

Capítulo VI

A Transformação Karhunen-Loève - Compressão por Decomposição em Sub-Espaços

6.1 Introdução

A Transformação Karhunen-Loève (KLT) projeta um conjunto \mathbf{X} de vetores de dados $\underline{x} \in \mathfrak{R}^M$ sobre uma base ortonormal em \mathfrak{R}^M formada pelo conjunto dos M auto-vetores $\underline{e}_m \in \mathfrak{R}^M$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$, da matriz de covariância de \mathbf{X} . A KLT é tal que a base será orientada de acordo com as direções de maior variância de \mathbf{X} em \mathfrak{R}^M [Oja1] [Oja2] [Castro] [Haykin].

A m -ésima projeção de \mathbf{X} sobre a direção do auto-vetor \underline{e}_m é chamada de m -ésimo sub-espaço (ou m -ésimo componente principal). O m -ésimo auto-valor λ_m associado ao auto-vetor \underline{e}_m corresponde à variância do m -ésimo sub-espaço de \mathbf{X} . Ainda, a variância de cada sub-espaço é um máximo local, no universo de todas as variâncias resultantes da projeção de \mathbf{X} sobre todas as possíveis direções em \mathfrak{R}^M . Embora qualquer espaço de dimensão menor do que \mathfrak{R}^M seja um sub-espaço de \mathfrak{R}^M , este estudo refere-se muitas vezes a um sub-espaço de \mathbf{X} como o conjunto dos vetores de \mathbf{X} que concentram-se de forma alinhada ao longo de uma particular direção em \mathfrak{R}^M . Ainda que esta referência não seja precisa, julgou-se válido aplicá-la devido ao conceito intuitivo nela implícito.

Talvez a mais importante utilização da Transformação Karhunen-Loève, também conhecida por Análise dos Componentes Principais (PCA), seja a redução dimensional do conjunto \mathbf{X} . Esta característica torna a KLT bastante popular em processamento digital de sinais por permitir que as informações mais significativas contidas em um sinal possam ser representadas, mediante a introdução de algum erro considerado aceitável, em um espaço de dados de menores dimensões do que a dimensão original \mathfrak{R}^M . Como cada sub-espaço ou componente principal é orientado de acordo com as direções de maior variância de \mathbf{X} em \mathfrak{R}^M , os sub-espaços de menor variância podem ser descartados – o que resultará em uma redução dimensional ótima no sentido do Erro Médio Quadrático (MSE - *Mean Square Error*) [Castro].

O desenvolvimento do método para aplicação da KLT à \mathbf{X} apresentado neste estudo segue a proposta de Haykin em [Haykin].

Seja \mathbf{X} um processo estocástico vetorial representado pelo conjunto \mathbf{X} de vetores $\underline{x} \in \mathfrak{R}^M$. Caso \mathbf{X} não possua média zero – e, portanto, caso o vetor aleatório \underline{x} não possua média zero – o vetor média deverá ser subtraído dos vetores de \mathbf{X} antes de iniciar a transformação, i.e., $\underline{x} = \underline{x} - E\{\underline{x}\}$ onde $E\{\}$ é operador que resulta no valor esperado estatístico (média estatística) do argumento.

Seja $\underline{e} \in \mathfrak{R}^M$ um vetor unitário e adimensional qualquer, sobre o qual será projetado um vetor $\underline{x} \in \mathbf{X}$. Sendo \underline{e} um vetor unitário, a norma Euclidiana de \underline{e} é dada pela Equação (6.1).

$$\|\underline{e}\| = \sqrt{\underline{e}^T \underline{e}} = 1 \quad (6.1)$$

Como \underline{e} é unitário e adimensional, o tamanho (norma Euclidiana) do vetor que resulta da projeção de \underline{x} sobre \underline{e} , denominada de projeção a , possui a mesma unidade dimensional de \underline{x} e é dado pela Equação (6.2).

$$a = \underline{x}^T \underline{e} = \underline{e}^T \underline{x} \quad (6.2)$$

Portanto, a define o tamanho da projeção do vetor \underline{x} na direção do vetor \underline{e} . A projeção a também é uma variável aleatória, com média e variância associadas à estatística do vetor aleatório \underline{x} .

A média da projeção a é dada por

$$E\{a\} = E\{\underline{e}^T \underline{x}\} \quad (6.3)$$

$$E\{a\} = \underline{e}^T E\{\underline{x}\} = 0 \quad (6.4)$$

A variância da projeção a é dada por

$$\sigma_a^2 = E\{a^2\} \quad (6.5)$$

$$\sigma_a^2 = E\{(\underline{e}^T \underline{x})(\underline{x}^T \underline{e})\} \quad (6.6)$$

$$\sigma_a^2 = \underline{e}^T E\{\underline{x} \underline{x}^T\} \underline{e} \quad (6.7)$$

onde $E\{\underline{x} \underline{x}^T\}$ é a matriz de covariância \mathbf{C}_x , de dimensões $M \times M$, do conjunto \mathbf{X} de vetores $\underline{x} \in \mathfrak{R}^M$.

Nota: Na prática \mathbf{C}_x é aproximado por $\mathbf{C}_x = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T$ sendo L o número total de vetores conhecidos em \mathbf{X} .

Portanto, a Equação (6.7) pode ser escrita como

$$\sigma_a^2 = \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} \quad (6.8)$$

onde observa-se que a variância σ^2 da projeção a é uma função do vetor unitário \underline{e} . Expressando matematicamente,

$$\sigma_a^2 = f(\underline{e}) \quad (6.9)$$

A KLT objetiva determinar o conjunto de vetores \underline{e} para cuja direção em \mathfrak{R}^M a variância da projeção a é máxima. Portanto, a KLT varia o vetor \underline{e} no universo de todas as possíveis direções em \mathfrak{R}^M na busca daquela direção que resulta no máximo $f(\underline{e})$. Para que a norma de \underline{e} não influa no resultado de $f(\underline{e})$ durante a busca, ela deve ser constante e unitária. Esta é a razão da condição preliminar definida em (6.1).

Se \underline{e} alinha-se com uma direção em \mathfrak{R}^M do conjunto \mathbf{X} tal que nesta direção $f(\underline{e})$ resulta em um máximo local dentro do universo de busca, então, devido à menor declividade de $f(\underline{e})$ nas vizinhanças de um máximo local, para qualquer pequena variação $\delta\underline{e}$ do vetor unitário \underline{e} temos que

$$f(\underline{e} + \delta\underline{e}) \approx f(\underline{e}) \quad (6.10)$$

Nota: Embora (6.10) também seja válida nas vizinhanças de um mínimo local, esta ambigüidade é implicitamente resolvida quando utiliza-se a *eigen*-estrutura de \mathbf{C}_x [Haykin].

Combinando as Equações (6.8) e (6.9) obtém-se que $f(\underline{e}) = \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e}$. Assumindo que o valor de $\delta\underline{e}$ seja suficientemente pequeno de modo que $f(\underline{e})$ não se afaste das vizinhanças do máximo local, pode-se admitir a igualdade em (6.10). Portanto,

$$f(\underline{e}) = \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} = f(\underline{e} + \delta\underline{e}) = (\underline{e} + \delta\underline{e})^T \mathbf{C}_x (\underline{e} + \delta\underline{e}) \quad (6.11)$$

$$f(\underline{e} + \delta\underline{e}) = \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} + \underline{e}^T \mathbf{C}_x \delta\underline{e} + \delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} + \delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \delta\underline{e} \quad (6.12)$$

Como a matriz de covariância \mathbf{C}_x do conjunto \mathbf{X} é uma matriz simétrica, tem-se que

$$\underline{e}^T \mathbf{C}_x \delta\underline{e} = \delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} \quad (6.13)$$

e a Equação (6.12) pode ser reescrita sob a forma

$$f(\underline{e} + \delta\underline{e}) = \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} + 2\delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} + \delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \delta\underline{e} \quad (6.14)$$

Como $\delta\underline{e}$ é muito pequeno, o termo $(\delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \delta\underline{e})$ no lado direito de (6.12) pode ser desconsiderado. De (6.14), (6.8) e (6.9) pode-se escrever que

$$f(\underline{e} + \delta\underline{e}) = f(\underline{e}) + 2\delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} \quad (6.15)$$

Ao levar a Equação (6.10) à Equação (6.15) conclui-se que

$$\delta\underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} = 0 \quad (6.16)$$

Mas, para que a norma de \underline{e} não influa no resultado de $f(\underline{e})$ durante a busca, ela deve ser mantida constante e unitária. Portanto, são admissíveis apenas as perturbações $\delta\underline{e}$ para as quais a norma do vetor perturbado $\underline{e} + \delta\underline{e}$ permaneça unitária, ou seja

$$\|\underline{e} + \delta\underline{e}\| = 1 \quad (6.17)$$

o que equivale a dizer que

$$(\underline{e} + \delta \underline{e})^T (\underline{e} + \delta \underline{e}) = 1 \quad (6.18)$$

Expandindo o produto $(\underline{e} + \delta \underline{e})^T (\underline{e} + \delta \underline{e})$, temos

$$(\underline{e} + \delta \underline{e})^T (\underline{e} + \delta \underline{e}) = \underline{e}^T \underline{e} + \underline{e}^T \delta \underline{e} + \delta \underline{e}^T \underline{e} + \delta \underline{e}^T \delta \underline{e} \quad (6.19)$$

onde

$$\underline{e}^T \delta \underline{e} = \delta \underline{e}^T \underline{e} \quad (6.20)$$

e onde o termo $\delta \underline{e}^T \delta \underline{e}$ pode ser desconsiderado. Portanto,

$$(\underline{e} + \delta \underline{e})^T (\underline{e} + \delta \underline{e}) = \underline{e}^T \underline{e} + 2 \delta \underline{e}^T \underline{e} \quad (6.21)$$

como, de (6.18), $(\underline{e} + \delta \underline{e})^T (\underline{e} + \delta \underline{e}) = 1$ então, de (6.21)

$$\underline{e}^T \underline{e} + 2 \delta \underline{e}^T \underline{e} = 1 \quad (6.22)$$

mas, de (6.1), $\underline{e}^T \underline{e} = 1$ em (6.22), e portanto

$$\delta \underline{e}^T \underline{e} = 0 \quad (6.23)$$

Inferre-se da Equação (6.23) que as variações $\delta \underline{e}$ devem ser ortogonais a \underline{e} durante o processo de busca da direção de máximo $f(\underline{e})$. Este é o único tipo de variação permitida a \underline{e} no espaço de busca \mathfrak{R}^M tal que a Equação (6.17) seja obedecida.

Nas Equações (6.16) e (6.23) residem as duas condições simultâneas a serem respeitadas para a determinação dos vetores \underline{e} para os quais $f(\underline{e})$ terá valor máximo. Somando-se estas equações, pode-se escrever que

$$\delta \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} - \lambda \delta \underline{e}^T \underline{e} = \mathbf{C}_x (\delta \underline{e})^T \underline{e} - \lambda (\delta \underline{e})^T \underline{e} = 0 \quad (6.24)$$

onde o fator de escala λ foi introduzido para compatibilizar a unidade dimensional do vetor unitário \underline{e} (adimensional por definição) com a unidade dimensional da matriz \mathbf{C}_x representativa da covariância do conjunto \mathbf{X} . Por exemplo, se os vetores do conjunto \mathbf{X} representam uma grandeza cuja unidade dimensional é $\left[\frac{\text{metro}}{\text{segundo}} \right]$, λ terá unidade

dimensional $\left[\frac{\text{metro}^2}{\text{segundo}^2} \right]$.

Reescrevendo a equação (6.24),

$$(\delta \underline{e})^T (\mathbf{C}_x \underline{e} - \lambda \underline{e}) = 0 \quad (6.25)$$

Para que a condição posta na Equação (6.25) seja satisfeita, é necessário e suficiente que

$$\mathbf{C}_x \underline{e} = \lambda \underline{e} \quad (6.26)$$

que é a equação que define os vetores \underline{e} para os quais $f(\underline{e})$ tem valor máximo.

A Equação (6.26) é reconhecida como **a equação dos auto-vetores da matriz C_x** e apresenta um conjunto de soluções não-triviais para aqueles valores de λ que são denominados **os auto-valores de C_x** . Seja a k -ésima solução de (6.26) tal que

$$(C_x - \lambda_k I) \underline{e}_k = \underline{0} \quad (6.27)$$

Por serem mapeados no vetor nulo $\underline{0}$ através de $(C_x - \lambda_k I)$, os auto-vetores \underline{e}_k pertencem ao espaço nulo da transformação linear (6.27), isto é,

$$\underline{e}_k \in \mathfrak{R}^N \quad (6.28)$$

onde \mathfrak{R}^N é denominado espaço nulo da matriz $(C_x - \lambda_k I)$, denotado por $\mathbf{N} \{C_x - \lambda_k I\}$. A dimensão \mathfrak{R}^N do espaço nulo de uma transformação linear define o número \mathbf{N} de vetores linearmente independentes que levam a transformação ao vetor nulo $\underline{0}$, os quais, portanto, definem uma base geradora de \mathfrak{R}^N [Chen][Gantmacher].

O *rank* da matriz $(C_x - \lambda_k I)$, denotado $\mathbf{R} \{C_x - \lambda_k I\}$, é o espaço \mathfrak{R}^R gerado pelo número \mathbf{R} de vetores-colunas de $(C_x - \lambda_k I)$ que são linearmente independentes. Um teorema de Teoria de Matrizes prova que a dimensão M da matriz quadrada $(C_x - \lambda_k I)_{[M \times M]}$ é igual à soma das dimensões de seu *rank* e espaço nulo [Chen][Gantmacher], isto é

$$\mathbf{N} + \mathbf{R} = M = \dim\{C_x - \lambda_k I\} \quad (6.29)$$

Por definição, os auto-vetores \underline{e}_k formam uma base ortonormal no espaço por eles gerado. Isto significa que em (6.27) o conjunto de auto-vetores \underline{e}_k define a própria base para o espaço nulo \mathfrak{R}^N . Portanto, de (6.29), para que a dimensão \mathbf{N} do espaço nulo seja igual à dimensão da matriz $(C_x - \lambda_k I)$, é necessário que o *rank* da matriz seja nulo ($\mathbf{R} = 0$). Assim $\mathbf{N} = M = \dim\{C_x - \lambda_k I\}$, de forma que existirão M vetores \underline{e}_k linearmente independentes. Mas, uma matriz que possui *rank* nulo é uma matriz singular. Isto é, se

$$\mathbf{R} \{C_x - \lambda_m I\} = 0 \Rightarrow (C_x - \lambda_m I) \text{ é singular, } m = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (6.30)$$

e, se a matriz $(C_x - \lambda_m I)$ é singular, pode-se escrever que

$$\det\{C_x - \lambda_m I\} = 0 \quad (6.31)$$

onde $\det\{\}$ representa o determinante da matriz argumento.

A Equação (6.31) é a equação utilizada para a determinação do m -ésimo auto-valor λ_m da matriz C_x representativa da covariância do conjunto \mathbf{X} , $m = 0, 1, \dots, M - 1$. Como C_x é uma matriz simétrica, possui auto-valores reais e não-negativos [Chen][Gantmacher].

Uma vez determinados os M auto-valores $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}$ da matriz C_x através de (6.31), obtém-se os auto-vetores associados $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{M-1}$ através de (6.27).

Assim, de (6.27) pode-se escrever

$$\mathbf{C}_x \underline{e}_m = \lambda_m \underline{e}_m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6.32)$$

Seja Λ uma matriz diagonal, $M \times M$, composta pelos auto-valores da matriz \mathbf{C}_x , de acordo com a Equação (6.32),

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_{M-1}) \quad (6.33)$$

onde os M auto-valores estão ordenados de forma decrescente, de modo que λ_0 seja o maior auto-valor.

Seja \mathbf{E} uma matriz $M \times M$ cujas colunas são formadas pelos M auto-vetores $\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{M-1}$ dados pela Equação (6.32) associados aos auto-valores $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{M-1}$.

$$\mathbf{E} = [\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_j, \dots, \underline{e}_{M-1}] \quad (6.34)$$

De acordo com (6.33) e (6.34), a Equação (6.32) pode ser reescrita como

$$\mathbf{C}_x \mathbf{E} = \mathbf{E} \Lambda \quad (6.35)$$

Como os auto-vetores de \mathbf{C}_x (vetores-coluna de \mathbf{E}) são ortonormais, a matriz \mathbf{E} é dita ortonormal. Portanto, os vetores-coluna de \mathbf{E} satisfazem a condição de ortonormalidade,

$$\underline{e}_i^T \underline{e}_j = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases} \quad (6.36)$$

A Equação (6.36) pode também ser escrita sob a forma

$$\mathbf{E}^T \mathbf{E} = \mathbf{I} \quad (6.37)$$

de onde vem que

$$\mathbf{E}^T = \mathbf{E}^{-1} \quad (6.38)$$

A Equação (6.35) pode ser reescrita, sob a forma de uma Transformação de Similaridade [Chen][Gantmacher]. Pré-multiplicando ambos os lados da Equação (6.35) por \mathbf{E}^T ,

$$\mathbf{E}^T \mathbf{C}_x \mathbf{E} = \mathbf{E}^T \mathbf{E} \Lambda \quad (6.39)$$

De (6.39) e (6.38),

$$\mathbf{E}^T \mathbf{C}_x \mathbf{E} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{C}_x \mathbf{E} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{E} \Lambda \quad (6.40)$$

ou

$$\mathbf{E}^T \mathbf{C}_x \mathbf{E} = \Lambda \quad (6.41)$$

que, na forma expandida, resulta em

$$\underline{e}_j^T \mathbf{C}_x \underline{e}_k = \begin{cases} \lambda_j, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (6.42)$$

Das Equações (6.8) e (6.9) tem-se

$$\sigma_a^2 = f(\underline{e}) = \underline{e}^T \mathbf{C}_x \underline{e} \quad (6.43)$$

Comparando as Equações (6.42) e (6.43), verifica-se que

$$f(\underline{e}_m) = \lambda_m, \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (6.44)$$

Portanto, os M auto-vetores \underline{e}_m da matriz \mathbf{C}_x representam as M direções principais ao longo das quais a variância $\sigma_m^2 = f(\underline{e}_m)$ é máxima e dada por λ_m .

6.2 Interpretação Geométrica da KLT

A decomposição em sub-espacos gerada pela KLT consiste em obter o conjunto de M auto-vetores e auto-valores da matriz de covariância \mathbf{C} de um conjunto \mathbf{U} de média zero, composto por L vetores de dados $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M, i = 0, 1, \dots, L-1$. A restrição de que o conjunto \mathbf{U} apresente média vetorial $\underline{0} \in \mathfrak{R}^M$ é transparente a nível de procedimento, já que o vetor média pode ser restaurado ao final. O conjunto de M auto-vetores $\underline{e}_m \in \mathfrak{R}^M$ obtido pela KLT, $m = 0, 1, \dots, M-1$, define uma base de vetores ortonormais em \mathfrak{R}^M e, portanto, define um conjunto de M eixos ortogonais Cartesianos. A coordenada de origem deste sistema Cartesiano é a coordenada de origem dos vetores da base ortonormal definida pelo conjunto de M auto-vetores \underline{e}_m . Como a média do conjunto \mathbf{U} é assumida zero, a coordenada de origem do sistema Cartesiano é $\underline{0} \in \mathfrak{R}^M$. Ao projetar o conjunto original de vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M$ sobre o m -ésimo eixo Cartesiano, a variância do conjunto projetado – ou variância do sub-espaco – é dada pelo m -ésimo auto-valor λ_m . Ainda, a variância do conjunto \mathbf{U} é igual à soma das variâncias das projeções de \mathbf{U} [Castro]. Isto é, a média do quadrado da norma Euclidiana dos vetores de \mathbf{U} é igual à soma dos M auto-valores λ_m , onde λ_m equivale à média do quadrado da norma Euclidiana da projeção dos vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M$ sobre o m -ésimo eixo.

A título de interpretação da KLT, se quiséssemos obter a KLT através de um processo manual e experimental, tomaríamos um vetor arbitrário de módulo unitário $\underline{e} \in \mathfrak{R}^M$ com origem em $\underline{0} \in \mathfrak{R}^M$, o qual definiria uma direção arbitrária em que o conjunto \mathbf{U} de vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M$ de dados seria projetado. Projetaríamos, então, a totalidade do conjunto \mathbf{U} sobre a direção dada por \underline{e} e mediríamos a variância λ da projeção. Após tentarmos todas as direções possíveis no espaco \mathfrak{R}^M , haverá uma direção dada por \underline{e} na qual é obtida a maior variância λ_0 . O vetor \underline{e} que define tal direção é igual ao auto-vetor \underline{e}_0 associado ao maior auto-valor, obtidos pela KLT, com valor do maior auto-valor dado por λ_0 . O processo é repetido novamente para a obtenção do segundo maior auto-valor λ_1 , com a restrição de que a busca da direção de maior variância em \mathfrak{R}^M seja feita em direções ortogonais à do auto-vetor \underline{e}_0 associado ao maior auto-valor λ_0 , recém determinados. A busca da direção de maior variância em \mathfrak{R}^M para obtenção do terceiro maior auto-valor λ_2 é feita com a restrição de que as direções testadas sejam ortogonais às direções dos dois auto-vetores \underline{e}_0 e \underline{e}_1 associados aos maiores auto-valores λ_0 e λ_1 previamente

encontrados. E assim prosseguiríamos neste processo recursivo até que os M auto-valores e auto-vetores fossem determinados.

Assim, como os sub-espacos obtidos pela KLT estão alinhados com as direções ortogonais de maior variância possível no espaço original \mathfrak{R}^M , a KLT é considerada uma transformação ótima no sentido do erro médio quadrático MSE [Castro][Hassoun][Haykin] para efeito de reconstrução do espaço original \mathfrak{R}^M a partir de suas M projeções ou componentes principais. Ou seja, o conjunto de M sub-espacos representa de maneira ótima, no sentido do MSE, o conjunto \mathbf{U} de L vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M$, $i = 0, 1, \dots, L-1$. Conforme já discutido, os sub-espacos obtidos pela KLT encontram-se alinhados com os eixos Cartesianos que definem as direções de maior variância possíveis no espaço original \mathfrak{R}^M . Em consequência, isto resulta em uma maior concentração de pontos definidos pelos vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M$ do espaço original nas vizinhanças dos eixos Cartesianos que definem cada sub-espaço.

Como o m -ésimo eixo Cartesiano define a m -ésima região em \mathfrak{R}^M de maior variância λ_m , aqueles vetores cuja média do quadrado de suas normas Euclidianas é próxima ao valor λ_m (λ_m é a média do quadrado das normas Euclidianas das projeções destes vetores sobre o m -ésimo eixo) caracterizarão um sub-conjunto de vetores do espaço \mathfrak{R}^M aproximadamente alinhados com o m -ésimo eixo.

Parte destes vetores estará aproximadamente congruente (*i.e.*, alinhados no mesmo sentido) com o m -ésimo semi-eixo positivo, e parte dos vetores estará aproximadamente congruente com o m -ésimo semi-eixo negativo. Mas, independentemente do sentido positivo ou negativo, a média do quadrado da norma Euclidiana destes vetores será, em maior ou menor grau, próxima ao valor λ_m , grau que depende do quanto os vetores alinham-se com o m -ésimo eixo Cartesiano. Adicionalmente, a média dos vetores que são congruentes com o semi-eixo negativo tende a ser igual à média dos vetores que são congruentes com o semi-eixo positivo, já que \mathbf{U} apresenta média vetorial $\underline{0} \in \mathfrak{R}^M$. Assim, deve-se esperar um certo equilíbrio entre os vetores alinhados com cada um dos dois semi-eixos.

Portanto, o m -ésimo sub-espaço identifica uma nuvem de pontos em \mathfrak{R}^M nas vizinhanças do m -ésimo eixo Cartesiano, com coordenada de cada ponto definida pelo respectivo vetor $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^M$ do conjunto \mathbf{U} nas vizinhanças do m -ésimo eixo. Como a média do quadrado da norma Euclidiana dos vetores associados a estes pontos tende em maior ou menor grau para λ_m , a norma – ou distância – Euclidiana média destes pontos à origem aproxima-se do valor $\sqrt{\lambda_m}$.

Exemplo 6.1: Seja o conjunto \mathbf{U} de $L = 6$ vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^2$, $i = 0, 1, \dots, L-1$, de média zero definido por $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.425 \\ -1.063 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.595 \\ -0.943 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.327 \\ -0.843 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.497 \\ 0.820 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.491 \\ 1.133 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.359 \\ 0.897 \end{bmatrix} \right\}$.

- a) Plote os auto-vetores \underline{e}_m da matriz \mathbf{C} de covariância de \mathbf{U} conjuntamente com os vetores de \mathbf{U} . Para facilitar a visualização, escalone os auto-vetores \underline{e}_m pela raiz dos respectivos auto-valores λ_m , i.e., $\underline{\psi}_m = \underline{e}_m \cdot \sqrt{\lambda_m}$, $m = 0,1$.
- b) Obtenha as projeções de \mathbf{U} sobre os eixos Cartesianos definidos pelos auto-vetores de \mathbf{C} .

Solução:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^5 \underline{x}_i \cdot \underline{x}_i^T = \\ &= \frac{1}{6} \left\{ \begin{aligned} &\begin{bmatrix} 0.425 \\ -1.063 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.425 & -1.063 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0.595 \\ -0.943 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.595 & -0.943 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0.327 \\ -0.843 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.327 & -0.843 \end{bmatrix}^T + \\ &\begin{bmatrix} -0.497 \\ 0.820 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.497 & 0.820 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -0.491 \\ 1.133 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.491 & 1.133 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} -0.359 \\ 0.897 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.359 & 0.897 \end{bmatrix}^T \end{aligned} \right\} = \begin{bmatrix} 0.21 & -0.429 \\ -0.429 & 0.915 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

De (6.32), temos

$$\mathbf{C} \underline{e}_m = \lambda_m \underline{e}_m$$

sendo $m = 0,1, \dots, M-1$ com $M = 2$ ($M = 2$ porque $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^2$)

A solução de $\mathbf{C} \underline{e}_m = \lambda_m \underline{e}_m$ com $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0.21 & -0.429 \\ -0.429 & 0.915 \end{bmatrix}$ consiste na determinação dos M auto-valores λ_m e dos M auto-vetores \underline{e}_m que satisfazem esta equação. Utilizando as funções `eigenvals()` e `eigenvecs()` do aplicativo MathCad da MathSoft Inc., obtemos :

Auto-valores: $\lambda_0 = 1.118$ e $\lambda_1 = 7.035 \times 10^{-3}$

Auto-vetores associados: $\underline{e}_0 = \begin{bmatrix} -0.427 \\ 0.904 \end{bmatrix}$ e $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.904 \\ 0.427 \end{bmatrix}$.

Nota: Qualquer outro aplicativo da área de matemática pode ser utilizado para determinar os auto-valores e auto-vetores de \mathbf{C} , como, por exemplo, o MatLab da MathWorks Inc.

A Figura 6.1 mostra o conjunto \mathbf{U} , os $M = 2$ auto-vetores escalonados $\underline{\psi}_m = \underline{e}_m \cdot \sqrt{\lambda_m}$, $m = 0,1, \dots, M-1$ e os eixos Cartesianos por eles definidos.

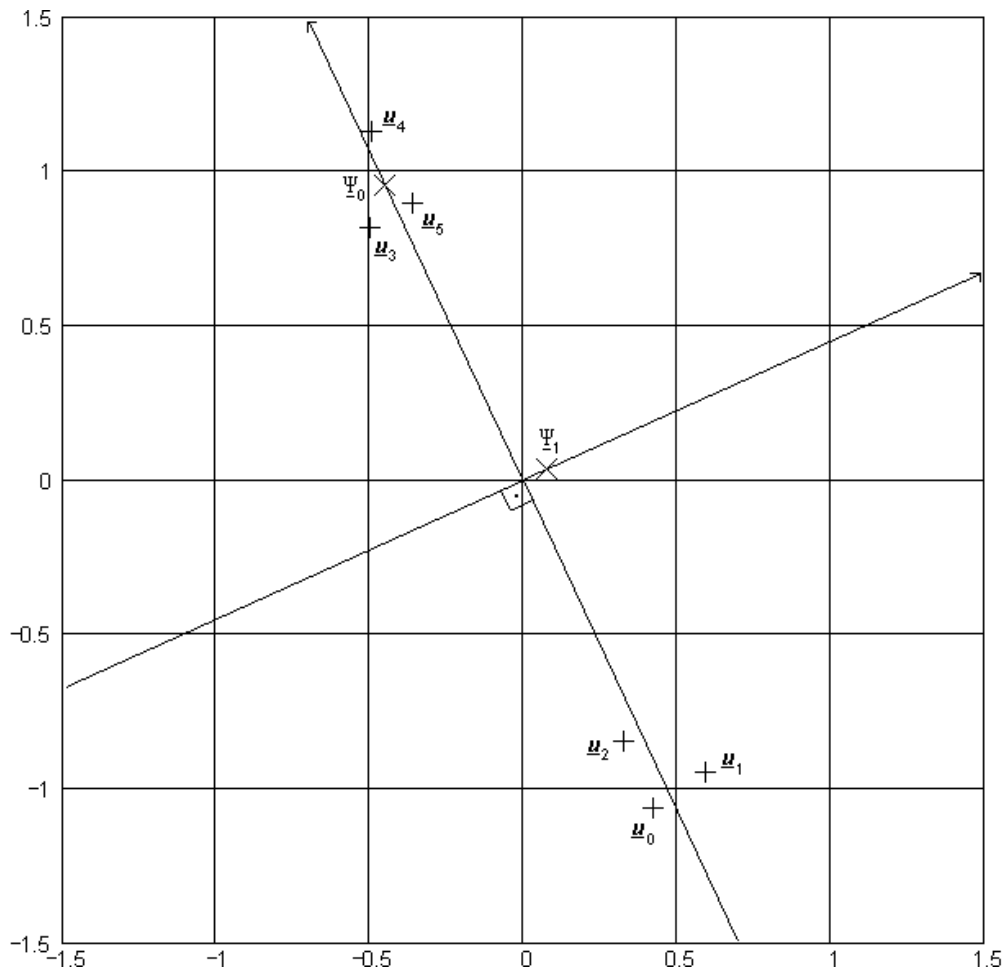


Figura 6.1: Conjunto \mathbf{U} , auto-vetores escalonados $\underline{\psi}_0$ e $\underline{\psi}_1$ e os eixos Cartesianos por eles definidos.

A Tabela 6.1 mostra a valor da projeção de cada vetor $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^2$ do conjunto \mathbf{U} sobre os eixos Cartesianos definidos por \underline{e}_0 e \underline{e}_1 .

i	$a_{0i} = \underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_0$	$a_{1i} = \underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_1$
0	-1.142	-0.07
1	-1.107	0.135
2	-0.902	-0.065
3	0.953	-0.099
4	1.234	0.04
5	0.964	0.059

Tabela 6.1: Projeções \mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1 de \mathbf{U} sobre os eixos Cartesianos definidos por \underline{e}_0 e \underline{e}_1 .

Observe que, como os auto-vetores \underline{e}_0 e \underline{e}_1 têm norma unitária e são adimensionais [Chen], o valor absoluto da projeção de cada $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^2$ sobre cada eixo define a norma Euclidiana da i -ésima projeção.

Note que a variância do conjunto \mathbf{U} é dada pela soma dos auto-valores, i.e., $\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} \|\underline{u}_i\|^2 = 1.125 = \lambda_0 + \lambda_1$, onde $\|\underline{u}\| = \sqrt{\sum_{m=0}^{M-1} (u_m)^2} = \sqrt{\underline{u}^T \cdot \underline{u}}$ é a norma Euclidiana do vetor $\underline{u} \in \mathfrak{R}^M$ [Chen].

Note ainda que as variâncias das projeções \mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1 de \mathbf{U} equivalem aos respectivos auto-valores, i.e., $\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (\underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_0)^2 = 1.118 = \lambda_0$ e $\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (\underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_1)^2 = 7.035 \times 10^{-3} = \lambda_1$. Portanto, a variância do conjunto projetado, ou variância do sub-espço, é dada pelo m -ésimo auto-valor λ_m .

Como observação adicional note que a distância Euclidiana média $\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |\underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_m|$ dos vetores da m -ésima projeção à origem pode ser aproximada por $\sqrt{\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (\underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_m)^2} = \sqrt{\lambda_m}$. No caso, $\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |\underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_0| = 1.051$ para $\sqrt{\lambda_0} = 1.057$ e $\frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} |\underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_1| = 0.078$ para $\sqrt{\lambda_1} = 0.083$.

6.3 O Processo de Compressão Possibilitado pela KLT

Na seção anterior vimos que os M eixos Cartesianos resultantes da KLT alinham-se com as direções de maior variância (=energia) de um conjunto \mathbf{U} de vetores \mathfrak{R}^M dimensionais, sendo $\underline{0} \in \mathfrak{R}^M$ o vetor média de \mathbf{U} . O Exemplo 6.1 ilustrou um caso para $M = 2$.

A Figura 6.2 mostra uma representação pictórica hipotética de uma nuvem de dados em \mathfrak{R}^3 . Cada ponto da nuvem define a ponta de um vetor deste conjunto \mathbf{U} em \mathfrak{R}^3 . A figura mostra a maneira como a base ortonormal formada pelos auto-vetores alinha-se com as direções de maior variância (energia) de \mathbf{U} . Assim, no caso genérico de um conjunto \mathbf{U} em \mathfrak{R}^M , podemos imaginar a KLT "girando" uma base de M vetores ortonormais em \mathfrak{R}^M em todas as possíveis direções até que os vetores alinhem-se com as direções de maior variância possível em \mathbf{U} . Nesta situação os vetores da base ortonormal são os auto-vetores da matriz de covariância de \mathbf{U} .

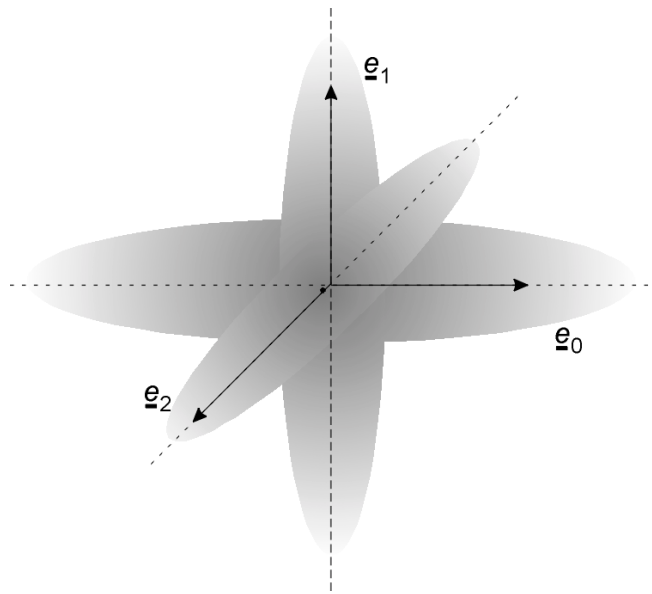


Figura 6.2: Representação pictórica hipotética de uma "nuvem" de dados em \mathfrak{R}^3 e a maneira como a base ortonormal formada pelos auto-vetores \underline{e}_0 , \underline{e}_1 e \underline{e}_2 alinha-se com as direções de maior variância.

Vimos também que a energia contida em uma determinada direção (=variância da projeção de \mathbf{U} na direção) é dada pelo auto-valor associado ao auto-vetor que define a direção. Portanto, podemos desprezar aquelas direções (=sub-espacos) definidas por auto-vetores cujo auto-valor associado é muito menor do que os demais auto-valores. Isto é possível porque a projeção de \mathbf{U} sobre tais direções é insignificante se comparada com as projeções cujo auto-valor associado não é comparativamente pequeno.

Ao desprezar sub-espacos de menor energia estamos realizando **uma compressão com perdas** do conjunto \mathbf{U} . No entanto estas perdas são mínimas pois as componentes (=sub-espacos) descartadas tem pouca influência na formação de \mathbf{U} porque os auto-valores a elas associados supostamente têm valor muito menor do que os demais. Neste sentido ocorre a **redução dimensional** de \mathbf{U} , porque o conjunto era originalmente representado em \mathfrak{R}^M e, ao descartar sub-espacos não significativos, o conjunto passa a ser representado com boa aproximação em uma dimensão menor que M . Este é o motivo de a KLT ser considerada uma transformação ótima sob o ponto de vista do MSE.

Exemplo 6.2: Seja o conjunto \mathbf{U} do Exemplo 6.1.

- Execute uma compressão com perdas de \mathbf{U} utilizando a KLT.
- Calcule a compressão obtida.
- Calcule o MSE da compressão obtida.
- Calcule a Relação Sinal – Ruído de Pico em dB, denotada PSNR (PSNR – *Peak Signal To Noise Ratio*), resultante do processo de compressão. Isto é, calcule o quadrado da

componente de maior valor absoluto dentre todas as componentes dos vetores de \mathbf{U} e normalize pelo MSE obtido em c).

Solução:

No Exemplo 6.1 foram determinadas as projeções de \mathbf{U} sobre a base ortonormal formada pelos auto-vetores \underline{e}_0 e \underline{e}_1 , conforme mostra a Tabela 6.1.

Observe na Tabela 6.1 que as projeções sobre a direção \underline{e}_1 são muito menores do que as projeções sobre a direção \underline{e}_0 . Esta característica das projeções está de acordo com o fato de que $\lambda_1 = 7.035 \times 10^{-3}$ é muito menor do que $\lambda_0 = 1.118$. Sendo assim, podemos descartar as projeções ou componentes de \mathbf{U} na direção \underline{e}_1 (a direção com menor auto-valor associado) e considerar as projeções de \mathbf{U} na direção \underline{e}_0 (a direção com maior auto-valor associado) como uma boa aproximação de \mathbf{U} .

Portanto a compressão com perdas consiste em aproximar \mathbf{U} através do auto-vetor \underline{e}_0 e do conjunto de projeções $a_{0i} = \underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_0$ na direção por ele definida. A aproximação $\tilde{\mathbf{U}}$ do conjunto de vetores originais $\underline{u}_i \in \mathbf{U}$, é obtida através de $\tilde{\underline{u}}_i = a_{0i} \underline{e}_0$, $\tilde{\underline{u}}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$, isto é,

i	$a_{0i} = \underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_0, \quad \underline{e}_0 = \begin{bmatrix} -0.427 \\ 0.904 \end{bmatrix}$	$\tilde{\underline{u}}_i = a_{0i} \underline{e}_0$
0	-1.142	$\begin{bmatrix} 0.488 \\ -1.032 \end{bmatrix}$
1	-1.107	$\begin{bmatrix} 0.473 \\ -1.001 \end{bmatrix}$
2	-0.902	$\begin{bmatrix} 0.385 \\ -0.815 \end{bmatrix}$
3	0.953	$\begin{bmatrix} -0.407 \\ 0.862 \end{bmatrix}$
4	1.234	$\begin{bmatrix} -0.527 \\ 1.116 \end{bmatrix}$
5	0.964	$\begin{bmatrix} -0.412 \\ 0.871 \end{bmatrix}$

Tabela 6.2: Aproximação $\tilde{\mathbf{U}}$ do conjunto original \mathbf{U} obtida através de $\tilde{\underline{u}}_i = a_{0i} \underline{e}_0$, onde $\tilde{\underline{u}}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$.

Portanto, da Tabela 6.2, o conjunto $\tilde{\mathbf{U}}$ resultante é

$$\tilde{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.488 \\ -1.032 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.473 \\ -1.001 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.385 \\ -0.815 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.407 \\ 0.862 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.527 \\ 1.116 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.412 \\ 0.871 \end{bmatrix} \right\}$$

Observe que o conjunto original $\mathbf{U} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.425 \\ -1.063 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.595 \\ -0.943 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.327 \\ -0.843 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.497 \\ 0.820 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.491 \\ 1.133 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.359 \\ 0.897 \end{bmatrix} \right\}$ de $L = 6$ vetores $\underline{u}_i \in \mathfrak{R}^2$, $i = 0, 1, \dots, L-1$ necessita de 12 números em ponto-flutuante para ser representado. Por outro lado, o conjunto aproximado $\tilde{\mathbf{U}}$ foi gerado a partir do auto-vetor $\underline{e}_0 = \begin{bmatrix} -0.427 \\ 0.904 \end{bmatrix}$ e de um conjunto de 6 projeções $\mathbf{a}_0 = \{-1.142, -1.107, -0.902, 0.953, 1.234, 0.964\}$. Portanto, o conjunto $\tilde{\mathbf{U}}$ necessita de apenas 8 números em ponto-flutuante para ser representado.

Define-se como fator de compressão ρ o quociente

$$\rho = \frac{\text{Total de unidades de armazenamento necessário para representar } \tilde{\mathbf{U}}}{\text{Total de unidades de armazenamento necessário para representar } \mathbf{U}} \quad (6.45)$$

Portanto o fator de compressão obtido é $\rho = 8/12 = 0.67$.

O MSE da aproximação $\tilde{\mathbf{U}}$ pode ser obtido através de

$$\text{MSE} = \frac{1}{L} \sum_{i=0}^{L-1} (\tilde{u}_i - u_i)^T (\tilde{u}_i - u_i) \quad (6.46)$$

onde $\underline{u}_i \in \mathbf{U}$ e $\tilde{u}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$, $i = 0, 1, \dots, L-1$.

De (6.46) obtemos $\text{MSE} = 7.025 \times 10^{-3}$.

A PSNR é definida como

$$\text{PSNR} = 10 \log \left(\frac{(\max \text{comp}\{\mathbf{U}\})^2}{\text{MSE}} \right) \quad (6.47)$$

sendo $\max \text{comp}\{\mathbf{U}\}$ a componente de maior valor absoluto dentre todas as componentes dos vetores de \mathbf{U} .

De (6.47) obtemos

$$\text{PSNR} = 10 \log \left(\frac{(1.133)^2}{7.025 \times 10^{-3}} \right) = 22.6 \text{ dB}$$

Exemplo 6.3: Obtenha o conjunto de vetores $\tilde{u}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$ a partir de **todos** os sub-espacos do conjunto de vetores $\underline{u}_i \in \mathbf{U}$ do Exemplo 6.2 (i.e., não execute nenhuma compressão,

apenas reconstrua o conjunto original a partir de ambos sub-espacos \mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1). Determine a PSNR do conjunto reconstruído $\tilde{\mathbf{U}}$.

Solução:

A partir da Tabela 6.1 obtemos a Tabela 6.3 abaixo.

i	$a_{0i} = \underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_0,$ $\underline{e}_0 = \begin{bmatrix} -0.427 \\ 0.904 \end{bmatrix}$	$a_{1i} = \underline{u}_i^T \cdot \underline{e}_1,$ $\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 0.904 \\ 0.427 \end{bmatrix}$	$\tilde{\underline{u}}_i = a_{0i}\underline{e}_0 + a_{1i}\underline{e}_1$
0	-1.142	-0.07	$\begin{bmatrix} 0.424 \\ -1.062 \end{bmatrix}$
1	-1.107	0.135	$\begin{bmatrix} 0.595 \\ -0.943 \end{bmatrix}$
2	-0.902	-0.065	$\begin{bmatrix} 0.326 \\ -0.843 \end{bmatrix}$
3	0.953	-0.099	$\begin{bmatrix} -0.496 \\ 0.819 \end{bmatrix}$
4	1.234	0.04	$\begin{bmatrix} -0.491 \\ 1.133 \end{bmatrix}$
5	0.964	0.059	$\begin{bmatrix} -0.358 \\ 0.897 \end{bmatrix}$

Tabela 6.3: Reconstrução $\tilde{\mathbf{U}}$ do conjunto original \mathbf{U} obtida através de $\tilde{\underline{u}}_i = a_{0i}\underline{e}_0 + a_{1i}\underline{e}_1$, onde $\tilde{\underline{u}}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$. Como nenhum sub-espaco é descartado, nenhuma compressão é obtida e o conjunto $\tilde{\mathbf{U}}$ é considerado uma reconstrução do conjunto original \mathbf{U} a partir dos sub-espacos \mathbf{a}_0 e \mathbf{a}_1 .

Portanto, da Tabela 6.3 obtemos $\tilde{\mathbf{U}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0.424 \\ -1.062 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.595 \\ -0.943 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0.326 \\ -0.843 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.496 \\ 0.819 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.491 \\ 1.133 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -0.358 \\ 0.897 \end{bmatrix} \right\}$.

De (6.46) obtemos $\text{MSE} = 5.3 \times 10^{-7}$. E de (6.47) obtemos

$$\text{PSNR} = 10 \log \left(\frac{(1.133)^2}{5.3 \times 10^{-7}} \right) = 63.8 \text{ dB}$$

Nota: Observe que o MSE não é zero (e portanto a PSNR não é infinita) unicamente devido à precisão (3 casas após a vírgula) nas operações de ponto-flutuante efetuadas. Se estivéssemos trabalhando com uma precisão suficiente o MSE seria zero porque neste

exemplo, ao contrário do Exemplo 6.2, nenhuma informação é descartada. Aqui o conjunto original U é apenas reconstruído a partir de todos os seus sub-espacos sem ocorrer qualquer compressão.

6.4 Compressão de Imagens através da KLT

Nesta seção estudaremos como efetuar a compressão de imagens através da KLT [Castro]. Por simplicidade trabalharemos com imagens em tons de cinza (*grayscale*). Uma imagem em *grayscale* tem seus valores de pixel variando entre 0 e 255. O valor 0 representa preto e o valor 255 representa branco. Todos os demais valores intermediários representam tons de cinza. A tonalidade cinza de um pixel de uma imagem *grayscale* clareia a medida que o valor do pixel aumenta. A Figura 6.3 mostra a imagem *grayscale* “Lenna” de tamanho 128×128 pixels.



Figura 6.3: Imagem *grayscale* “Lenna” de tamanho 128×128 pixels.

Para comprimir a imagem da Figura 6.3 através da KLT, adotaremos o seguinte procedimento:

- 1) Subdivide-se a imagem em $L = 256$ blocos de 8×8 pixels e registra-se a posição de cada bloco na imagem (p/ certas imagens, melhor resultado é obtido c/ blocos 16×16).
- 2) O i -ésimo bloco \mathbf{B}_i de 8×8 pixels é convertido em um vetor \mathfrak{R}^M dimensional $\underline{u}_i \in \mathbf{U}$, sendo $M = 64$ (devido ao bloco possuir 8×8 pixels), $i = 0, 1, \dots, L-1$. A conversão bloco-vetor $\mathbf{B}_i \rightarrow \underline{u}_i$ é efetuada lendo-se as 8 linhas de \mathbf{B}_i da esquerda para a direita sendo a linha ao alto a primeira a ser lida e transferindo o valor de cada pixel lido nesta ordem para as respectivas posições em seqüência no vetor \underline{u}_i .

- 3) Calcula-se o vetor média do conjunto de vetores \mathbf{U} obtido em 2) e subtrai-se este vetor média de todos os $L = 256$ vetores $\underline{u}_i \in \mathbf{U}$.
- 4) Determina-se os sub-espacos de \mathbf{U} conforme já discutido na Seção 6.3.
- 5) Descarta-se aqueles sub-espacos associados aos **menores** auto-valores.
- 6) Obtém-se o conjunto de vetores $\tilde{\underline{u}}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$ sendo $\tilde{\underline{u}}_i = a_{0i}\underline{e}_0 + a_{1i}\underline{e}_1 + \dots + a_{N-1i}\underline{e}_{N-1}$, onde $\{\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{N-1}\}$ são os sub-espacos definidos pelos auto-vetores $\{\underline{e}_0, \underline{e}_1, \dots, \underline{e}_{N-1}\}$ cujos auto-valores associados são os N **maiores** auto-valores (os N sub-espacos de maior energia). N é obtido experimentalmente e define o compromisso entre ρ e PSNR.
- 7) Soma-se ao conjunto de L vetores $\tilde{\underline{u}}_i \in \tilde{\mathbf{U}}$ o vetor média originalmente subtraído de \mathbf{U} .
- 8) Obtém-se o conjunto de blocos $\tilde{\mathbf{B}}_i$ através da conversão bloco-vetor inversa $\tilde{\underline{u}}_i \rightarrow \tilde{\mathbf{B}}_i$, $i = 0, 1, \dots, L-1$, e remonta-se a imagem comprimida a partir do registro da posição de cada bloco.

A Figura 6.4 mostra a amplitude relativa em ordem decrescente dos 32 primeiros maiores auto-valores do conjunto \mathbf{U} formado a partir da Figura 6.3 de acordo com o procedimento acima descrito.

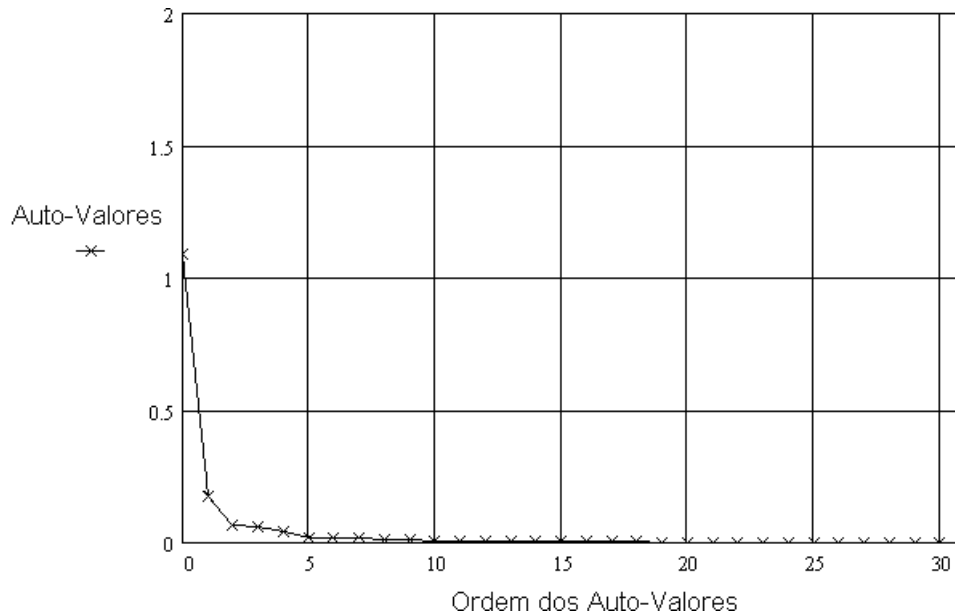


Figura 6.4: Amplitude relativa em ordem decrescente dos 32 primeiros maiores auto-valores do conjunto \mathbf{U} formado a partir da Figura 6.3. Observe que o número total de auto-valores é 64, já que cada vetor de \mathbf{U} é de dimensão \mathfrak{R}^{64} . No entanto, visto que aproximadamente a partir do vigésimo maior auto-valor a amplitude relativa torna-se pequena, escolheu-se representar apenas as 32 primeiras maiores amplitudes.

A Figura 6.5 mostra a imagem comprimida resultante formada a partir dos 32 primeiros sub-espacos de maior variância e a Figura 6.6 mostra a imagem comprimida resultante formada a partir dos 16 primeiros sub-espacos de maior variância.



Figura 6.5: Imagem da Figura 6.3 comprimida pela KLT utilizando os $N = 32$ primeiros sub-espacos de maior energia. O coeficiente de compressão resultante é $\rho = 0.629$ (Equação (6.45)). A fidelidade da imagem comprimida com relação à original é dada por $\text{PSNR} = 37.3 \text{ dB}$ (Equação (6.47)).



Figura 6.6: Imagem da Figura 6.3 comprimida pela KLT utilizando os $N = 16$ primeiros sub-espacos de maior energia. O coeficiente de compressão resultante é $\rho = 0.316$ (Equação (6.45)). A fidelidade da imagem comprimida com relação à original é dada por $\text{PSNR} = 31.4 \text{ dB}$ (Equação (6.47)).

6.5 Referências Bibliográficas

- [Oja1] E. Oja and J. Karhunen. “On Stochastic Approximation of the Eigenvectors and Eigenvalues of the Expectation of a Random Matrix”. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 106:69-84, 1985.
- [Oja2] E. Oja. “Principal Components, Minor Components and Linear Neural Networks”. *Neural Networks*, 5:927-935,1992.
- [Castro] M. C. F. de Castro. “Algoritmo Hebbiano Generalizado para Extração dos Componentes Principais de um Conjunto de Dados no Domínio Complexo”. Tese de Mestrado, Pontificia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS, Brasil, 1996.
- [Haykin] S. Haykin, *Neural Networks*, 2nd ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1999.
- [Chen] C. T. Chen, *Linear System Theory and Design*, Harcourt Brace College Publishers, 1984.
- [Gantmacher] F. R. Gantmacher, *The Theory of Matrices*, vol.1, Chelsea Publishing Company, New York, NY, 1977.
- [Bronson] R. Bronson, *Matrix Methods: An Introduction*, Academic Press Inc., San Diego, CA, 1991.
- [Hassoun] M. H. Hassoun, *Fundamentals of Artificial Neural Networks*, MIT Press, 1995.