apresente M níveis de quantização e codifique o sinal $m(t)$ quantizado com seqüências de $N = \log_2 M$ bits. O código para compressão de dados considera cada uma das M possíveis seqüências de N bits como uma mensagem de N bits e associa a cada uma delas uma palavra-código cujo número de bits depende da probabilidade de ocorrência da mensagem. Palavras-código com menos bits são atribuídas a mensagens com maior probabilidade de ocorrência, e palavras-código com mais bits são atribuídas a mensagens com menor probabilidade de ocorrência. Este critério é crucial para a eficiência da compressão. Um código que segue este critério faz com que mensagens que ocorrem freqüentemente necessitem de menos bits para serem transmitidas e, portanto, o efeito global é o de permitir que mais informação possa ser transmitida no mesmo intervalo de tempo. A probabilidade de ocorrência de cada mensagem depende da fonte do sinal $m(t)$: vídeo, voz, etc.

Quando um sistema digital é projetado, é feito um estudo estatístico da probabilidade de ocorrência de cada uma das M possíveis mensagens para que o código compressor possa ser especificado. Por exemplo, suponhamos que $m(t)$ seja um sinal de voz. Na prática, aplica-se na entrada do sistema digital um número suficiente de classes de voz para que seja caracterizado o sinal $m(t)$ para a voz humana. Simultaneamente, registra-se as mensagens resultantes na saída do Quantizador – em geral um número n_m bastante grande de mensagens é necessário. Após o processo de registro, conta-se o número de cada tipo de mensagem ocorrida, dentre os M tipos possíveis, e divide-se a contagem de cada tipo por n_m. O conjunto de M valores obtidos, cuja soma forçosamente tende para 1.0, é uma boa aproximação das probabilidades de ocorrência de cada uma das M possíveis mensagens.

Códigos para compressão com base no princípio $probabilidade\uparrow \;\Rightarrow\; bits\downarrow$ são denominados de processos para Codificação por Entropia [Proakis], sendo entropia um conceito a ser estudado adiante neste texto. O veterano Código Morse, utilizado para enviar informação por telegrafia desde a I Guerra Mundial, é um exemplo histórico desta classe de códigos. Cada letra do alfabeto A – Z é uma mensagem do Código Morse. O conjunto de caracteres utilizado para compor as palavras-código do Código Morse é o conjunto $\{" \bullet " , " - "\}$. A cada mensagem é atribuído uma seqüência de "pontos" e/ou "traços" representados em telegrafia por tons audíveis curtos e/ou longos. O mapeamento $mensagem \rightarrow palavra-código$ do Código Morse é tal que letras mais prováveis na escrita inglesa são associadas a palavras-código curtas e letras menos prováveis são associadas a palavras-código longas. A letra "E", por exemplo, é a letra mais freqüente na escrita em inglês e é representada por um único $"\bullet"$.

No contexto de Codificação por Entropia este texto estuda o denominado Código de Huffman. A compressão por codificação de Huffman é ótima no sentido de que o número médio de bits requerido por palavra-código na saída do compressor para representar os M níveis de quantização codificados em mensagens de $N = \log_2 M$ bits é reduzido ao mínimo possível sem que cause degradação.

Apesar de extensivamente utilizado, o Código de Huffman é inadequado para aquelas situações práticas em que é impossível estimar previamente as probabilidades de ocorrência de cada uma das M mensagens. No entanto, existe uma classe de códigos denominada de Algoritmos para Codificação Universal de Fonte [Proakis], classe esta que não necessita das características estatísticas da fonte do sinal $m(t)$ para que a compressão seja efetuada. Dentro desta classe, este texto estuda o Algoritmo Lempel-Ziv.

Os códigos até agora citados pertencem à classe de processos de compressão denominados sem perda (*loseless*), a qual compreende códigos que executam a compressão da informação com recuperação integral da informação original após o processo de descompressão no receptor. Há ainda a grande classe de processos de compressão denominados com perda . Tais processos obtém o efeito de compressão desconsiderando, sob determinado critério, partes menos significativas da informação a ser transmitida. Portanto, após o processo de descompressão no receptor, a informação original é apenas aproximadamente recuperada. No entanto, a compressão obtida através de métodos com perda é muito maior de que com métodos sem perda. Dentro desta classe, este texto estuda a DCT (*Discrete Cosine Transform*), utilizada no padrão JPEG, e a KLT (*Karhunen-Loève Transform*), ótima no sentido do erro médio quadrático.

1.3 Códigos para Correção de Erros

Quando informação digital é enviada através de um canal de transmissão, ruído e interferência inerentes a qualquer canal prático degradam o sinal de forma que os dados recebidos contém erros.

O usuário do sistema de transmissão digital geralmente estabelece uma taxa de erro máxima aceitável – uma mensagem errada em 1×10^{6} mensagens recebidas, por exemplo (i.e., uma taxa de erro de 1×10^{-6}) – acima da qual os dados recebidos não são considerados utilizáveis pelo usuário. Esta taxa de erro máxima aceitável depende da informação que transita pelo canal. A título de comparação, a taxa máxima de erro permitida para transmissão de voz através de telefonia celular é muito maior do que a taxa exigida para transmissão de dados, por exemplo. Até porque, na pior das hipóteses, mesmo sob uma alta taxa de erro e conseqüente distorção, o sistema auditivo humano é capaz de compreender o significado das frases pelo contexto da conversa, o que já não acontece quando dois computadores trocam dados.

O Codificador de Canal é o responsável em um sistema digital por manter a taxa de erro dentro de um limite máximo aceitável pelo usuário. A possibilidade do uso de codificação para controlar com eficiência a taxa de erro de um sistema de comunicação digital foi demonstrado por Shannon [Shannon] em 1948 através do denominado Teorema Fundamental de Shannon:

Se a taxa (=velocidade) de transmissão $R\ [bits/s]$ da informação a ser enviada pelo canal é menor que uma quantidade $C\ [bits/s]$ denominada de Capacidade do Canal, então a comunicação através do canal pode ser estabelecida com uma probabilidade de erro tão baixa quanto se deseje através do uso de um código adequado para correção de erro.

Em essência, o Teorema Fundamental de Shannon estabelece que a potência do sinal transmitido, a potência de ruído no canal e a largura de banda do canal estabelecem um limite máximo na taxa de transmissão *R*, mas não estabelecem limite na precisão da transmissão (a qual é definida pelo inverso da taxa de erro).

No caso específico de o único agente degradante do canal ser ruído $\eta(t)$ com distribuição de probabilidade Gaussiana (canal Gaussiano), a Lei de Shannon-Hartley, decorrente do Teorema Fundamental de Shannon, estabelece que a capacidade *C* deste tipo de canal é dada por

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P}{N}\right)\ [bits/s] \tag{1.1}$$

onde *B* é a largura de banda do canal em Hz, *P* é a potência do sinal transmitido e *N* é a potência do ruído Gaussiano adicionado ao sinal no canal. Em geral, como a densidade espectral de $\eta(t)$, dada por $\left|\Im\{\eta(t)\}\right|^2$, é uma constante $\eta_0/2$ dentro do intervalo de freqüência $-B \leq f \leq B$, o ruído pode ser considerado ruído branco [Taub] e a potência do ruído pode ser aproximada por $N = \eta_0 B$, sendo $\Im\{\cdot\}$o operador Transformada de Fourier [Carlson].

A Lei de Shannon-Hartley apresenta duas importantes implicações:

1- Ela dá um limite superior para a velocidade (taxa) de transmissão confiável através de um canal Gaussiano.

2- Para uma Capacidade de Canal *C* especificada, ela define o compromisso entre a largura de banda *B* do canal e a relação sinal-ruído $\mathrm{SNR} = P/N$ (SNR – *Signal To Noise Ratio*) no mesmo.

Apesar de (1.1) somente ser válida para canal AWGN (AWGN – *Additive White Gaussian Noise*), isto é, o ruído aditivo $\eta(t)$ do canal é Gaussiano e descorrelacionado (i.e., espectralmente branco - *white*), a Lei de Shannon-Hartley é de utilidade prática por duas razões:

1- Em geral a maioria dos canais físicos são pelo menos aproximadamente AWGN.

2- Demonstra-se que o resultado obtido para um canal AWGN provê um limite inferior para a performance de um sistema digital operando com um canal não AWGN.

É instrutivo verificar o que acontece com a Capacidade do Canal quando a largura de banda *B* do canal é aumentada ao infinito. De (1.1) com $N = \eta_0 B$ temos

$$C = B\log_2\left(1+\frac{P}{\eta_0 B}\right)\ [bits/s] \tag{1.2}$$

que pode ser convenientemente re-escrita como

$$C = \frac{P}{\eta_0}\log_2\left(1+\frac{P}{\eta_0 B}\right)^{\frac{\eta_0 B}{P}}\ \ [bits/s] \tag{1.3}$$

Quando $B \to \infty$ temos

$$C\Big|_{B\to\infty} = \lim_{B\to\infty} \frac{P}{\eta_0} \log_2 \left(1 + \frac{P}{\eta_0 B}\right)^{\frac{\eta_0 B}{P}} \quad [bits/s] \tag{1.4}$$

mas

$$\lim_{x\to 0} (1 + x)^{1/x} = e \tag{1.5}$$

e fazendo $x = P/\eta_0 B$, de (1.4) e (1.5) temos

$$C\Big|_{B\to\infty} = \frac{P}{\eta_0} \log_2 e = 1.44 \frac{P}{\eta_0} \quad [bits/s] \tag{1.6}$$

A Equação (1.6) é conhecida como Limite de Shannon. O Limite de Shannon. define a máxima taxa de transmissão para um canal cuja largura de banda seja suficientemente grande tal que não apresente qualquer atenuação ao espectro do sinal que transporta a informação a ser transmitida.

Infelizmente, o Teorema Fundamental de Shannon apenas demonstra que se $R \leq C$ existe um código corretor de erro tal que a informação pode ser transmitida através do canal com uma taxa de erro arbitrariamente baixa, mas não especifica como construir tal código corretor. Talvez a maior utilidade prática do Teorema Fundamental de Shannon seja demonstrar que para $R > C$ não é possível transmitir informação sem erro através do canal, mesmo que se utilize o mais poderoso código corretor de erro que se possa conceber.

É importante salientar que, não raro, o maior valor possível para a taxa de transmissão *R* é dado não por *C*, mas sim, pela complexidade computacional do código corretor necessário para que aquele valor de *R* possa ser alcançado

Dentro do universo de códigos corretores de erro este texto estuda basicamente duas grandes classes, quais sejam, códigos de bloco e códigos convolucionais. Além destes, este texto aborda a classe de códigos concatenados e o conceito de *interleavers*.

1.4 Referências Bibliográficas

[Carlson] A. B. Carlson, *Communication Systems*, McGraw-Hill, 1965.

[Ash] R. Ash, *Information Theory*, Interscience - John Wiley & Sons, 1967.

[Proakis] J. G. Proakis, *Digital Communications*, McGraw-Hill, 1995.

[Shannon] C.E. Shannon, "A Mathematical Theory of Communications", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 27, pp. 379 –423 (part I) and pp. 623 –656 (part II), 1948.

[Taub] H. Taub and D.L. Schilling, *Principles of Communications Systems*, McGraw-Hill, 1986.